MANUALI HOEPLI

Ing. ITALO GHERSI

MATEMATICA
DILETTEVOLE E CURIOSA

:: Problemi bizzarri - Paradossi algebrici, geometrici e meccanici - Moto perpetuo - Grandi numeri - Curve e loro tracciamento meccanico - Sistemi articolati - Quadratura del circolo - Trisezione dell'angolo - Duplicazione del cubo - Geometria della riga e del compasso - Rompicapo geometrici - Iperspazio - Probabilità - Giochi - Quadrati, poligoni e poliedri magici :: ::

TERZA EDIZIONE
con 706 figure originali dell'Autore

ULRICO HOEPLI
EDITORE-LIBRAIO DELLA REAL CASA
MILANO

1929

TIPOGRAFIA SOCIALE — Milano, Via G. Mameli, 15. – 1929 -

BIBLIOGRAFIA

Il Lettore desideroso di approfondire lo studio di qualche argomento che lo interessasse, fra i tanti trattati in questo libro, potrà consultare le opere o i periodici ai quali, più o meno largamente, ho attinto, e che ho qui elencati.

Salvo *pochissime* eccezioni, le figure del testo vennero ricavate zincograficamente da disegni miei

Ing. ITALO GHERSI.

Milano, Maggio 1921

AHRENS Dr. W. — *Mathematische Unterhaltungen und Spiele.*

BLYTHE W. H. — *On models of cubic surfaces* - 1905.

CATALAN E. — *Théorèmes et probl. de Géométrie élémentaire*

CREMONA LUIGI — *Elementi di Geometria proiettiva.*

ENRIQUES F. — *Lezioni di Geometria proiettica.*

ENRIQUES F. *Questioni riguardanti la Geom. elementare.*

FOURREY E. — *Curiosités géométriques.*

FOURREY E. — *Récréations arithmétiques.*

HAMPSON — *Paradossi della Natura.*

HUDSON H. P. — *Ruler and Compasses* - 1916.

KLEIN-GIUDICE — *Conferenze sopra alcune questioni di Geometria elementare* - 1896.

LONGCHAMPS G. DE — *Essai sur la Géométrie de la règle et de l'équerre.*

LORIA G. — *Esiste lo spazio a quattro dimensioni?* - 1907.

LORIA G. — *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven.*

LUCAS E. — *Récréations mathématiques.*

MARGOSSIAN A. — *De l'ordonnance des nombres dans les Carrés magiques impairs.*
MASCHERONI LORENZO — *Geometria del compasso.*
MITZSCHERLING Dott. ARTHUR. — *Das Problem der Kreisteilung* - 1913.
NABER H. A. — *Das Theorem des Pythagoras* - 1908.
PFEIFFER-HERMANN — *Das Buch der Probleme, Kunststücke und Gesellschaftsscherze.*
RICHARD JULES — *Sur la Philosophie des Mathématiques.*
ROUSE BALL W. — *Histoire des Mathématiques* - 1907.
ROUSE BALL W. — *Récréations Mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes*- Trad. dalla 3ª ediz. inglese.
SCHUBERT Dr. HERMANN — *Mathematische Mussestunden-Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur.*
SEVERI F. — *Complementi di Geometria proiettiva.*
TEIXEIRA G. — *Tratado de las curvas especiales notables* - 1905.
WEBER H. — *Encyklopädie der elem. Geom.* - 1905.

Annalen der Phys und Chemie
Annals of Mathematics (University of Virginia).
Atti dell'Accademia de' Nuovi Lincei.
Bollettino di matematica.
Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris.
Intermédiaire des Mathématiciens.
Journal de Physique théor. et appliquée.
Journal de Mathématiques élémentaires.
Journal für die reine und angewandte Mathematik
Mathésis.
Messenger of Mathematics.
Nouvelles Annales de Mathématiques.
Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics.
Revue de Mathématiques spéciales.
Rivista di matematica.
Zeitschrift für Mathematik und Physik.

PROBLEMI CURIOSI
E BIZZARRI

I PROBLEMI-TRANELLI

Il gatto e i topi.

Un gatto e mezzo mangiano un topo e mezzo in un minuto e mezzo. Quanti gatti occorrono per mangiare 60 topi in 30 minuti? (1).

Il ragionamento che molti faranno sarà questo: se 1 gatto e $^1/_2$ mangiano 1 topo e $^1/_2$ in 1 minuto e $^1/_2$, un gatto mangia un topo *in 1 minuto*, con relative conseguenze. L'errore consiste nel far variare oltre che il numero dei felini e quello dei rosicanti rosicati anche il *tempo* impiegato a rosicarli il quale evidentemente non deve variare.

La risposta è dunque: 3 gatti, che a quei *molti* di cui sopra sarebbero sembrati troppo pochi per mangiare i 60 topi, perchè la condizione dei 30 minuti concessi si fa passare facilmente in seconda linea.

E poi, trattandosi d'un problema di matematica, non è il caso di scendere alle volgari considerazioni di capacità stomacale, ecc., dalle quali la scienza pura astrae.

La cordicella.

Una cordicella è lunga 28 metri; ogni giorno se ne tagliano 2 metri; in quanti giorni si sarà finito di tagliare?

In 13 evidentemente, ma... 13 su 14 risponderanno invece: In 14!

(1) Questo problema si trova nel periodico «*Omnia*» fascicolo dell'11 giugno 1910, insieme ad altri ben noti e indicati più oltre in questo volume, e ad uno (quello della ruota) basato sulla supposizione d'una *ignoranza* che svisa l'indole dello scherzo geometrico.

La lumaca viaggiatrice.

Una lumaca, per affari suoi particolari, vuol trasferirsi da un orto in un altro, valicando il muro di separazione, alto 7 metri; essa sale lungo il muro (sempre verticalmente) percorrendo ogni giorno 4 metri in ascesa, e ridiscendendo (capricci di lumaca!) ogni notte di 3 metri, cosicchè ogni giorno percorre effettivamente 1 metro del suo viaggio. In quanti giorni arriverà essa in cima al muro?

Risposta.... in coro: in 7 giorni! No, signori, in quattro solamente....

L'orologio reumatizzato.

Un orologio, a motivo delle variazioni della temperatura, anticipa di 30'' durante il giorno e ritarda di 20 durante la notte. Supponiamo che segni l'ora esatta al mattino del 1° maggio. In qual momento avrà un anticipo di 5 minuti?

Si fa presto il calcolo: l'anticipo nelle 24 ore è di

$$30'' - 20'' = 10'' = \frac{1}{5} \text{ di minuto}$$

dunque:

$$5 : \frac{1}{6} = 30$$

ossia, al mattino del 31 maggio l'anticipo sarebbe di 5 minuti.... ma.... osserviamo che al mattino del 28 maggio l'anticipo sarà di minuti $27 \times \frac{1}{6} = \frac{9}{2}$ e quindi alla sera di detto giorno sarà appunto di 5 minuti. Cosicchè?!

Un passatempo marinaresco.

Fra due città di mare A e B esiste un regolare servizio di battelli a vapore; il tragitto richiede otto giorni. Ogni giorno, alla medesima ora, parte un battello da ciascuna *delle due città. Si domanda, uno dei battelli partiti da A per es., quanti ne incontrerà sul percorso, supponendo naturalmente che il servizio funzioni da tempo.*

La risposta «otto» che qualcuno potesse dare, troppo affrettamente, non è esatta poichè il battello non incontrerà solamente i battelli partiti contemporaneamente ad esso e dopo di esso, ma anche quelli partiti nella settimana che ha preceduto la sua partenza; cioè in totale 16 e non otto.

L'eredità dell'arabo.

Un arabo morendo lasciò 17 cammelli ai suoi tre figli da ripartirsi per metà al primo, per un terzo al secondo e per un nono al terzo.

Siccome la spartizione presentava difficoltà, gli eredi si rivolsero al *cadì* (giudice) che risolse la questione nel modo seguente. Si fece prestare un cammello e fece la spartizione sui 18 cammelli, in modo che ne toccarono 9 al primo, 6 al secondo e 2 al terzo. Il cammello preso ad imprestito venne restituito e i tre figli furono lietissimi dell'opera del loro giudice, poichè ognuno di essi aveva ricevuto in più di quanto il loro padre aveva stabilito, rispettivamente $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ed $\frac{1}{9}$ di cammello.

Questo curioso risultato che a tutta prima sembra paradossale deriva dall'essere la somma:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}$$

dimodochè qualora la spartizione fosse stata fatta secondo il testamento sarebbe rimasto $\frac{1}{19}$ dell'eredità, cioè $\frac{17}{18}$ di cammello non ripartiti.

Un problema da osti.

Due recipienti *A* e *B*, contengono quantità eguali, il primo di vino, il secondo d'acqua. Si preleva da *A* una certa quantità $\left(\frac{1}{n}\right)$ di vino, e si versa in *B*; poi si preleva da *B* la stessa quantità di miscela e si versa in A. Si domanda se la quantità di vino così tolta dal recipiente A sia maggiore o minore della quantità di acqua tolta da B.

In generale verrà affermato che la quantità di vino prelevata è maggiore di quella dell'acqua, mentre le due quantità sono *eguali*.

Sia infatti m il contenuto tanto di A che di B ed $\frac{1}{n}$ la quantità prelevata. In A rimarrà una quantità di vino espressa da

$$m - \frac{m}{n} + \frac{m}{n} \times \frac{1}{n+1}$$

e in B una quantità d'acqua espressa de

$$m - \frac{m}{n} \times \frac{n}{n+1}$$

che sono quantità eguali.

Le teste capellute.

Dimostrare che vi sono sulla Terra molti uomini che hanno lo stesso numero di capelli.

Un uomo paziente e sfaccendato ha contato o calcolato che una testa umana contiene, in media, 164 capelli per cmq. Essendo la superficie della testa all'incirca di cmq. 780 sarà provvista di circa 127920 capelli. Dunque ogni individuo dovrà avere da un minimo di 1 ad un massimo di 130000 capelli in cifra tonda. Ogni 130000 individui dovrà dunque ripetersi uno stesso numero di capelli per una nuova testa....

Si può naturalmente estendere una simile considerazione a generi diversi dai capelli, come le penne degli uccelli, le foglie degli alberi, i fiori, i frutti, i caratteri delle pagine di un libro, ecc.

Il testamento del Nabab.

Un Nabab lascia in eredità ai suoi figli, tra altro, un certo numero di diamanti di ugual valore, a queste condizioni:

Che il primo prenda un diamante e $\frac{1}{7}$ di ciò che rimane;

il secondo due diamanti e $\frac{1}{7}$ di ciò che rimane. e così di *seguito. Fatta la spartizione si trova che ciascun figlio ha avuto lo stesso numero di diamanti. Quanti erano i diamanti e quanti i figli?*

La soluzione algebrica del problema non presenta alcuna difficoltà, ma un modo di soluzione più semplice e più afferrabile è quello che indicheremo e che probabilmente, secondo Lucas, fu seguito in origine, cioè in India.

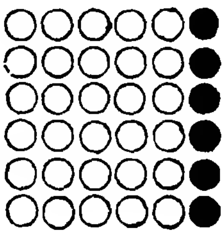


Fig. 1.

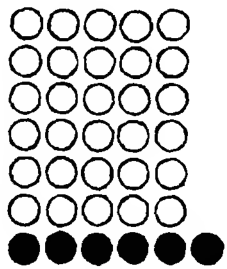


Fig. 2.

Reppresentiamo i diamanti con pedoni bianchi o neri, a seconda dell'opportunità, e partiamo da un quadrato di 6 di lato come nella fig. 1. Disponiamo la colonna nera al disotto del rettangolo bianco, come vedesi nella fig. 2. Si vede che sottraendo il pedone nero eccedente a destra ne rimangono 5 che sono appunto la settima parte del totale rimanente. Il primo

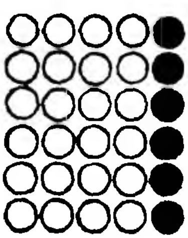


Fig. 3.

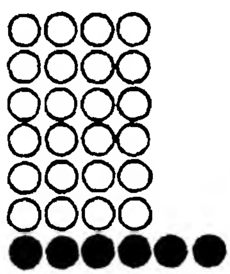


Fig. 4.

figlio avrebbe dunque avuto 6 diamanti e ne rimarrebbero 30. Ripetendo le stesse manovre su questo rettangolo di 30, si hanno le fig. 3 e 4; sicchè togliendo i due diamanti sporgenti ne rimangono quattro che sono la settima parte dei restanti e così via (fig. 5 - 6, ecc). Cosicchè i figli sono 6 e a ciascuno toccarono 6 diamanti.

Il procedimento non cambia se in luogo di *un settimo* si abbia nel problema un'altra frazione, cioè *un ennesimo;* il numero dei figli sarà $n - 1$ e quello dei diamanti $(n - 1)^2$.

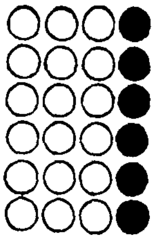


Fig. 5.

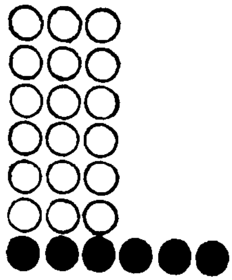


Fig. 6.

Questo metodo, che si puo chiamare *grafico*, ha però il difetto di *cominciare* con la soluzione ...... anzichè *finire* con essa; si parte da un quadrato di 36 pezzi ...... perchè si sa già che tanti debbono essere, mentre alla soluzione per via algebrica si perviene in modo normale procedendo dal noto all'ignoto. Si può nondimeno accettarlo come un *artifizio* utile e pratico.

I pani condivisi.

Due viaggiatori arabi, uno dei quali ha 5 pani e l'altro 3, ne incontrano un terzo ricco ed affamato. Pranzano insieme e il ricco viaggiatore dà loro come retribuzione 8 monete d'oro uguali. Come dovranno farne la divisione tra loro i due compagni?

La spartizione dà luogo a diverbio, pretendendo, il viaggiatore dai 5 pani di avere 5 monete, mentre l'altro vorrebbe averne 4 e rimborsare al compagno il prezzo d'un pane.

Il *cadì* risolvette la divergenza con queste parole: « Avete « torto entrambi. Si puo ammettere che abbiate diviso ciascuno « dei vostri pani in tre parti uguali, ossia 24 parti in tutto, e « che ne abbiate mangiate 8 per ciascuno. Colui che aveva 5 « pani, ossia 15 parti, ne ha dunque ceduto 7 al terzo viaggia- « tore, mentre l'altro non gliene ha ceduto che una. Le mo- « nete debbono quindi essere divise in ragione di 7 ed 1 ».

I tre gioielli.

Disponete su di un tavolo tre oggetti (per esempio: un anello, un orologio, un portamonete) e una pila di 24 gettoni.

Pregate tre persone di prendere ciascuna uno degli oggetti, senza che voi sappiate *quale* abbiano preso. Consegnate alla persona *A* un gettone, alla *B* due e alla terza tre e lasciate sul tavolo gli altri 18 Passate poi in altra sala dalla quale ordinerete alla persona che si trova in possesso dell'*anello* di prendere tanti gettoni quanti ne ha; a quella dell'*orologio* di prenderne il doppio di quelli che hà ricevuto, e a quella del *portamonete* quattro volte quanti ne ha avuto.

Rientrando allora nella sala contate quanti gettoni restano dei 18 e allora potrete indovinare in questo modo chi abbia preso l'uno o l'altro oggetto:

Se ne restano	La 1ª persona A avrà:	La 2ª B avrà:	La terza avrà:
1	Anello	Orologio	Portamonete
2	Orologio	Anello	Portamonete
3	Anello	Portamonete	Orologio
5	Orologio	Portamonete	Anello
6	Portamonete	Anello	Orologio
7	Portamonete	Orologio	Anello.

È impossibile che restino 4 gettoni come vedesi dal seguente prospetto, nel quale sono indicati i 6 casi possibili di ripartizione dei primi 6 gettoni fra le tre persone:

Anello	Orologio	Portamonete
1	2	3
1	3	2
2	1	3
2	3	1
3	1	2
3	2	1

I gettoni presi dai 18 saranno rispettivamente:

1	4	12	totale	17
1	6	8	»	15
2	2	12	»	16
2	6	4	»	12
3	2	8	»	13
3	4	4	»	11

Il cacciatore e l'amico.

Un cacciatore va a caccia con un amico e pattuiscono che per ogni colpo mancato, l'amico riceverà 5 lire, mentre per ogni colpo buono ne dovrà pagare 4. Dopo 12 colpi l'amico deve pagare 12 lire; quanti colpi ha mancato il cacciatore?

Risposta. Assai facile: 4.

Quante pecore?

Lisippo chiese al pastore Numidio quante pecore possedesse.

Rispose il pastore: non lo so esattamente, ma se le conto per due, per tre, per quattro, per cinque o per sei, sempre ne avanza una, mentre se le conto per sette nessuna ne avanza.

Al che Lisippo tosto rispose: Ebbene, Numidio, tu hai 721 pecore.

Infatti il numero delle pecore doveva essere il prodotto di $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$ aumentato di una unità.

Il traghetto.

Un contadino vuol traversare un fiume portando con sè un lupo, una capra ed un grosso cavolo, ma non dispone che d'una barchetta così piccola da non poter contenere che lui ed una sola di tali cose. Come dovrà fare per evitare che il lupo mangi la capra o questa il cavolo?

Dovrà cominciare col traghettare la capra; indi ritornerà a prendere il lupo e lo lascerà sull'altra sponda, riportandosi indietro la capra; lascerà questa e traghetterà il cavolo lasciandolo col lupo, ed infine ritornerà per traghettare la capra. In tal modo questa non sarà mai stata lasciata sola col cavolo nè col lupo. Oh, i contadini hanno cervello fino, e così doveva essere fin da tempi assai remoti, poichè di questo problema si trova indicazione in libri antichissimi.

I tre mariti gelosi.

Tre mariti gelosi si trovano con le rispettive mogli sulla sponda d'un fiume che vogliono attraversare. Non dispongono che di una piccola imbarcazione senza barcaiolo, *nella quale non possono trovar posto che due persone alla volta. Siccome nessuno dei tre vuol lasciare la propria moglie in compagnia degli altri due, come effettuare la traversata?*

Questo antichissimo problema non è che la generalizzazione di quello del lupo, della capra e del cavolo trattato precedentemente.

Rappresentiamo con due tratti verticali le sponde del fiume, con A - B - C i tre mariti, con a - b - c le loro mogli. La sinistra sia la sponda di partenza. Ecco in qual modo si dovranno fare i successivi passaggi:

A B C c	a b	Passano dapprima due mogli.
A B C	a b c	Una di esse ritorna e passa con la terza.
C c	A B a b	Una delle mogli ritorna e rimane con suo marito; gli altri due mariti passano.
B C b c	A a	Una moglie b ritorna con suo marito B e sbarca.
b c	A B C a	I due mariti attraversano il fiume.

La moglie a, la sola che si trova sulla riva opposta, va a traghettare successivamente le altre due, oppure dopo averne condotto una, cede la barca al marito della terza, che va a traghettarla.

I quattro mariti gelosi.

Questo problema, nelle condizioni del problema precedente, non è possibile. Tartaglia, il celebre matematico bresciano (1510-1557) lo aveva ritenuto possibile, in causa d'una svista.

Si può dimostrarne l'impossibilità nel seguente modo. In primo luogo ad ogni successivo passaggio il numero delle persone traghettate non può aumentare che di un'unità.

Ammettiamo dunque che siano passate due, poi tre, poi quattro persone, col procedimento già indicato, e vediamo se sia possibile traghettarne *cinque*.

Queste cinque persone potrebbero passare in una delle seguenti combinazioni:

4 donne	3 donne	2 donne	1 donna
5 uomini	2 uomini	3 uomini	4 uomini

Ma i primi due casi sono impossibili stando all'enunciato poichè si troverebbe qualche donna con un uomo senza il proprio marito; lo stesso dicasi per il terzo caso. Quanto all'ultimo caso esso non può aver luogo se non ammettendo che nell'ultimo passaggio siano stati traghettati due uomini oppure un uomo ed una donna. Ora, non si potevano traghettare due uomini perchè sulla prima sponda sarebbero rimasti due

	Prima sponda				Seconda sponda			
I.	A	B	C	D	.	.	.	.
	a	b	c	d	.	.	.	.
II.	A	B	C	D	.	.	.	.
	.	.	.	d	a	b	c	.
III.	A	B	C	D	.	.	.	.
	.	.	.	.	a	b	c	d
IV.	.	.	.	D	A	B	C	.
	.	.	.	d	a	b	c	.
V.	.	.	.	.	A	B	C	D
	.	.	.	d	a	b	c	.
VI.	.	.	.	.	A	B	C	D
	.	.	.	.	a	b	c	d

uomini e tre donne; e neppure si potevano traghettare un uomo ed una donna poichè si sarebbero avuti sulla prima sponda un uomo e quattro donne. Dunque non si possono far passare cinque persone per le esigenze dell'enunciato del problema, epperò questo non si può risolvere.

Non è più lo stesso quando si ammetta di poter traghettare non due ma tre persone nella barchetta. Il precedente prospetto indica le successive posizioni degli uomini e delle donne sulle due sponde, indicando con A, B, C, D i mariti e con a, b, c, d, le rispettive mogli.

Il mercante di montoni.

Un mercante compra 11 montoni a 35 lire per capo. Ne perde un certo numero e rivende i restanti aumentando il prezzo d'acquisto di tante volte 5 lire quanti sono i montoni perduti. Così operando egli non ha guadagnato nè perduto. Quanti montoni ha perduto?

La spesa fatta dal negoziante è di $11 \times 35 = 385$ lire, pari al ricavo dalla vendita dei montoni restanti; il numero di questi è un divisore di 385 ed effettuando la divisione si trova per quoziente un numero uguale a 35 aumentato di tante volte 5, quante sono le unità del numero di montoni venduti. Ora 385 non contiene che un solo fattore 5. Dunque il divisore di 385 che rappresenta il numero dei montoni restanti non contiene questo fattore 5, ossia tale divisore è uno dei numeri 1, 7, 11 o 77. Dovendosi escludere l'11 e il 77, sarà necessariamente il 7; dunque il negoziante ha perduto 4 montoni. Infatti:

$$7 \times 55 = 385$$

Il problema dei buoi di Newton.

I. — *Sapendo che 75 buoi hanno pascolato l'erba di un prato di 60 are (1) in 12 giorni, e che 81 buoi hanno pascolato quella d'un prato di 72 are in 15 giorni, si domanda quanti buoi occorreranno per mangiare in 18 giorni l'erba d'un prato di 96 are. Si suppone che nei tre prati l'erba sia alla medesima altezza al momento dell'entrata dei buoi, e che continui a crescere dipoi uniformemente.*

---

(1) Per semplicità, ho sostituito l'ara alle antiche misure di superficie.

L'erba che cresce in un giorno su di un'ara equivale alla quantità d'erba che ricopre attualmente una certa superficie che per ora possiamo indicare con *s*. Secondo il problema, 75 buoi hanno pascolato in 12 giorni l'erba d'un prato di 60 are, e, in più, 12×60 volte l'erba che copre la superficie *s*.

Così pure, 81 buoi hanno pascolato in 15 giorni l'erba d'un prato di 72 are, e, in più 15×72 volte l'erba che ricopre la detta superficie *s*.

Dalla prima condizione risulta che un bue mangia in un giorno l'erba d'un prato di $\frac{60}{12 \times 75}$ are, e, in più $\frac{60}{75}$ dell' erba contenuta nella superficie *s*.

Ma queste due quantità d'erba sono evidentemente uguali; inoltre $\frac{60}{12 \times 75} > \frac{72}{15 \times 81}$ e la differenza rappresenta l'erba di un prato di are:

$$\frac{60}{12 \times 75} - \frac{72}{15 \times 81} = \frac{1}{9 \times 15}$$

Invece $\frac{60}{75} < \frac{72}{81}$ e la differenza:

$$\frac{72}{81} - \frac{60}{75} = \frac{4}{9 \times 5}$$

rappresenta l'erba contenuta in una frazione di *s* uguale a $\frac{4}{9 \times 5}$.

Affinchè vi sia compensazione, occorre dunque che i $\frac{4}{9 \times 5}$ di *s* valgano $\frac{1}{9 \times 15}$ di ara, donde la conclusione che la superficie *s* è uguale a:

$$\frac{1}{9 \times 15} : \frac{4}{9 \times 5} = \frac{1}{12} \text{ di ara.}$$

Le quantità d'erba che crescono nei tre prati durante il soggiorno dei buoi sono dunque rispettivamente uguali alle quantità d'erba attualmente contenute nelle superfici di are:

$$\frac{12 \times 60}{12} = 60 \qquad \frac{15 \times 72}{12} = 90 \qquad \frac{18 \times 96}{12} = 144$$

Il problema propostò rinviene perciò a quest'altro:

II. — *Una mandra di 75 buoi pascola in 12 giorni l'erba di un prato di 120 are; un'altra mandra di 81 buoi pascola in 15 giorni l'erba di un prato di 162 are; si domanda quanti buoi occorreranno, a tale stregua, per mangiare l'erba d'un prato di 240 are in 18 giorni, sapendo che l'erba è inizialmente alla stessa altezza nei tre prati e che non cresce durante il soggiorno dei buoi.*

Le due condizioni enunciate rientrano l'una nell'altra. Considerando solamente la prima, diremo che;

Se 75 buoi mangiano in 12 giorni l'erba d'un prato di 120 are, l'erba d'un prato della medesima estensione sarà pascolata in un sol giorno da una mandra di 75×12 buoi e in 18 giorni da una mandra di $\frac{75 \times 12}{18}$ buoi. Se l'erba d'un prato di 120 are è mangiata in 18 giorni da una mandra di $\frac{75 \times 12}{18}$ buoi, l'erba d'un prato di un'ara sarà pascolata nello stesso tempo da una mandra di $\frac{75 \times 13}{18} \times \frac{1}{120}$ buoi, e, infine per mangiare, nello stesso tempo, l'erba d'un prato di 240 are, occorrerà un numero di buoi dato da:

$$\frac{75 \times 12}{18} \times \frac{240}{120} = 100$$

che è la risposta al problema proposto.

La pecora al pascolo, in vincoli.

Si lega una pecora ad un palo in un prato con una corda di lunghezza tale che essa possa nutrirsi per un giorno. Quale lunghezza occorrerà dare alla corda il secondo giorno, il terzo, ecc., supponendo che l'erba non cresca nè germogli?

Se R è il raggio del circolo che ha potuto *tondere* la pecora nel primo giorno, è facile vedere che nei giorni successivi dovrà poter tondere fino a raggi rappresentati da:

$$R\sqrt{2} \quad R\sqrt{3} \quad R\sqrt{4} \quad R\sqrt{5} \quad R\sqrt{6} \quad \text{ecc.}$$

Le fatiche del facchino.

Un facchino deve distribuire 6 oggetti a 6 inquilini d'una casa che abitano a ciascuno dei 6 piani. Egli non può portare che un oggetto alla volta. Tra un piano e l'altro vi è una scala di 21 gradini e tra la strada e il piano del portico vi sono altri 7 gradini. Quanti gradini dovrà in tutto salire quel facchino per portare tutti gli oggetti a destinazione?

Soluzione. — Per portare il primo oggetto il facchino sale 7 gradini; pel secondo $7 + 21$; pel terzo $7 + 21 + 21$, ecc.

Egli sale dunque in totale un numero di gradini dato dalla somma dei termini d'una progressione aritmetica di 6 termini dei quali il primo è 7 e l'ultimo $7 + 5 \times 21 = 112$ e la ragione 21 ossia:

$$\frac{7 + 112}{2} 6 = 357 \text{ gradini.}$$

I. Osservazione. — Questo problema può mettersi sotto altre forme, per esempio questa:

In un tratto di strada vi sono, da un lato, 15 paracarri; la distanza fra due successivi è di 10 metri. Appiedi del primo paracarro vi sono 15 oggetti uguali che si tratta di collocare, uno sopra ciascuno dei paracarri, non asportandone che uno alla volta. Quanti metri si saranno percorsi in tutto, quando tutti gli oggetti saranno al posto indicato?

Dall'origine	al	1.°	oggetto	metri	0
»	»	2.°	»	»	10
»	»	3.°	»	»	$10 + 10$
»	»	4.°	»	»	3×10
»	»	14.°	»	»	13×10
»	»	15.°	»	»	14×10

In totale dunque:

$$10 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 10 + \cdots\cdots 14 \cdot 10$$

ossia:

$$\frac{10 + 140}{2} \times 14 = 1050$$

Aggiungendone altrettanti per le corse di ritorno, *meno gli ultimi* 14×10, si ha:

$$1050 + 1050 - 140 = 1960 \text{ metri.}$$

II. Osservazione. — Analogo ai precedenti è il problema seguente:

Si ha un paniere e 100 ciottoli in linea retta, distanti un metro l'uno dall'altro, il paniere essendo ad un metro dal primo ciottolo. Due persone scommettono fra loro che una raccoglierà i ciottoli uno dopo l'altro e li porterà nel paniere; l'altra nel frattempo andrà dalla porta della propria abitazione alla porta della chiesa e tornerà al punto di partenza. Quella che avrà terminato prima avrà vinto. Supponendo che le due persone camminino con uguale velocità, quale vincerà la scommessa sapendo che la distanza fra le due porte è di circa 5050 metri?

Il ragionamento è analogo a quello dei problemi precedenti. La distanza che deve percorrere la prima persona è data da:

$$\frac{2(1+100)}{2} \times 100 = 10100 \text{ metri}$$

cioè tanti quanti deve percorrerne la seconda. Ma occorre notare che la prima deve perdere del tempo per raccattare i ciottoli .....

Gli otri di vino.

Un facchino e un contadino portavano ciascuno degli otri di vino. Siccome il primo si lagnava del soverchio carico, il secondo lo redarguì dicendogli: Di che mai ti lagni? Se io prendessi uno de' tuoi otri avrei doppio carico di te, mentre se tu ne prendessi uno dei miei avremmo carico uguale. Quanti otri portava dunque ciascuno di essi?

È evidente che la differenza tra i due numeri di otri deve essere 2, per la seconda condizione del problema. Per la prima invece la differenza dei due nuovi numeri sarà 4; ma allora il contadino ha carico doppio del facchino, per cui 4 rappresenta il numero *attuale* degli otri che porta il facchino; quando avrà ripreso il suo otre ne avrà 5; dunque il contadino ne ha 7.

Le botti del vignaiuolo.

Un vignaiuolo lasciò, morendo, ai suoi tre figli 21 botti della stessa capacità, 7 delle quali piene di vino, 7 semipiene e 7 vuote. Come si potranno ripartire egualmente fra i tre figli quel vino e quelle botti, senza far uso di alcuna misura?

In mancanza di misure si procede per ragionamento. Le 7 botti piene e le 7 semipiene equivalgono a 21 botti semipiene. Ciascun fratello deve dunque avere 7 botti semipiene, ossia:

1 piena e 5 semipiene

oppure:

2 piene e 3 semipiene

od anche:

3 piene e 1 semipiena

Aggiungendo la considerazione che ciascun fratello deve avere 7 botti (piene o vuote) è facile vedere che il problema ammette le due soluzioni seguenti:

		Piene	semipiene	Vuote
1.ª	A	3	1	3
	B	2	3	2
	C	2	3	2
2.ª	A	3	1	3
	B	1	5	1
	C	3	1	3

Osservazione. — In modo analogo si ripartirebbero 24 botti, delle quali 8 piene, 8 semipiene e 8 vuote, in 4 modi; 27 botti in 3 modi, ecc.

L'eremita e la grazia del santo.

Un pellegrino capita ad un eremitaggio. L'eremita gli racconta come abbia in esso tre immagini di santi miracolose, che fanno la grazia di raddoppiare i denari che i fedeli hanno in tasca; ma occorre pregarli con una certa pre-

ghiera che l'eremita vende per procurarsi di che vivere, e la vende contro la retribuzione di 10 lire per ogni grazia che verrà concessa. Accettato.

Il pellegrino recita la preghiera alla prima immagine e vede raddoppiarsi il proprio peculio; paga le 10 lire all'eremita e ricomincia con la seconda immagine; avuta la grazia paga le altre 10 lire; poi prega la terza, ha ancora la grazia e paga le ultime 10 lire come d'accordo e ..... resta senza un soldo!

Troppa grazia!

È facile trovare che il pellegrino possedeva sole L. 8,75.... e che l'eremita doveva essere riuscito a saperlo.

Il benefattore ricompensato.

Un divoto entra in una chiesa con una certa somma in tante pezze da due lire; egli dà ai poveri tanti soldi quante sono le sue monete da due lire. Dio gli cambia le monete che gli rimangono in altrettanti scudi. Di questi il divoto ne spende 7 e se ne torna a casa col doppio di quello che possedeva entrando in chiesa. Quanto possedeva egli allora?

Quel divoto ha distribuito in tanti soldi $\frac{1}{40}$ della somma che aveva al suo entrare in chiesa, per cui gliene restano $\frac{39}{40}$. Questo resto è composto di monete da 2 lire che vengono trasformate in iscudi, ossia rese due volte e mezza più grandi; ciò che gli restava diviene quindi i $\frac{39}{40} \times \frac{5}{2}$ ossia i $\frac{39}{16}$ della somma primitivamente posseduta.

Il divoto spende allora 35 lire e gli resta il doppio del suo avere iniziale, ossia i $\frac{32}{16}$ di esso. Cosicchè 35 lire rappresentano i $\frac{7}{16}$ della somma primitiva, onde segue che la somma cercata è $35 \times \frac{16}{7} = 80$ lire.

Un furterello di vino.

Tre soci rubano un piccolo fusto contenente 24 litri di vino; essi non dispongono che di tre misure le cui capacità sono di 5, 11 e 13 litri. Come dovranno fare le misurazioni per spartirsi il vino in parti uguali?

Essendo il problema indeterminato, si procede per tentativi; ecco due tra le varie soluzioni che ammette il problema; la seconda è alquanto più semplice.

	litri			
1.ª - Capienza del fusto e delle tre misure	24	13	11	5
Quantità di vino contenute in origine	24	0	0	0
Si riempiono 2 misure e parte della terza	0	8	11	5
Si versano 16 litri nel fusto .	16	8	0	0
Si opera un traverso	16	0	8	0
Si riempie la misura di 13 litri	3	13	8	0
Si riempie la misura di 5 litri	3	8	8	5
Si ottiene infine	8	8	8	0
2.ª - Si riempiono due misure . .	8	0	11	5
Si fa un travaso	8	11	0	5
Si finisce di riempire la misura di 13 litri coi 5, e l'avanzo si versa in quella da 11 litri	8	13	3	0
Si riempie di nuovo la misura di 5 litri	8	8	3	5
Si travasa	8	8	8	0

Un problema di Leonardo da Pisa.

Due torri A *e* B *alte, una 30 passi, e l'altra 40, sono distanti 50 passi; fra esse si trova una fontana* F *verso la quale due uccelli scendendo dalle sommità delle due torri si dirigono*

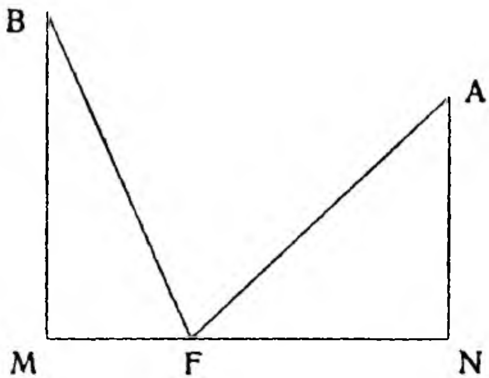


Fig. 7.

con velocità uguali e pervengono ad un tempo; quali sono le distanze orizzontali dal centro della fontana alle due torri? (Leonardo da Pisa, *Liber abaci*, 1202).

La soluzione, assai facile, ci dà:

$$FN = 32 \qquad FM = 18$$

Indovinare l'ora pensata.

I. — Si inviti una persona a *pensare* un'ora a, e a designarne, sul quadrante dell'orologio, un'altra b. Partendo allora da quest'ultima ora la persona dovrà, procedendo in senso contrario a quello delle sfere, toccare successivamente le ore contando mentalmente a, $a+1$, $a+2$, ... fino a $b+12$; l'ora sulla quale verrà in tal modo a fermarsi sarà appunto l'ora pensata.

Se, per es., l'ora pensata è la VIII, la persona che l'ha pensata dovrà designarne un' altra. per es. V, e contare 8 - 9 - 10 - 11 - 12 .... fino a $V + 12 = 17$, toccando successivamente le ore V - IV - III - II - I — XII - XI - X - IX - VIII; quando avrà contato fino a 17 sarà giunta precisamente sull'ora pensata, VIII.

La spiegazione di tale regola è facile.

Contando mentalmente si perviene in ultimo alla $(b + 12 - a)$ esima ora; ma, poichè si procede a rovescio delle sfere, si deve passare su $(b - a)$ ore per arrivare all'ora a e l'aumentare tale differenza $(b - a)$ di 12, non ha altro effetto che di far fare un giro completo del quadrante.

Essendo poi l'espressione $b + 12 - a$ sempre positiva, poichè $a < 12$, facendo puntare alla persona le ore fino alla $(b + 12 - a)$ esima, si dà alla regola una forma generale per tutti i casi, cioè tanto per $b > a$ come per $b < a$.

II. — Una persona A pensa un'ora, per esempio IX, e conta mentalmente a partire dall'ora pensata, fino a 20, nel mentre la persona B che deve indovinare l'ora pensata punta le ore sul quadrante a partire da una fissa VII, e procedendo in senso contrario al movimento delle sfere. Cosicchè quando A dirà 10, B punterà sul VII e così via. Quando A arriva al 20, B si troverà a puntare sull'ora pensata IX.

Sia infatti x l'ora pensata, l'8ª puntata sarà fatta sull'ora XII e viene contata mentalmente da A come la $(x + 8)^{ma}$ ora; la puntata $(x + 9)^{ma}$ viene fatta sull'ora XI e in generale la puntata contata come la $(x + p)^{ma}$ ora è fatta sull'ora $20 - p$. Quindi se si fa $p = 20 - x$, quando A è alla 20^{ma} ora, B segna l'ora pensata x.

Quando si voglia ripetere con le stesse persone questa ricreazione conviene cambiare l'ora fissata (che era VII nel nostro esempio) ma occorre cambiare in pari tempo il numero N fino al quale A deve contare; esso si stabilisce così, chiamando H l'ora di partenza prescelta:

$$N = H + 12 + 1.$$

Così se si sceglie come ora da cui partire, puntando sul quadrante la V, si dovrà far contare fino a 18.

Nota. — Questo gioco può applicarsi ad un numero qualsiasi $m < 20$ di oggetti, come carte, domino, ecc. Supponiamoli infatti disposti su di un tavolo in un certo ordine numerico e che una persona A ne scelga uno di posto n.

Se, partendo dall'oggetto che occupa il posto $19-m$ si risale in senso contrario a quello primitivamente seguito, di $20-m$ posti, si ricade alla fine sull'emmesimo oggetto; di modo che se in pari tempo B tocca l'oggetto di posto $19-m$, A conta $n+1$; quando B tocca l'oggetto di posto m (procedendo in senso inverso) A conterà mentalmente $(n+20-m)$ e infine l'oggetto di posto n, cioè quello scelto da A, sarà toccato da B quando avrà contato fino ad $(n+20-n)$ ossia fino a 20.

L'evasione del pretendente.

In una cella O d'una prigione è rinchiuso un nuovo Luigi Napoleone. Le celle di questa prigione, d'un genere un po' singolare se si vuole, comunicano l'una coll'altra per mezzo di porte che si possono aprire nel senso indicato dalla fig. 8 e

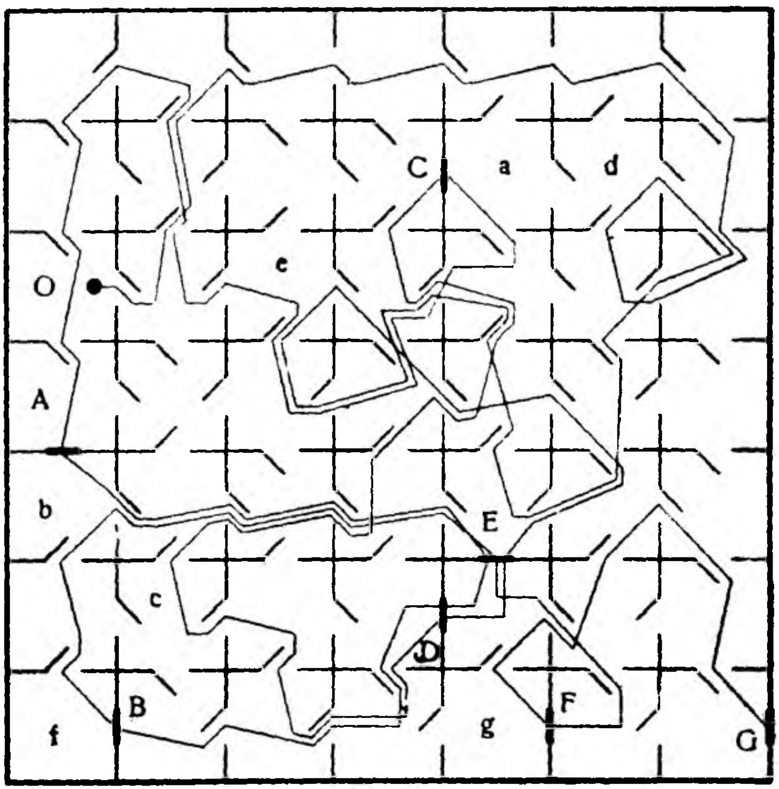


Fig. 8.

sono semplicemente chiuse a saliscendi; ma vi sono poi le porte *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, le cui chiavi sono rispettivamente nelle celle, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*. Il prigioniero è riuscito a procurarsi la chiave che apre le tre porte della sua cella: quale percorso dovrà seguire per riuscire ad evadere per la porta esterna *G*?

Egli comincerà coll'uscire per la porta 1 e seguirà l'itinerario che indichiamo nella figura, prendendo gradatamente nelle varie celle le chiavi per aprire le porte *A*, *B*, ecc.

Avrà dunque dovuto passare per 84 porte prima di giungere a quella della libertà, e prepararsi prima per bene alla fuga con un accurato studio sulla pianta della prigione, fornitagli naturalmente da un amico.

Decimazione.

Ecco un antico problema presentato sotto forme diverse, in generale troppo ingenue per i nostri tempi.

Così Egesippo narra che il biblico Giuseppe salvò la propria vita con questo strattagemma. Presa dai Romani la città di Jotopat, Giuseppe con 40 de' suoi correligionari cercò rifugio in una caverna. Con sua grande sorpresa, Giuseppe dovette constatare che, nonostante le sue esortazioni, tutti i suoi compagni, uno eccettuato, erano decisi a darsi la morte per non cadere in mano ai vincitori. Temendo d'eccitare la loro collera insistendo oltre nel tentativo di dissuaderli dal compiere un tale atto di disperazione, finse di condividerne le intenzioni, ma li esortò a procedere con ordine. Fu quindi deciso che tutta la comitiva si disporrebbe in circolo e che ogni *terzo* uomo sarebbe ucciso fino a che non ne restasse più che uno solo che si sarebbe ucciso da sè. Secondo la leggenda, Giuseppe e il suo compagno si sarebbero collocati al 31^{mo} e 16^{mo} posto e sarebbero quindi rimasti salvi dopo l'ecatombe dei compagni, come è facile rilevare eseguendo un apposito diagramma.

Daremo la forma sotto la quale i problemi di questo genere sono più generalmente noti: Una nave trasportava 15 passeggeri turchi e 25 cristiani quando venne a trovarsi in una grande tempesta, tale che il capitano dichiarò non potersi salvare la nave se non gettando a mare metà dei passeggeri. Per fare la scelta delle vittime venne deciso che, disposti i passeggeri in circolo (con quel tempaccio?!) e contandoli a partire da un punto determinato, ogni uomo occupante il nono posto sarebbe stato precipitato a mare. Si tratta di disporre i passeggeri in tale ordine da salvari i 15 cristiani.

Non si puo formulare una regola per la soluzione dei problemi di questo genere. Nel caso indicato i cristiani debbono occupare i posti 1, 2, 3, 4, 10, 11. 13, 14, 15, 17, 20, 21, 25, 28, 29; per ricordarli Bachet ha indicato questa frase nella quale l'ordine da seguire (cominciando coi cristiani) è dato dalla vocale contenuta nella parola convenendo di far contare *a* per 1, *e* per 2, *i* per 3, *o* per quattro ed *u* per 5.

4	5	2	131	1
Mort	*tu*	*ne*	*failliras*	*pas*
2	2	31	2	21
En	*me*	*livrant*	*le*	*trépas*

Sicchè la disposizione sarebbe la seguente [1]:

C C C C T T T T T C C T C C C T C T T C C T T T C T T C C T

I ponti di Kœnigsberg.

Siamo in Pomerania nel 1759, e precisamente a Kœnigsberg. Il fiume si divide in due rami formando un'isola che è collegata alle sponde con sette ponti *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*.

Da tempo è stato posto questo problema: È possibile fare una passeggiata attraversando non più d'una volta tutti i ponti?

Non siamo in grado di precisare quanto questa grave quistione abbia preoccupato finora gli abitanti di Kœnigsberg; ma in compenso possiamo dire che molto se ne sono occupati diversi matematici i quali hanno finito col concludere che occorrerebbe fare un altro ponte per rendere possibile il problema.

Un abitante di quella città s'era proposto di risolverlo praticamente percorrendo *in tutte le maniere possibili* i sette ponti, ma siccome sul percorso si trova un manicomio pare che si sia dovuto rinchiudervi il perseverante pomeranese, dopo che aveva già percorso un numero strabiliante di chilometri. Evidentemente non era quella la maniera da seguire non solo sul terreno, ma neanche sulla carta da scrivere.

Non ci sarebbe un metodo semplice per giudicare senz'altro della possibilità o impossibilità di risolvere il problema? Qui

---

(1) La *i* nella parola *failliras* deve essere computata una sola volta anzichè due.

calza un'osservazione d'Eulero, che è applicabile ad un gran numero di problemi nella geometria di *situazione:* essere cioè, in generale, più facile scorgerne l'impossibilità che la possibilità.

Molto dipende dalla più o meno felice scelta delle notazioni che si adottano per lo studio del problema.

Nel nostro caso abbiamo quattro zone territoriali *A*, *B*, *C*, *D*, e chiameremo *A B* il percorso per recarsi dalla regione *A* alla *B*, sia per il ponte *a* che per quello *b*; la prima lettera indi-

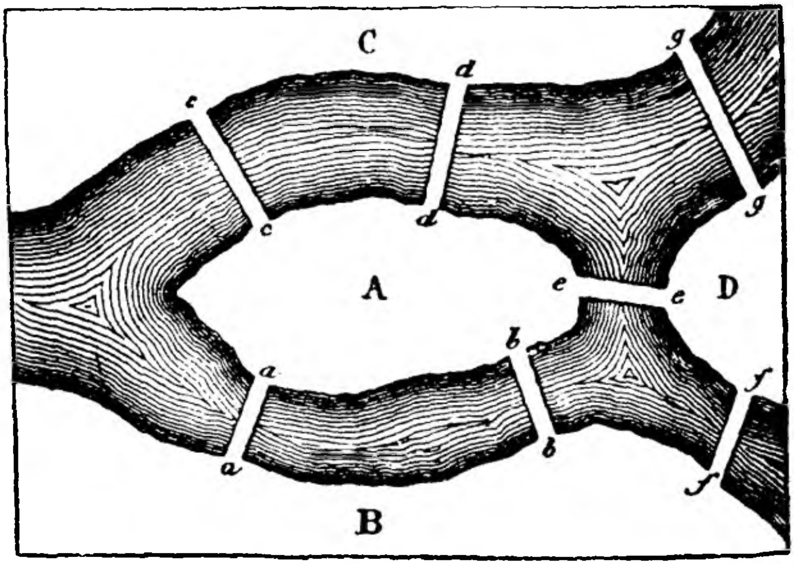


Fig. 9.

cherà la regione di partenza. La notazione indicherà tanto il percorso *A b B f D* come quello *A a B f D*.

La lettera intermedia *B* denota dunque, in questo caso, tanto regione d'arrivo che di partenza. Analogamente dicasi per un percorso *A B C*, ecc. In generale, se il viaggiatore attraversa *n* ponti, il suo percorso conterrà $n+1$ lettere, e la soluzione nel nostro caso dovrà contenerne otto, beninteso di *regioni*, senza contare quelle che designano i *ponti.* In tali notazioni, essendovi tra *A* e *B* come tra *A* e *C* due ponti, si dovranno trovare vicine due volte le lettere *A* e *B* ed *A* e *C*, mentre dovranno trovarsi vicine una sola volta *C*, *D* e *B*, *D* poichè le rispettive regioni non sono unite che da un solo ponte.

Tutto si riduce dunque a formare con le quattro lettere *A B C D* una serie di otto lettere nella quale appariscano tante volte quanto si è detto le coppie nacessarie. È possibile tale combinazione? Studiamoci di dimostrare in primo luogo tale possibilità.

Consideriamo la regione *A*; se essa è unita a *B* con un ponte *a* il viaggiatore che lo attraversa o si trovava già in *A* o vi si troverà dopo, quindi, in un caso come nell'altro, la lettera *A* dovrà figurare una sola volta nella combinazione. Se tra *A* e *B* vi sono tre ponti *a*, *b*, *c*, e il viaggiatore li attraversa tutti, la lettera *A* figurerà due volte nella notazione, sia che il viaggiatore sia partito da *A* o da un'altra qualsiasi. Con cinque ponti, *A* dovrà figurare tre volte, e in generale con numero *dispari* di ponti, $2n+1$. *A* apparirà un numero di volte metà del numero dei ponti, aumentato di uno, cioè $\frac{2n+2}{2}$ ossia $n+1$ volte.

Nel caso particolare del ponte di Kœnigsberg in *A* fanno capo cinque ponti e tre in ciascuna delle regioni *B C D*, per cui *A* dovrà figurare tre volte nella combinazione e le altre tre lettere due volte ciascuna. Segue da ciò che tale combinazione dovrebbe contenere *nove* lettere e non *otto* epperò la soluzione del nostro problema non è possibile. Il nostro ragionamento ci ha dunque evitato la.... fermata del solitario di Kœnigsberg.

Lo stesso ragionamento è applicabile a tutti quei casi nei quali il numero dei ponti che fanno capo alle diverse regioni sia sempre dispari. Quando il numero totale delle apparizioni di tutte le lettere non uguaglia il numero totale dei ponti aumentati di uno, la soluzione è impossibile.

Quando il numero dei ponti in *A* è pari, bisogna considerare due casi, secondo che il viaggiatore è partito da *A* o da una altra regione. Se due ponti conducono in *A* e se il viaggiatore è partito da *A*, questa lettera dev'essere ripetuta due volte; ma se il viaggiatore è partito da un'altra regione la lettera *A* figurerà una sola volta.

Se in A fanno capo quattro ponti e da essa parte il viaggiatore, la lettera A figurerà tre volte, ma se egli è partito da un'altra regione, A sarà ripetuta due sole volte. In generale, quando il numero dei ponti che fanno capo ad una regione è pari, la notazione corrispondente contiene la lettera corrispondente $\frac{n}{2}+1$ volte se il viaggiatore è partito da tale regione ed $\frac{n}{2}$ volte se è partito da un'altra regione.

Siccome la partenza non può effettuarsi che da una regione, si prendorà sempre come numero delle ripetizioni di una lettera la metà del numero dei ponti per una regione pari, e la metà del numero dei ponti aumentata d'una unità se la regione è impari.

Nel caso in cui la partenza abbia luogo da una regione dispari il problema sarà impossibile se il numero totale delle ripetizioni delle lettere non eccede di un'unità il numero totale dei ponti Nel caso di partenza da una regione pari il problema sarà impossibile se il numero totale delle ripetizioni delle lettere non è eguale al numero dei ponti, poichè si dovrà aumentare d'una unità per la regione pari di partenza, e per essa soltanto, il numero delle ripetizioni della lettera che ad essa corrisponde.

Regola pratica. — Consideriamo il caso di sette ponti, come nella figura relativa alla città di Kœnigsberg. Si può disporre uno specchietto nel seguente modo, indicando con m il numero dei ponti che fanno capo ad una data regione e con n il numero *totale* dei ponti. Il totale dell'ultima colonna è superiore ad $n+1$ cioè ad 8, sicchè il problema è impossibile.

Regioni	Ponti m	$\frac{m}{2}+1$
A	5	3
B	3	2
C	3	2
D	3	2
		9

La fig. 10 si riferisce al caso di due isole e di 15 ponti. Formando il quadro secondo la regola stabilita avremo:

Regioni	Ponti m	$\frac{m}{2}+1$	$\frac{m}{2}$
A	8	—	4
B	4	—	2
C	4	—	2
D	3	2	—
E	5	3	—
F	6	—	3
		5	11
		16	

Abbiamo $n+1=16$, sicchè la somma delle due ultime colonne essendo uguale a tale numero, il problema è possibile e precisamente in questo modo:

D *l* E *q* B *p* A *n* E *m* A *k* D *i* C *h* A *g* C
f F *e* A *d* F *c* B *b* F *a* E.

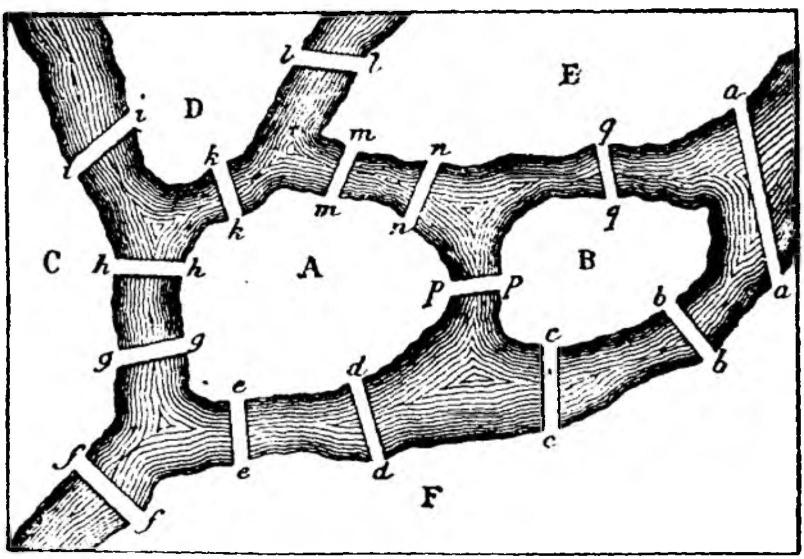


Fig. 10.

Osservazione. — La somma della prima colonna è precisamente il doppio del numero dei ponti, perchè ciascuno di essi è stato contato due volte, e tale somma dovrà dunque essere sempre pari. Perciò non è possibile che il numero delle regioni dispari sia dispari; nelle due ultime colonne avremo dunque sempre un numero pari di numeri dispari ossia il numero delle regioni dispari è necessariamente zero od un numero pari.

Il problema è dunque possibile se tutte le regioni sono pari, nel qual caso tutti i numeri delle due ultime colonne sono pari e la loro somma corrisponde al numero dei ponti.

Se il numero delle regioni dispari fosse pari, la somma dei numeri delle due ultime colonne sorpasserebbe di due, tre, quattro..... unità il numero totale dei ponti epperò il problema sarebbe impossibile.

Concludendo, data una disposizione qualsiasi di regioni e di ponti, si dedurrà la possibilità del problema in questo modo: esso è impossibile quando le regioni dispari sono più di due; È possibile: 1° quando tutte le regioni sono pari, nel qual caso si può partire arbitrariamente da una regione qualsiasi; 2° quando non vi sono che due regioni dispari, e allora il percorso deve cominciare da una di esse e terminare all'altra.

Quando si è constatata la possibilità del problema si stabilisce il percorso con la seguente regola: si sopprimono mentalmente quante volte è possibile le coppie di ponti che conducono da una regione ad un'altra, per modo che il numero dei ponti riesce notevolmente ridotto, e su questo numero si stabilisce il percorso. Ciò fatto si ristabiliscono i ponti al numero primitivo, con un po' d'attenzione.

Tale è, sommariamente, lo studio fatto da Eulero sul problema dei ponti e delle isole.

I tracciati continui.

Il problema dei ponti di Kœnigsberg, trattato precedentemente, si può ridurre schematicamente alla fig. 11.

Se una figura di tal genere si può descrivere d'un sol tratto percorrendone tutti i tratti ma ciascuno una sola volta, il problema dei ponti è possibile; non lo è nel caso contrario.

In tali figure chiameremo *nodi* i punti come A, B, dai quali partono i *tratti*, i quali perciò vanno da un nodo ad un'altro.

L'*ordine* d'un nodo è dato dal numero dei tratti che vi fanno capo; così l'ordine del nodo *D* è 3, quello del nodo *A* è 5.

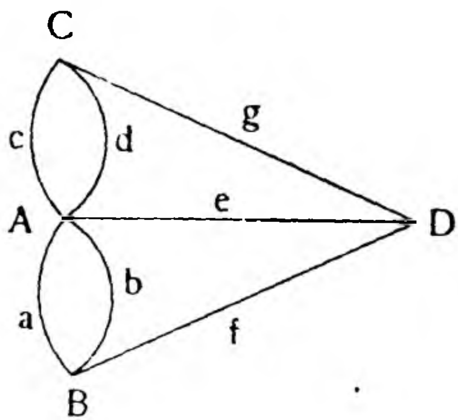


Fig. 11.

Se in una figura geometrica di rette e di curve, sia nel piano che nello spazio, riusciamo a percorrerle tutte ma una sola volta, ritornando al punto di partenza, avremo percorso un circuito chiuso. La possibilità di potere effettuare tale percorso nelle condizioni indicate è soggetta alle seguenti leggi.

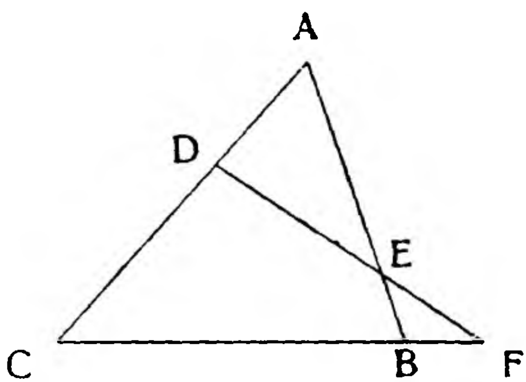


Fig. 12.

Le figure che non hanno nodi dispari si possono tracciare con tratto continuo partendo da un nodo qualsiasi (figg. 13, 16, 18).

È noto il teorema che le curve nelle quali il numero dei nodi uguaglia il grado si possono tracciare con moto continuo.

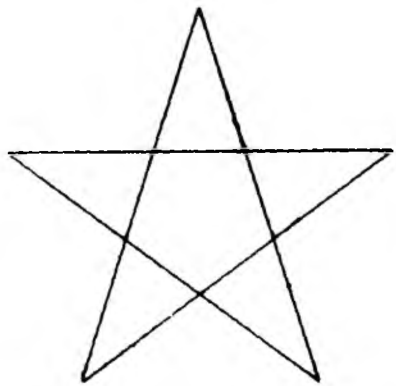


Fig. 13.

Quando una figura ha dei nodi dispari, ma due soltanto, si può descrivere con tratto continuo partendo da uno di essi.

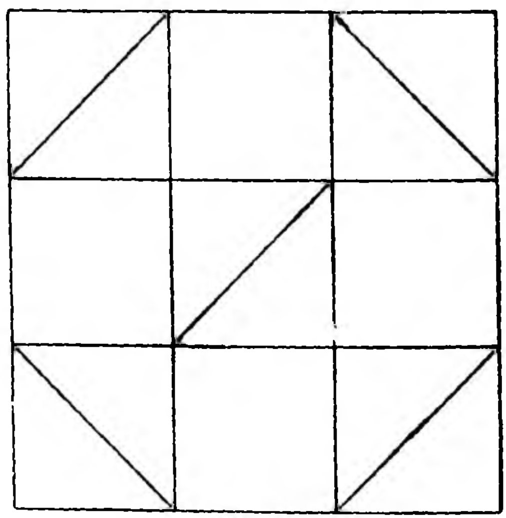


Fig. 14.

Così la fig. 12 si può descrivere in qualsiasi senso purchè si parta da uno dei due nodi dispari B o D. La fig. 14 è nelle stesse condizioni.

Le figure aventi più di due nodi dispari non possono essere descritte con tratto continuo. Si può aggiungere che una fi-

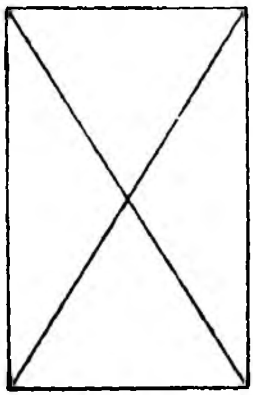


Fig. 15.

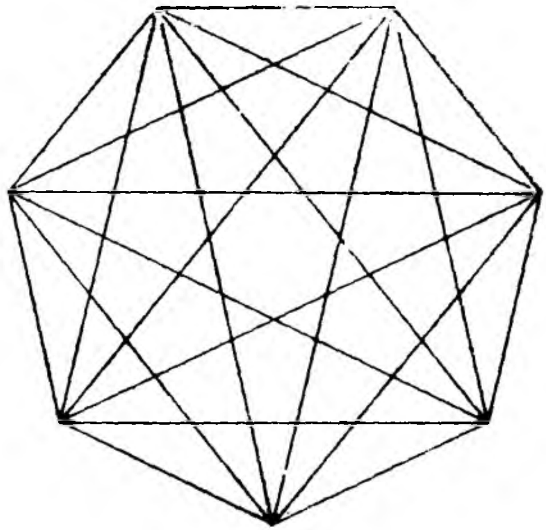


Fig. 16.

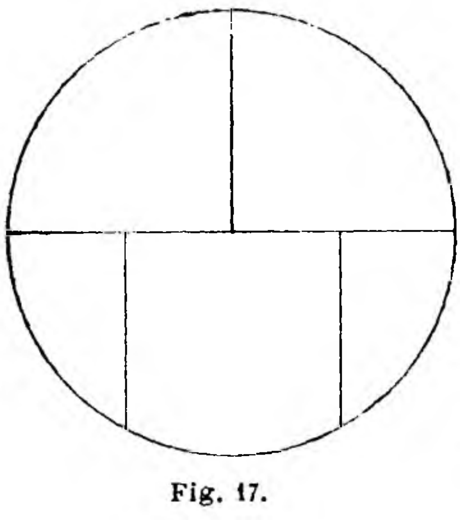


Fig. 17.

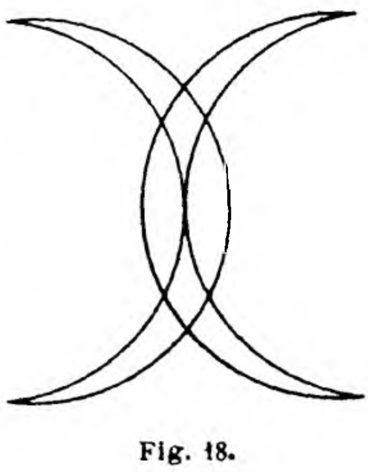


Fig. 18.

gura avente 2 n nodi dispari, può essere descritta completamente in n percorsi distinti.

Le fig. 15 e 17 offrono il caso d'impossibilità testè indicato; la fig. 15 si può descrivere in *due* percorsi e la fig. 17 in quattro.

La scacchiera usuale, di otto caselle di lato, contiene 28 nodi dispari e non si può quindi tracciarla in meno di 14 tratti continui, e quella detta francese di dieci caselle di lato richiede 18 tratti continui.

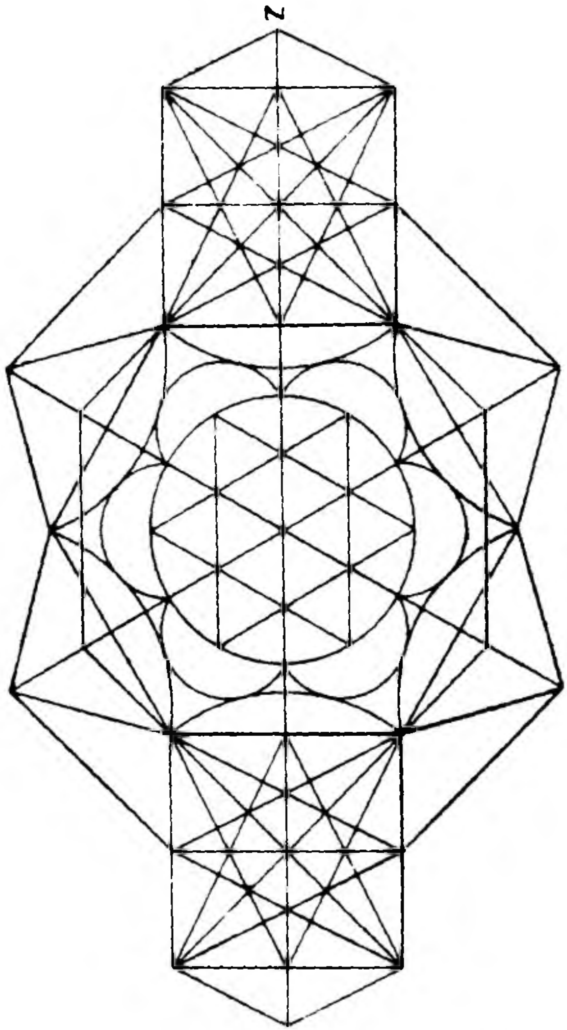


Fig. 19.

È facile dimostrare che si possono descrivere con tratto continuo tutti i poligoni, di numero dispari di lati, con le relative diagonali, mentre il problema è impossibile per quelli di numero pari di lati.

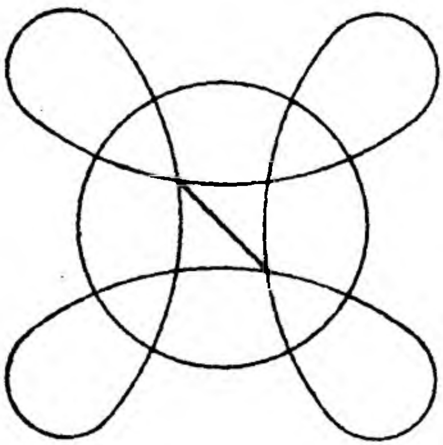


Fig 20.

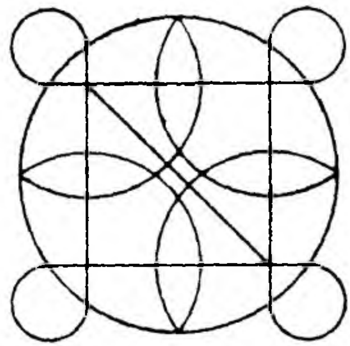


Fig. 21.

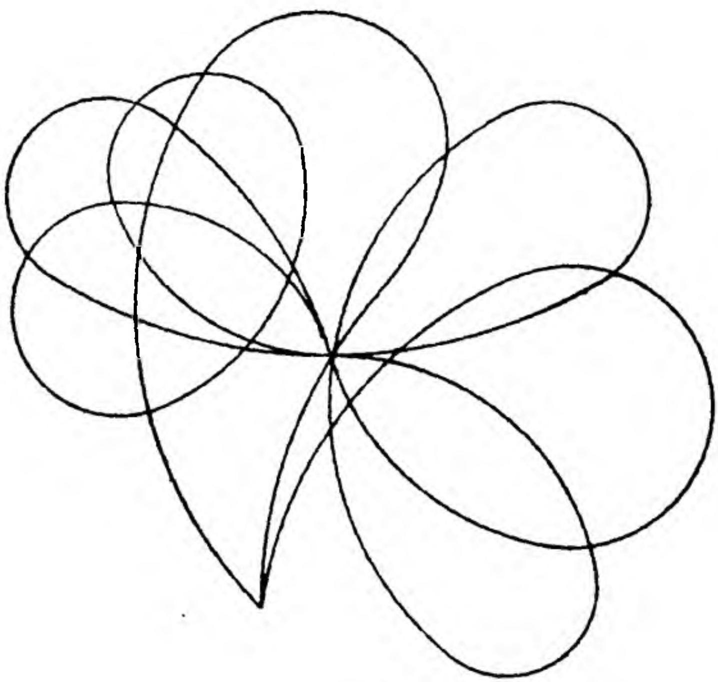


Fig. 22.

La fig. 18 rappresenta la cosidetta *sigla di Maometto* che la tradizione dice tracciata dal Profeta con la punta della scimitarra sulla sabbia, in un sol tratto. Infatti tale figura non presenta che nodi pari epperò si può tracciarla in modo continuo partendo da uno qualunque di essi.

La fig. 19 non ha che due nodi dispari in A e Z, epperò si può tracciarla in un sol tratto partendo da uno di essi e terminando all'altro.

Così dicasi per le figg. 20 - 21 - 22.

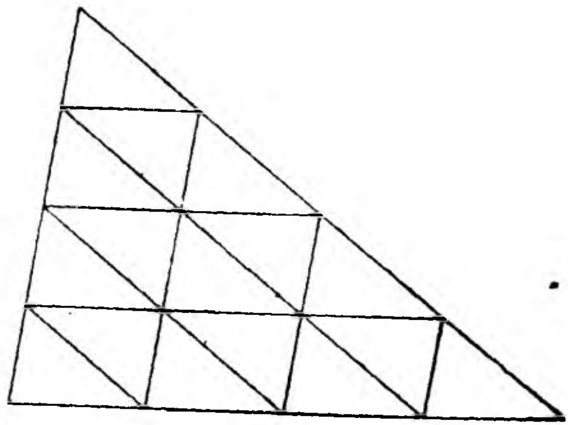


Fig. 23.

Dividendo i lati d'un triangolo in un cento numero di parti uguali e conducendo per essi le parallele ai suoi lati s'ottiene un reticolato a nodi esclusivamente pari e quindi tracciabile in modo continuo (fig. 23).

In modo analogo si potrebbe studiare il problema rispetto allo spazio, cioè per figure *solide* (lati e diagonali dei poliedri). Così, ad esempio, si può tracciare in un sol tratto l'insieme delle costole dell'ottaedro regolare, il che non può farsi per gli altri quattro poliedri regolari (tetraedro, cubo, dodecaedro, icosaedro).

Si può anche considerare il problema *correlativo* per le figure del piano e dello spazio. Si può, ad esempio, con un tracciato continuo attraversare una sola volta tutte le costole del cubo, ma non altrettanto può farsi con gli altri poliedri.

Il problema della coloritura delle carte geografiche.

Questo problema, che praticamente dovette essere risolto dai cartografi da molto tempo, si può ridurre a questa proposizione:

Quattro colori sono sufficienti per colorire una carta geografica divisa in tante regioni, in modo che due regioni contigue non siano del medesimo colore.

In mancanza della dimostrazione rigorosa, che presenta gravi difficoltà e che ancora non fu data, si può accertarsi dell'esattezza della proposizione col seguente ragionamento.

Siano A, B, C, tre regioni contigue ed una terza M contigua con A, B e C. La regione M non può avere che due posizioni, cioè: o completamente esterna al perimetro esterno della figura $A + B + C$, o completamente interna al perimetro interno di tale figura, posizione questa che indicheremo con M'.

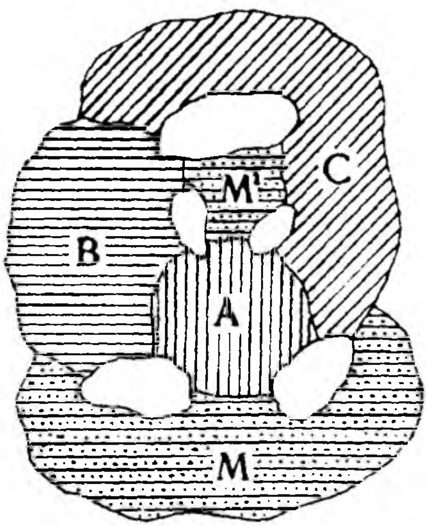


Fig. 24.

In entrambi i casi, ogni porzione libera della superficie del piano della figura è compresa nei contorni di tre regioni solamente e quindi non è possibile tracciare una nuova regione N contigua con A, B, C ed M. Il che vale quanto dire che è sempre possibile disegnare sul piano *quattro* regioni contigue ma che è impossibile disegnarne *cinque*.

Se A, B, C, non sono contigue una con l'altra, o se M non è contigua con A, B, C, non è necessario colorirle tutte in modo diverso, onde ne segue che quello considerato è il caso più sfavorevole. D'altronde il ragionamento fatto sussiste anche quando s'immagini una delle regioni ridotta ad un punto.

Devesi inoltre considerare che sono rimasti infruttuosi i tentativi fatti finora per tracciare una carta sul piano per la quale sia necessario usare più di quattro colori, il che costituisce un altro argomento favorevole all'esattezza della proposizione in questione.

Il cantiniere infedele.

Il sig. Candido ha fatto fare nella propria cantina un casellario per bottiglie, costituito da nove caselle formanti un quadrato; la centrale è destinata a ricevere le bottiglie vuote provenienti dal consumo delle 60 piene ch'egli ha collocato nelle altre caselle, sei in ciascun angolo, e nove nelle caselle di mezzo, sì che sapeva di avere 21 bottiglie per ogni lato del quadrato. Senonchè il cantiniere infedele vendette 4 delle bottiglie e dispose le rimanenti 56 in modo che la somma su ciascun lato risultava sempre di 21, riuscendo così a trarre in inganno il sig. Candido che credette in una semplice trasposizione delle sue bottiglie. Visto che il tiro passava liscio, il cantiniere pensò di asportare altre 4 bottiglie, e ripetè il giuoco tante volte fino a che non gli fu più possibile il ripeterlo senza che il numero delle bottiglie su ciascun lato risultasse inferiore a 21.

Come dispose egli le bottiglie a ciascuna nuova sottrazione e di quante bottiglie riuscì a defraudare il proprio padrone?

Indicando con a il numero delle bottiglie situate in angolo e con b quello delle bottiglie situate nelle caselle medie, dovremo avere:

$$2a + b = 21$$

Il numero delle bottiglie è $N = 42 + 2b$, evidentemente.

Nel nostro caso si ha $N = 60$, per cui $b = 9$ ed $a = 6$, disposizione data dal sig. Candido alle sue bottiglie. Basterà fare successivamente $V = 56, 52, 48, 44$, e trovare i corrispondenti valori di a e b, notando che b non può essere pari. Essi risultano come dal seguente prospetto.

N	a	b
56	7	7
52	8	5
48	9	3
44	10	1

Per valori di N inferiori al 44 si avrebbe per b un valore negativo. Dunque in totale il furto ammontò a 16 bottiglie e le disposizioni date alle rimanenti, volta per volta, furono quelle indicate nelle figure seguenti:

6	9	6
9		9
6	9	6

Fig. 25.

7	7	7
7		7
7	7	7

Fig. 26.

8	5	8
5		5
8	5	8

Fig. 27.

9	3	9
3		3
9	3	9

Fig. 28.

10	1	10
1		1
10	1	10

Fig. 29.

Un problema analogo si potrebbe risolvere, per 26 bottiglie, ridotte a 24 nei modi seguenti:

3	4	2
4		4
2	4	3

Fig. 30.

4	4	1
4		4
1	4	4

Fig. 31.

3	3	3
3		3
3	3	3

Fig. 32.

Prima del furto (fig. 30 o 31). Dopo il furto (fig. 32).

Il tiro delle suore.

In un dormitorio quadrato composto di otto celle si trovan delle suore distribuite in modo che ve ne sono tre in cia-scuna cella. La badessa, cieca, fa la sua visita e cont nove suore in ciascuna fila di celle. Fa una seconda visit e trova ancora lo stesso numero di persone in ciascun fila, sebbene siano entrate quattro serventi. Infine in un terza visita, trova ancora nove persone per fila benchè l serventi siano uscite con quattro suore.

Quali spostamenti hanno fatto le suore e le serventi?

Le figure seguenti forniscono la spiegazione dell'enigma:

3	3	3
3		3
3	3	3

Totale 24.

Fig. 33.

2	5	2
5		5
2	5	2

Totale 28.

Fig. 34.

4	1	4
1		1
4	1	4

Totale 20.

Fig. 35.

Le serventi entrate potrebbero essere otto anzichè quattro, nel quale caso la seconda figura sarebbe così modificata:

1	7	1
7		7
1	7	1

Fig. 36.

e dopo la seconda visita le otto serventi uscirebbero con quattro suore, cosicchè il totale da 32 persone si ridurrebbe sempre a 20.

Si può fare il gioco anche su altra base, per esempio 7, nel modo qui indicato:

3	1	3
1		1
3	1	3

Somma 16.

Fig. 37.

1	5	1
5		5
1	5	1

Somma 24.

Fig. 38.

2	3	2
3		3
2	3	2

Somma 20.

Fig. 39.

La croce di brillanti.

Una signora, molto ingenua, consegna al suo gioielliere una croce in brillanti (rappresentata nella fig. 40) *facendogli notare come conosca il numero dei brillanti in essa incastonati poichè contandoli da una delle tre estremità superiori fino al basso della croce ne trova sempre nove; ma il gioielliere, poco scrupoloso, si appropria due dei brillanti e restituisce la croce modificata in modo che la si-*

gnora ingenua fatta la sua verifica trova sempre il su conto. Qual'è il trucco usato dal gioielliere?

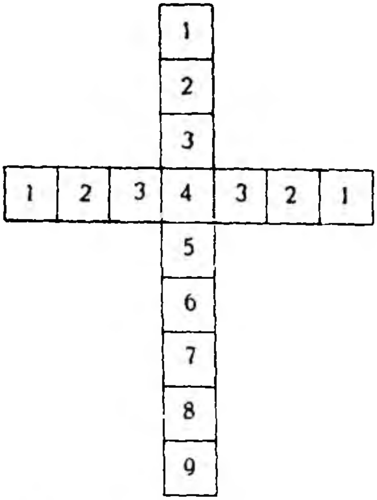


Fig. 40.

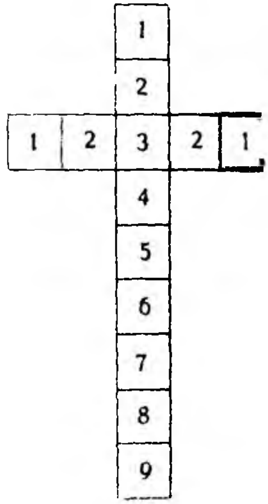


Fig. 41.

Ce lo dice la fig. 41 che dà una somma totale di 13 brillanti anzichè di 15. Si può modificare la croce in altro modo pur soddisfacendo alla condizione del problema cioè abbassandone d'uno spazio i due bracci e aggiungendo a ciascuno di essi un brillante; in tal modo la croce riesce a quattro bracci uguali e i brillanti sommano in tutto a 17 . . ragione per cui il gioielliere si attenne all'altra modificazione.

Salti di gettoni.

I. — *Abbiansi 10 gettoni disposti in linea retta, equidistanti:*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

formarne 5 file equidistanti, seguendo la regola che un pedone possa saltare, tanto a destra che a sinistra, i due adiacenti.

Dovremo considerare due casi, quello cioè in cui due gettoni sovrapposti sono considerati come due, e quello in cui sono considerati come *uno*, Ecco due soluzioni relative al primo caso:

  5   1   9   3   7
. . . .
  2   4   6   8   10

4   8   2   10   6
. . . .
1   3   5   7   9

ed una relativa al secondo caso:

  5   9   1   3   7
. . . .
  2   4   6   8   10

II. — *Se cinque gettoni rappresentano cinque maiuscole R S T U V ed altri cinque le corrispondenti minuscole, in quale ordine si dovranno disporre, in linea retta, affinchè sia possibile sovrapporre ciascuna maiuscola alla relativa minuscola, saltando sempre una sola coppia costituita di una maiuscola e di una minuscola?*

Ecco una soluzione del problema:

r U s R T u S V t v

la cui teoria non è tanto semplice come potrebbe credersi.

Nella soluzione indicata gli spostamenti si fanno nell'ordine alfabetico, *R* su *r*, *S* su *s*, ecc.

Problemi ferroviarii.

I. — *Un treno N, in una stazione munita di un binario morto che non può contenerlo tutto, deve lasciar passare oltre un altro treno M che viaggia nella medesima direzione. Quali manovre sono da farsi?*

Fig. 42.

Questo problema, ben noto e di continuo risolto specialmente nelle stazioni italiane così scarse di risorse d'ogni genere, si potrebbe risolvere in un modo spicciativo seguendo il consiglio che è dato in una *nota* molto *candida* d'un libro (d'altronde ottimo) del genere di questo; e tale consiglio sarebbe di mandare semplicemente il treno *N* a riposarsi nella stazione successiva provvista di tutte le comodità!

Non volendo correre il rischio d'una *bocciatura* in tema di *movimento*, daremo la soluzione genuina del problema, del resto abbastanza facile.

1.° Il trenc *N* viene immesso per una parte *N'* sul binario morto, mentre la rimanente *N''* rimane sul binario, oltre lo scambio.

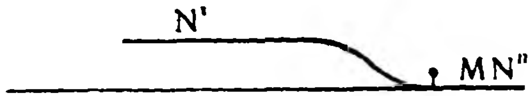


Fig. 43.

2.° Il treno *M* oltrepassa lo scambio, prende la sezione *N'* dell'altro e la immette sulla linea principale (fig. 44) e l'altra

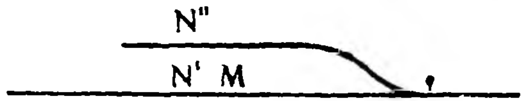


Fig. 44.

sezione *N''* con la macchina andrà ad occupare il binario morto.

3.° Il treno *M* parte e non resta che ricomporre il treno *N*.

Fig. 45.

II. — *Un treno composto d'una locomotiva L di vetture merci M e di vetture viaggiatori V si trova in una stazione provvista d'un binario di scambio S e d'un binario morto Z, sul quale trovansi dei vagoni* m. *Manovrare in modo*

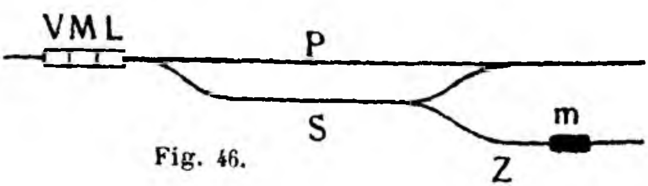


Fig. 46.

che i vagoni m *ed* M *prendano il posto gli uni degli altri senza che abbia mai a trovarsi alcun vagone sulla via principale P scompagnato dalla macchina.*

Soluzione. — Il treno prende *m* e li porta su *S*; ripassa per *P* e riprende *m*. La locomotiva ripassa per *P* e si colloca a sinistra di *m*, poi il tutto spinge *V* ed *M* su *Z*; *L* ed *m* ritornano su *S*; *L* facendo il giro per *A* va a riprendere *V* che unisce ad *m* e facendo ancora il giro, sola, viene a fissarsi in avanti ad *m*.

Passeggiate di educande.

1. — *Le educande di un convitto, in numero pari, vanno ogni giorno a passeggio a due per due. Come si dovranno disporre volendo che ogni ragazza si trovi successivamente in compagnia di tutte le altre, ma una sola volta?*

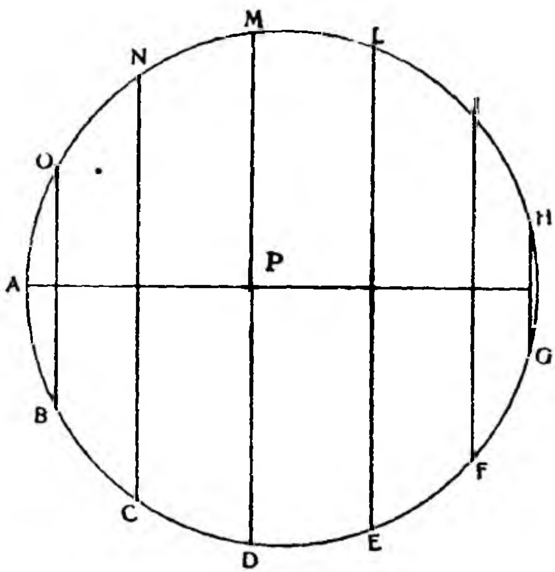


Fig. 47.

Supponiamo che siano 14 le educande. Dividiamo una circonferenza in 13 parti uguali e mettiamo una delle lettere (*P*) al centro e le altre nei punti di divisione della circonferenza in un ordine qualunque; tracciamo poi le rette della fig. 47. La disposizione delle ragazze per la prima passeggiata sarà:

AP - BO - CN - DM - EL - FI - GH.

Considereremo il reticolato rettilineo come un solo pezzo e lo immagineremo rotato d'una divisione della circonferenza nel senso delle sfere dell'orologio, rimanendo fisse le lettere sulla circonferenza Così procedendo avremo per le successive passeggiate le combinazioni seguenti:

OP - AN - BM - CL - DI - EH - FG;
NP - OM - AL - BI - CH - DG - EF;
MP - NL - OI - AH - BG - CF - DE;
LP - MI - NH - OG - AF - BE - CD;
IP - LH - MG - NF - OE - AD - BC;
. . . .

Osserviamo ora che si presenteranno due casi da considerare, secondo che una delle lettere occupa il centro, ovvero una delle divisioni della circonferenza. Affinchè la lettera che è nel centro si trovi in gruppo con un'altra, occorre che il diametro dell'*indiee* passi per quest'altra, il che non avviene che una volta con le rotazioni indicate. Parimente, perchè due lettere della periferia siano nello stesso gruppo è necessario e sufficiente che la retta che le unisce sia perpendicolare all'asse dell'indice, e nelle rotazioni considerate sono sempre differenti le direzioni dell'asse o quelle delle perpendicolari.

Resta così dimostrato che le tredici posizioni dell'*indice* danno tutte le soluzioni volute.

II. — *Le educande passeggiano ogni giorno per due, come nel problema precedente, meno una che funge da monitrice. Quali dovranno essere in questo caso le disposizioni delle signorine per ciascuna passeggiata affinchè ognuna di esse si trovi una sola volta in compagnia di tutte le altre ed una sola volta monitrice?*

Si disporrà tutto come nell'esempio precedente (fig. 47) omettendo soltanto la lettera del centro. A ciascuna rotazione la monitrice si troverà in corrispondenza dell'estremità del diametro dell'indice, e le compagne saranno per gruppi all'estremità delle corde perpendicolari ad esso.

L'un l'altro seguendo.

Abbiasi una fila di bambini in passeggiata l'uno dietro l'altro. Come si devono disporre le file nelle varie passeggiate perchè ogni bimbo si trovi una volta, sola, vicino a ciascun altro?

Si dovranno avere $\frac{n}{2}(n-1)$ avvicinamenti poichè ognuno degli n bambini deve essere vicino a tutti gli altri, il che corrisponde alle combinazioni di n cose prese a due a due. Ma ad ogni nuova fila si hanno $n-1$ avvicinamenti, epperò il numero delle file possibili è $\frac{n}{2}$, cioè pari deve essere il numero dei bambini.

Per ottenere tutte le permutazioni rettilinee giova ricorrere all'artifizio d'introdurre una lettera supplementare oltre quelle che designano i bimbi; si formano così tutti i turni pari di $n+1$ lettere; poi si apre la fila in corrispondenza della lettera supplementare, e si sopprime detta lettera.

Il gioco del giro tondo.

I. — *Un certo numero di bambini danzano in tondo tenendosi per mano. Come si dovranno disporre affinchè ognuno di essi si trovi successivamente vicino a tutti gli altri sia a destra che a sinistra, ma una sola volta?*

Cominciamo coll'osservare che il numero totale dei bambini dovrà essere dispari. Infatti in qualsiasi disposizione circolare di essi, un bambino ha due vicini uno a destra e l'altro a sinistra, che in un'altra disposizione non potranno più essere gli stessi per l'ultima condizione del problema; dunque tale bambino si troverà a contatto con un certo numero n di *coppie* di bambini e il numero totale di questi sarà perciò:

$$2n+1.$$

Designiamo ora i bambini con le lettere dell'alfabeto; dividiamo la circonferenza del circolo in $2n$ parti uguali, collochiamo $2n$ lettere ai vertici del poligono regolare e la let-

tera *A* sul diametro. Stabiliamo come prima disposizione de
bambini una qualsiasi delle permutazioni circolari di $2n +$
lettere:

A B C D E F G H I L M A

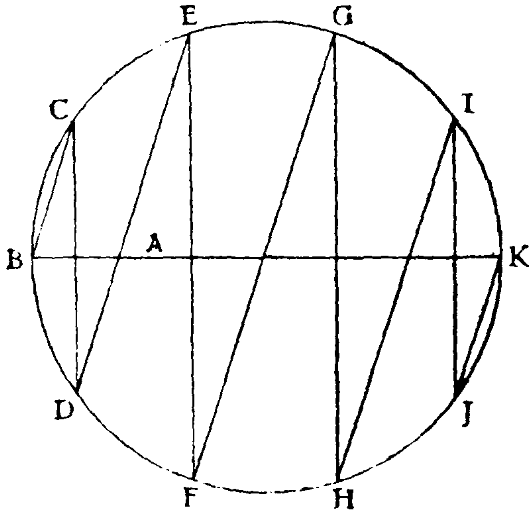


Fig. 48.

Per ottenerne una seconda consideriamo l'insieme delle linee rette della figura come un'indice mobile che faremo g[i]rare d'una divisione nel senso delle sfere dell'orologio, tr[a]sportando la lettera *A* mentre le altre resteranno immob[ili] sulla periferia. Avremo così, seguendo la spezzata descritt[a] dall'ago, la seconda disposizione:

A C E B G D I F M H L A.

Facendo rotare l'ago nello stesso senso, di due, tre, ecc. di[-]visioni, si hanno le altre disposizioni:

A E G C I B M D L F H A

A G I E M C L B H D F A

A I M G L E H C F B D A

. . . .

in generale avremo così formato n permutazioni circolari delle $2n+1$ lettere, tali che due lettere vicine in una di esse non lo sono più in alcun'altra. Infatti non si avranno a considerare che due casi cioè quello in cui una delle due lettere è situata all'interno e quello in cui occupa uno dei punti di divisione della circonferenza.

1.° Affinchè due lettere, una delle quali è A, siano vicine, è necessario e sufficiente che il diametro dell'ago mobile passi per l'altra, il che non ha luogo che una sola volta.

2.° Affinchè due lettere della periferia siano vicine, è necessario e sufficiente che la lettera che le unisce sia parallela ad uno dei lati del poligono dell'ago mobile; ora, tutte le direzioni dei lati di tale poligono, nelle n posizioni dell'ago, sono differenti.

II. — *Bambini e bambine danzano in tondo dandosi la mano; come si dovranno disporre i turni successivi volendo che ognuno dei maschi sia vicino, una sola volta, a ciascuna delle bambine e che ognuna di queste sia vicina una sola volta a ciascuno dei maschi?*

Siano A, B, C, · · · · · gli n maschi ed α, β, γ, · · · · · le n femmine. Dovendo ognuno dei maschi trovarsi una vôlta vicino ad una bambina si avranno n^2 di tali avvicinamenti; ma in ciascun turno se ne hanno $2n$, dunque il numero totale dei turni deve essere uguale al quoziente $\frac{n^2}{2n}$ ossia a $\frac{n}{2}$; sicchè il numero dei maschi deve essere pari.

Se ora dividiamo in n parti la circonferenza e congiungiamo i punti a due a due otteniamo due poligoni regolari di $\frac{n}{2}$ lati. Disponiamo i maschi all'esterno e le femmine all'interno. Come prima disposizione avremo per esempio:

$$A \; \alpha \; B \; \beta \; C \; \gamma \; D \; \delta \; E \; \varepsilon \; F \; \varphi$$

Facciamo rotare la stella di *due* divisioni a modo d'indice, così da ottenere lo spóstamento delle lettere greche, ossia delle bambine, restando fissi i maschi; se prima la bambina α si trovava tra i due bimbi A e B, ora si troverà tra i due C e D

e così di seguito, per modo che dopo $\frac{n}{2}$ rotazioni si troverà nella posizione primitiva dopo essere stata vicina, una sola volta, a tutti i maschietti.

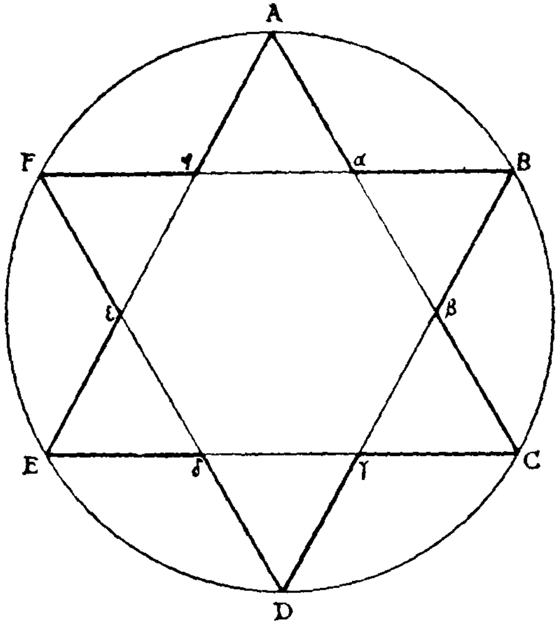


Fig. 49.

Il giuoco si può fare anche con un numero dispari di maschi, ma in tal caso si fa rotare l'indice d'un solo intervallo; allora ogni bambina si trova due volte vicina allo stesso bimbo, una volta a destra ed una a sinistra.

III. — *Disporre i primi nove numeri interi ai vertici e sui lati d'un triangolo, in modo che la somma dei quadrati dei quattro numeri situati su un lato sia costante, qualunque sia il lato considerato.*

Rappresentiamo con a, b, c, d, e, f, g, h, i, i nove primi numeri disposti sul perimetro d'un triangolo e ai vertici, in modo da soddisfare alle condizioni dell'enunciato; si ha per ipotesi:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &= S \\ a^2 + c^2 + f^2 + g^2 &= S \qquad (1) \\ g^2 + h^2 + i^2 + a^2 &= S \end{aligned}$$

essendo S la somma costante incognita. Sommando membro a membro si trova:

$$a^2 + d^2 + g^2 + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2 + i^2) = 3\ S$$

Ora, la quantità in parentesi eguaglia:

$$\frac{9\,(9+1)\,(2 \times 9 + 1)}{6} = 285$$

dunque:

$$a^2 + d^2 + g^2 = 3\,(S - 95)$$

Risulta da ciò che la somma dei quadrati dei tre numeri situati ai vertici del triangolo deve essere divisibile per 3, e che, per conseguenza, questi quadrati sono della forma:

Mult. di 3 o Mult. di 3 + 1

Le sole ipotesi ammissibili sui numeri a, d, g, sono dunque:

$$a = 3 \qquad d = 6 \qquad g = 9$$

oppure:

$$a = 1 \qquad d = 4 \qquad g = 7$$

od ancora:

$$a = 2 \qquad d = 5 \qquad g = 8$$

La prima ipotesi è inammissibile, poichè darebbe:

$$a^2 + d^2 + g^2 = 126 = 3\,(S - 95)$$

da cui:

$$S = 137$$

La prima delle eguaglianze (I) diviene allora:

$$b^2 + c^2 = S - (a^2 + d^2) = 92$$

da cui

$$(b + c)^2 = 92 - 2\,b\,c$$

$$(b + c)^2 = \text{Mult. di } 4.$$

La somma $b + c$ essendo pari, b e c sarebbe della stessa parità. Ora, combinando in tutti i modi possibili i numeri pari 2 - 4 - 8 o i numeri dispari 1 - 5 - 7 non si può ottenere come somma dei quadrati di due qualunque tra essi, il numero 92.

Anche la seconda ipotesi è ugualmente da scartare poichè dà:

$$a^2 + d^2 + g^2 = 66 = 3\,(S - 95)$$

da cui:

$$S = 117$$

La prima delle uguaglianze (I) divine allora:

$$b^2 + c^2 = S - (a^2 + d^2) = 120$$

od ancora:

$$(b + c)^2 = \text{Mult. di } 4$$

La parità di b è la stessa di quella di c, ma la somma dei quadrati di due qualunque dei numeri interi 3, 5, 9, non può uguagliare 120, e lo stesso è della somma dei quadrati di due qualunque dei numeri pari 2, 6 od 8. Ci restano dunque i valori:

$$a = 2 \qquad d = 5 \qquad g = 8$$

dai quali deducesi:

$$3\,(S - 95) = 93 \qquad S = 126$$

quindi:

$$b^2 + c^2 = 97$$
$$e^2 + f^2 = 37$$
$$h^2 + i^2 = 58$$

D'altra parte i sei numeri rimanenti 1, 3, 4, 6, 7 e 9 sono tutti della forma:

$$\text{Mult. di } 3 \quad \text{o} \quad \text{Mult. di } 3 + 1$$

i loro quadrati sono per conseguenza di una delle forme:

$$\text{Mult. di } 3 \quad \text{o} \quad \text{Mult. di } 3 + 1$$

e siccome la somma S è divisibile per 3, ne risulta, poichè:

$$a^2 = 4 \quad \text{e} \quad d^2 = 25$$

che uno dei quadrati b^2, c^2 è della forma: Multiplo di 3 + 1, e l'altro della foama Mult. di 3. La stessa osservazione si applica ai quadrati e^2, f^2 ed h^2, i^2.

Inoltre, la somma $b^2 + c^2$ essendo dispari, uno di questi numeri è pari e l'altro dispari. Non si può dunque avere che:

$$b = 1 \text{ o } 7 \qquad 3 \text{ o } 9 \qquad 4 \text{ o } 6$$

con:

$$c = 6 \text{ o } 4 \qquad 3 \text{ o } 9 \qquad 7 \text{ od } 1$$

e l'esame di queste varie ipotesi ci fa vedere che si ha:

$$b = 9 \quad \text{con} \quad c = 4 \quad \text{o} \quad b = 4 \quad \text{con} \quad \text{con} \quad c = 9$$

Gli stessi tentativi fatti per e^2, f^2 con i numeri che restano 1, 3, 6 e 7 ci danno:

$$e = 1 \quad \text{con} \quad f = 6$$

oppure:

$$e = 6 \quad \text{con} \quad f = 1$$

infine:

$$i = 3 \quad \text{con} \quad h = 7$$

oppure:

$$i = 7 \quad \text{con} \quad h = 3$$

Il problema ammette dunque la soluzione in figura.

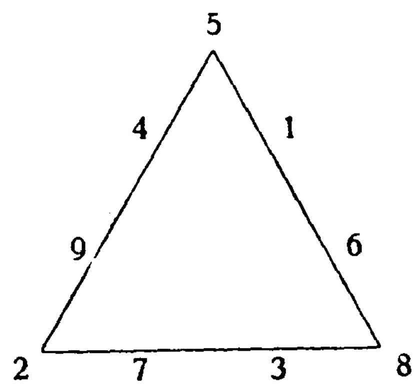


Fig. 50.

Si può anche notare che si ha in pari tempo:

$$a + b + c + d = d + e + f + g = g + h + i + a = 20.$$

Il gioco dei nove pedoni.

Disporre in quadrato nove numeri in progressione aritmetica, per modo che un numero d'angolo addizionato coi due numeri vicini (perimetrali) formi una somma costante.

Il problema è di facile soluzione applicandovi l'analisi indeterminata. Si può renderlo più difficile, precisando quale dei numeri dati n debba occupare la casella centrale. Siano dunque i numeri disposti nel modo indicato algebricamente in figura:

$$\begin{matrix} a & b & c \\ d & n & e \\ f & g & h \end{matrix}$$

soddisfacente al problema proposto. È facile vedere che considerando, per semplicità, i primi nove numeri naturali interi:

1.° $$a + h = c + f$$

somma che indicheremo con A.

2.° $A \geq 5$ $A \leq 15$

3.° A ed n sono di parità differente.

Infatti, indicando con S la somma costante $a + b + d$; $c + b + e \cdots\cdots$, si ha:

$$A + 2S = 1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + 9 - n$$

Sia ora $n = 7$. Si dovranno esaminare i cinque casi $A = 6 - 8 - 10 - 12 - 14$ da cui derivano le sette ipotesi seguenti per i valori di a, h, c, f.

1, 5, 2, 4 — 2, 6, 3, 5 — 1, 9, 2, 8

1, 9, 4, 6 — 2, 8, 4, 6 — 3, 9, 4, 8 — 5, 9, 6, 8

La prima può scriversi:

$$\begin{matrix} 1 & b & 2 \\ d & 7 & e \\ 4 & g & 5 \end{matrix}$$

I numeri che restano essendo 3, 6, 8, 9 si vede che occorre scrivere:

$$d = 9 \qquad e = 8 \qquad b = 6 \qquad g = 3$$

Si hanno altre soluzioni dalle altre ipotesi, la terza eccettuata. Procedendo analogamente per $n = 5$, 6, 8 e 9 si trovano rispettivamente 1, 4, 4, 6 soluzioni.

Si può osservare che ogni soluzione relativa, per esempio, ad $n = 7$, ne fornisce una relativa ad $n = 3$; prendendo in tutti i casi i complementi al 10 se ne deduce che il problema ammette 42 soluzioni.

Del resto sarebbe facile fare tutti i *terni* possibili con i nove numeri, cioè:

$$\frac{9 \times 8 \times 7}{2 \times 3} = 84 \text{ terni}$$

e combinare quelli di ugual somma dei numeri che li compongono, con ripetizione d'uno dei numeri stessi, come vedesi da questa catena:

$$\begin{array}{cccccccccc} 7 & 1 & 9 & & 3 & 8 & 6 & & & \\ & & 9 & 5 & 3 & & 6 & 4 & 7 \end{array}$$

cui corrisponde la disposizione:

$$\begin{array}{ccc} 8 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 9 \\ 4 & 7 & 1 \end{array}$$

I LABIRINTI

La leggenda ha attribuito ai labirinti dell'antichità una inestricabilità paurosa che deve intendersi in modo assai relativo. I labirinti dei quali le opere antiche ci danno molteplici e particolareggiate descrizioni erano costruzioni a gallerie numerose, le cui innumerevoli ramificazioni costituivano una grande difficoltà ad uscirne per chi vi si avventurava alla cieca. In generale servivano come sepolcri, ed oggi non ce ne restano più che poche tracce.

Sono celebri quelli che esistevano in Egitto; uno, detto *labirinto di Mendes* si trovava nell'isola del lago di Meris; l'altro a sud-est dello stesso lago, detto dei *Dodici-Signori*, costrutto da Psammetico circa il 700 a C., era consacrato al sole e consisteva in una serie di tempii congiunti tra loro o sovrapposti che occupavano un'enorme estensione; le vie di intercomunicazione costituivano un aggrovigliamento inestricabile.

Il più noto dei labirinti antichi è però quello di Creta che il re Minosse fece costruire per imprigionarvi il Minotauro e del quale così canta Ovidio nella *Metamorfosi* (libro VIII):

Multiplicique domo, cæcisque includere tectis.
Dædalus, ingenio fabræ celeberrimus artis,
Ponit opus; turbatque notas, et lumina flexum
Ducit in errorem variarum ambage viarum.
Non secus ac liquidus Phrygiis Mæandros in arvis
Ludit; et ambiguo lapso refluitque fluitque;
Occurrensque sibi venturas adspicit undas;
Et nunc ad fontes, nunc in mare versus apertum,
Incertas exercet aquas; ita Dædalus implet
Innumeras errore vias; vixque ipse reverti
Ad limen potuit; tanta est fallacia tecti!

La cui traduzione sarebbe:

. . . . e in un recinto
Di mille e ciechi muri imprigionarla.
Lo costruisce Dedalo, famoso
Per inventiva mente architettore;
E similianti l'un all'altro i calli
V'apre, illudendo le pupille e il piede
Con tortuosi error. Come trastulla
Seco il Meandro nelle Frigie lande
Che incerto vassi e torna e la corrente
Mira venirsi incontro, e sta pensoso
Se alle fonti risalga o cerchi pace
Nell'ampiezza del mar; non altrimenti
Fece il maestro serpeggiar le vie
Dell'edificio; si fallaci e tante
Ch'egli stesso ebbe impaccio e lunga briga
A trovarne l'uscita . . . .

Realtà o leggenda? Fin dai tempi di Diodoro e di Plinio non se ne trovavano più vestigia di sorta, il che farebbe credere piuttosto alla leggenda sebbene i Cretesi vogliano ritenere come resti del labirinto ove si smarrì la bella Arianna, figlia di Minosse, certe caverne a gallerie coperte che trovansi nella loro isola rocciosa.

Il laberinto di Creta era rappresentato in varii modi e, tra altri, in quello indicato nella fig. 51, sulle monete della città di Gnosse; tale disegno corrisponde a quello della fig. 52 disposto in cerchio anzichè in rettangolo.

La fig. 51 venne d'altronde interpretata anche come la maniera in cui un certo numero di persone danzanti dovevano tenere in mano una certa corda.

Disegni analoghi, ma più complicati, si trovano in molti mosaici e gioielli romani, come pure ricamati su varii manti di gala degli imperatori romani.

Esistono pero realmente rovine di altri labirinti a Lemno, Agrigento, Clusio. Quest'ultimo edificio fu sepoltura di Porsenna secondo Varrone, citato da Plinio, il quale lo dice un monumento della follia e della vanità umana.

Le complicazioni geometriche del laberinto passarono nel Medio Evo nei pavimenti delle chiese gotiche; in alcuni casi la *Via Crucis* era posta appunto sotto forma di complicati rigiri che conducevano alle varie *Stazioni* terminando al Calvario. In Francia sono di tal genere i pavimenti delle cattedrali di Reims, Chartres, Sens, Amiens. Bayeux, ecc. Quelli

Fig. 51.

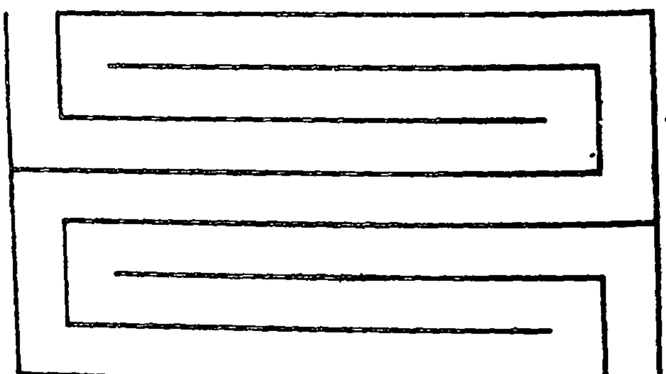


Fig. 52.

di Chartres e di Bayeux esistono ancora, come pure quelli di S. Maria in Trastevere a Roma e di S. Vitale a Ravenna.

Queste riproduzioni più o meno complicate di labirinti antichi si devono probabilmente alle applicazioni che se ne fecero, come si è detto, sotto l'Impero romano. Decorazioni di tal genere, costituite da una specie di nastro senza fine si trovano pure sui muri nel Duomo di Lucca, d'Aix (Provenza) e di Poitiers.

In Inghilterra si tracciavano sentieri di tal genere in mezzo a prati confinanti con Conventi e probabilmente i frati dovevano percorrerli per esercizio religioso. Se ne possono vedere ancora alcuni, per esempio, a Rockliff Marshes (Cumberland), Asemby (Yorkshire), Alkborough (Lincolnshire), Wing (Rutlandshire), Boughton-green (Northamptonshire), Comberton (Cambridgeshire) Saffron Walden (Cantone d'Essex), Chilcombe presso Winchester.

Fig. 53.

I labirinti più moderni, introdotti in Inghilterra dall'Italia durante il Rinascimento, erano annessi ai palazzi od ai grandi castelli costrutti sotto i regni dei Tudor e degli Stuardi. Quello unito al castello di Hampton Court presso Londra (soggiorno prediletto di Guglielmo III) è abbastanza complicato (fig. 53) ma siccome non contiene nodi d'ordine superiore al 3, si può percorrerlo abbastanza facilmente: tenendo sempre la destra, per esempio.

I laberinti, se anche non se ne conosca la pianta, si possono percorrere senza smarrirsi tenendosi sempre vicino ad uno stesso lato, destro o sinistro, della via, galleria, nastro, ecc., che li costituisce.

Passiamo ora a dare la dimostrazione di tale possibilità.

La teoria dei labirinti rientra in quella dei *percorsi continui* studiata in un § precedente, poichè possiamo considerare i crocicchi di un labirinto come *nodi* d'una figura geometrica le cui *linee* sarebbero le congiungenti di tali nodi ossia le vie, gallerie, ecc. del labirinto.

Immaginando di percorrere *due volte* ciascuna delle vie del labirinto, ogni nodo della figura geometrica ad esso corrispondente risulterà *pari* epperò, per la regola già enunciata, sarà sempre possibile percorrerlo tutto quanto, da qualsiasi punto si parta. In questa supposizione non si segue certamente la più breve via per percorrer il labirinto, ma si è certi di raggiungerne il centro ad un dato momento e di non smarrirsi.

Sempre in base alla teoria dei percorsi continui, diremo che un labirinto si può sempre percorrere tutto quanto in un sol tratto, quando non presenti altri nodi d'ordine dispari che l'entrata ed il centro.

Le regole trovate da Trémaux per percorrere i labirinti si possono così riassumere, chiamando crocicchi *vecchi*, quelli che furono già percorsi una volta e *nuovi* quelli che ancora non furono mai seguiti.

1.° Quando si perviene ad un crocicchio nuovo si può seguire una via qualsiasi.

2.° Quando si perviene per una via nuova ad un crocicchio vecchio od all'estremità cieca d'un corridoio si retrocede seguendo la via già percorsa.

3.° Quando si perviene per una via vecchia ad un crocicchio vecchio, bisogna avviarsi per una via nuova se esiste, e in caso contrario si deve seguire una via antica.

4.° Ogni via già percorsa due volte deve lasciarsi da parte.

Si può osservare ancora che, giunti ad un crocicchio qualsiasi di tutte le vie che le regole enunciate permettono di seguire, è da preferirsi la più prossima sia a destra che a sinistra, il che corrisponde al percorso più semplice.

PERCORSI MINIMI

Linee geodetiche.

I.

Ecco un esempio semplice di ricerca di linee geodetiche cioè linee di minimo percorso fra due punti su di una data superficie. Nel nostro caso si tratta di superfici piane e quindi il problema non offre alcuna difficoltà. Eccolo sotto una forma piuttosto puerile.

In una stanza di forma parallelepipeda il pavimento è un rettangolo di metri 5 per 7 e l'altezza è di m. 4. Sulla verticale del mezzo d'una delle pareti minori, a 50 cm. dal soffitto, sta un ragno che ha preso di mira una mosca situata sulla parete opposta, sulla verticale nel mezzo di essa e distante cm. 50 dal pavimento. Quale è la via più breve che possa seguire il ragno per raggiungere la mosca supposta immobilizzata dal terrore?

La fig. 14 rappresenta lo *sviluppo in piano* delle facce del prisma costituente la stanza. Siano Z il pavimento, Y e W le pareti maggiori, X il soffitto ed U la parete sulla quale, in M, trovasi la mosca. La parete opposta ad U potrà avere, nello sviluppo, una delle quattro disposizioni (1) (2) (3) (4) nelle quali R indica la posizione del ragno. Parimente, la parete U potrà avere una delle quattro posizioni I - II - III - IV. Si potranno dunque condurre da M a R nelle varie posizioni 4×4 cioè 16 rette che rappresenteranno i possibili percorsi del ragno.

Fra questi si tratta di determinare quale sia il minimo. Non si può stabilire per questo una regola generale, come vedremo.

Indichiamo, in generale con a la distanza del ragno dal soffitto, cioè $R_1 S$ e con c quella della mosca del pavimento $M_1 G$ e, per semplificare, supponiamoli entrambi sulla verticale del

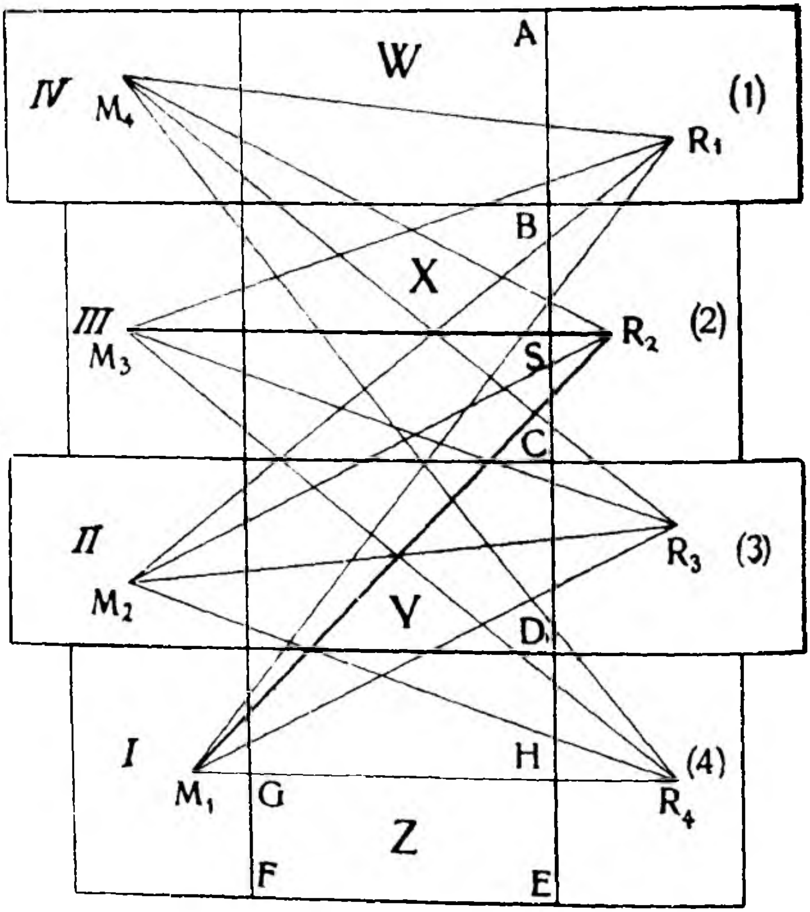


Fig. 54.

mezzo della parete rispettiva, come è indicato nel problema. Siano b la lunghezza GH della stanza, m la larghezza DE, n l'altezza CD.

Potremo così esprimere nel modo seguente le lunghezze delle 16 congiungenti di M con R, che indicheremo rispettivamente con I (1) - I (2)...... II (1) - II (2)...... ecc.

		Valori di k^2	
I (1)	$\left(\frac{m}{2}+b+c\right)^2+\left(a+n+\frac{3\,m}{2}\right)^2=k_1^2$	2330	2969
I (2)	$(a+b+c)^2+(m+n)^2=k_2^2$	1600	1873
I (3)	$\left(\frac{m}{2}+b+c\right)^2+\left(n-a+\frac{m}{2}\right)^2=k_3^2$	1658	1961
I (4)	$c+b+n-a=k_4$	1764	1849
II (1)	$(m+b)^2+(a+m+n-c)^2=k_5^2$	2340	2845
II (2)	$\left(a+b+\frac{m}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{2}+n-c\right)^2=k_6^2$	1658	1845
II (3)	$(m+b)^2+(n-a-c)^2=k_7^2$	1864	2197
II (4)	$\left(n-a+b+\frac{m}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{2}+c\right)^2=k_8^2$	2258	2501
III (1)	$\left(\frac{m}{2}+b+n-c\right)^2+\left(a+\frac{m}{2}\right)^2=k_9^2$	2258	2385
III (2)	$n-c+b+a=k_{10}$	1764	1681
III (3)	$\left(\frac{m}{2}+b+n-c\right)^2+\left(\frac{m}{2}+a\right)^2=k_{11}^2$	2258	2385
III (4)	$(n-a+b+n-c)^2+(m+n)^2=k_{12}^2$	3280	3385
IV (1)	$(m+b)^2+(n-c-a)^2=k_{13}^2$	1864	2197
IV (2)	$\left(a+b+\frac{m}{2}\right)^2+\left(n-c+\frac{m}{2}\right)^2=k_{14}^2$	1658	1845
IV (3)	$(m+b)^2+(n-c+m+a)^2=k_{15}^2$	2340	2845
IV (4)	$\left(n-a+b+\frac{m}{2}\right)^2+\left(2\,n-c+\frac{3\,m}{2}\right)^2=k_{16}^2$	3800	4517

Ora, a seconda dei valori di a, b, c, m, n, risulta minimo uno piuttosto che un altro dei 16 percorsi. Basteranno due esempi:

per: $a=1 \quad b=30 \quad c=1 \quad m=12 \quad n=12$

si hanno per k i valori indicati nella prima colonna, e per:

$$a=1 \quad b=30 \quad c=1 \quad m=16 \quad n=12$$

si hanno quelli della seconda colonna; da essi risulta che, nel primo caso, il percorso minimo è la $k_1 = I(2) = \sqrt{1600} = 40$ e nel secondo è invece $k_{10} = III(2) = \sqrt{1681} = 41$.

II.

Si dividano i lati d'un quadrato in n *parti uguali e si conducano per i punti di divisione altrettante parallele ai lati del quadrato, che risulterà così scomposto in n^2 quadrelli uguali. Per passare da un vertice del quadrato dato a quello opposto, si possono seguire su tali parallele parecchie linee spezzate differenti, fra le quali ve ne sono di minime ed eguali fra loro; quante?*

Questi percorsi minimi sono tutti uguali alla somma di due lati del quadrato dato cioè di $2\,n$ piccole divisioni. Inoltre essi comprendono tutti n divisioni orizzontali ed n verticali. Il problema rinviene dunque a trovare il numero delle permutazioni con ripetizione, di due sorta di linee ripetute ciascuna n volte. Tale numero è dato dalla formula:

$$\frac{P_{2n}}{P_n \cdot P_n} = C^n_m = \frac{2\,n\,(2\,n-1)\,(2\,n-2)\,\cdots\cdots\,(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\,\cdots\cdots\,n}$$

Questo quoziente, è appunto uguale alla somma dei quadrati dei coefficienti del binomio di Newton e si può anche scriverlo sotto questa forma:

$$\frac{2\cdot 6\cdot 10\cdot 14\,\cdots\cdots\,(4\,n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\,\cdots\cdots\,n}\,.$$

III.

Partendo da **x** (fig. 55) *per andare in* **y**, *toccando i punti* **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, *e percorrendo soltanto delle diagonali, quale è il percorso minimo? Quale è il massimo?*

1. — Notando che dai punti **x, b, e, y**, le diagonali possibili sono 5, e da **a, c, d** sono 6, si trova che i percorsi che soddi-

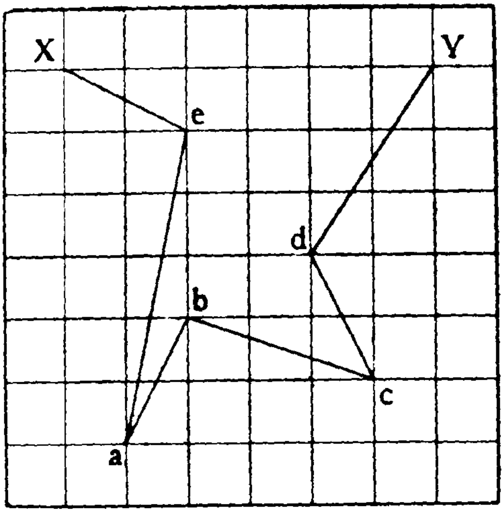


Fig. 55.

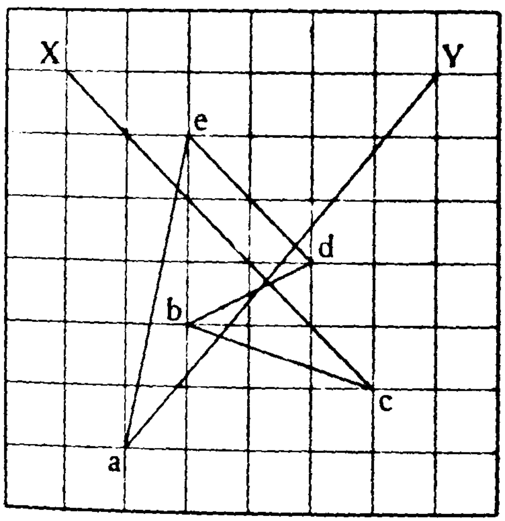


Fig. 56.

sfano alle condizioni stabilite sono 71 e fra essi il minimo è **x, e, a, b, c, d, y** e il massimo è **x, c, b, d, e, a, y**.

II. — Nella fig. 57 per andare da **x** in **y** per sole diagonali il percorso minimo è **x, a, e, d, c, b, y** ed il massimo è **x, c, a, d, b, e, y.**

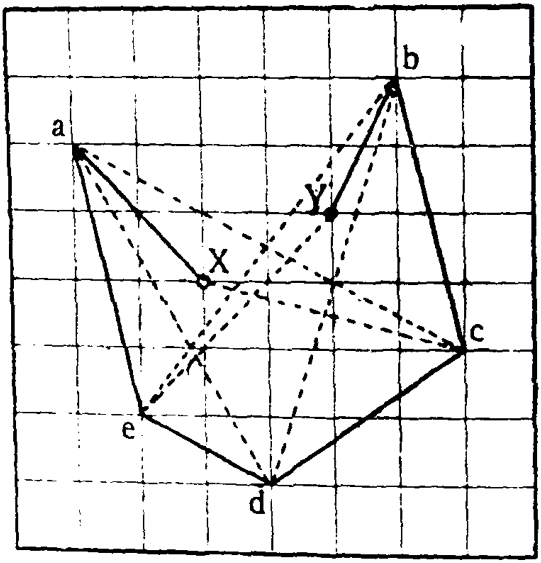


Fig. 57.

PROBLEMI DIVERSI SULLA SCACCHIERA

Regine.

1. — *Disporre otto regine sulla scacchiera in modo da comandare il minor numero possibile di caselle.*

Una soluzione del problema sarebbe la seguente, nella quale abbiamo *undici* caselle che non sono sotto scacco. Si può ot-

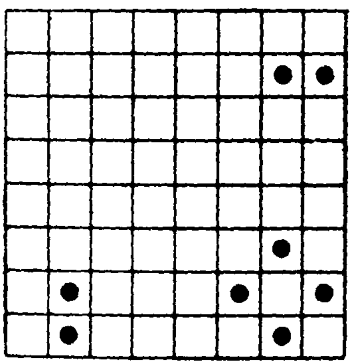


Fig. 58.

tenere lo stesso risultato con altre disposizioni. Non si ha finora una soluzione che lasci più di 11 caselle libere, nè una dimostrazione che ciò sia o no possibile.

11. — *Disporre su di una scacchiera* n *regine* $(n < 5)$ *in modo da comandare il maggior numero possibile di caselle.*

Esempio. — Si possono disporre quattro regine in varie maniere, in modo da comandare 58 caselle oltre quelle che occupano, sicchè non ne restino che due sole che non siano sotto scacco. Ecco le disposizioni:

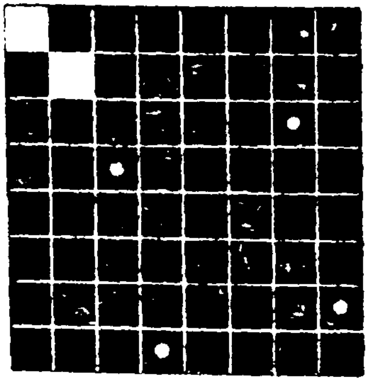


Fig. 59.

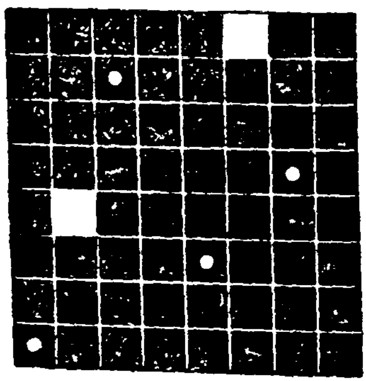


Fig. 60

Si potrebbe proporre un problema analogo in questi termini: *Determinare il numero minimo di regine e le posizioni in cui occorrerebbe disporle su di una scacchiera di* m^2 *caselle perchè tutte le caselle risultassero occupate.*

Problema delle otto regine.

Su di una scacchiera comune, cioè di 64 caselle, si tratta di collocare otto regine in modo che nessuna di esse possa esser presa da una delle altre, il che corrisponde a disporle in modo che due qualsiasi non si trovino mai su di una stessa retta parallela ad uno dei lati della scacchiera nè ad una sua diagonale.

Questo problema venne proposto la prima volta da Nauck; fu risolto nel 1850 da Gauss che ne trovò tutte le 92 soluzioni. Molti altri matematici se ne occuparono, e il Prof. Glaisher dell'Università di Cambridge ne fece l'estensione al caso di 6-7 regine per scacchiere quadrate di 36 o 49 caselle.

Nel 1874 il Dr. Günther ne diede una soluzione basata sulla teoria dei determinanti. Consideriamo, per semplicità, una scacchiera di 25 caselle. Otterremo le posizioni possibili delle cinque regine sviluppando il determinante:

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & b_2 & c_3 & d_4 & e_5 \\ \beta_2 & a_3 & b_4 & c_5 & d_6 \\ \nu_3 & \beta_4 & a_5 & b_6 & c_7 \\ \delta_4 & \nu_5 & \beta_6 & a_7 & b_8 \\ \varepsilon_5 & \delta_6 & \nu_7 & \beta_8 & a_9 \end{array}$$

nel quale ciascun elemento rappresenta la corrispondente casella della scacchiera e lasciando da parte tutti i termini nei quali, sia una stessa lettera, sia lo stesso indice, figura più di una volta.

Infatti ciascun termine del determinante contiene soltanto un elemento preso in ciascuna linea orizzontale e in ciascuna colonna verticale epperò indicheranno posizioni sulla scacchiera nelle quali le regine non possono essere prese l'una dall'altra, limitandone i movimenti a quelli della torre. Inoltre nel determinante le lettere e gli indici sono disposti in modo che la medesima lettera e il medesimo indice figurano nel senso delle diagonali, cioè nel senso del movimento dell'alfiere; perciò se non conserviamo che i termini nei quali tutte le lettere e tutti gli indici siano differenti, essi rappresentano le caselle della scacchiera sulle quali le regine non potranno esser prese tra loro con movimenti uguali a quelli dell'alfiere.

Il determinante indicato contiene 120 termini, ma uno di 8° ordine ne contiene 1 · 2 : 3 ….. 8 ossia 40320; ne segue che il metodo di Günther non è praticamente applicabile alla soluzione del problema delle *otto* regine a meno di trovare una maniera semplice, rapida, di riconoscere i termini da conservare nello sviluppo del determinante.

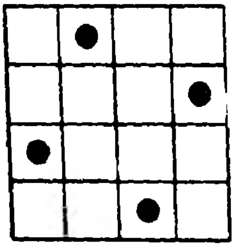


Fig. 61.

Daremo alcune soluzioni, indicando con cifre la posizione delle regine sulla scacchiera; così per una scacchiera di quattro caselle di lato, 2413 indicherà che la prima regina si trova nella seconda casella della prima colonna, la seconda nella quarta casella della seconda colonna, ecc., come vedesi nella fig. 61.

Le soluzioni *fondamentali* possono dar luogo a *due*, *quattro* od *otto* soluzioni, come vedesi nel seguente prospetto:

Caselle della scacchiera	Soluzioni fondamentali		
	da 2 soluzioni	da 4 soluzioni	da 8 soluzioni
4ª	3142	—	—
5ª	25314	—	14253
6ª	—	246135	—
7ª	—	5724613	1357246
	—	2574136	3572461 - 4613572
	—	—	3162574
8ª	—	35281746	46152837 - 61528374 35841726 - 58417263 72631485 - 57263148 16837425 - 48157263 51468273 - 42751863 51863724

Il problema delle otto regine consiste nello scegliere fra le soluzioni delle otto torri (v. oltre) le permutazioni nelle quali la differenza assoluta di due cifre qualsiansi non sia uguale alla differenza dei posti occupati da queste due cifre nella permutazione considerata; il che rinviene a tener conto del movimento dell'alfiere unitamente a quello della torre.

Tutto si riduce dunque a trovare i numeri di otto cifre formati delle otto prime cifre. tutte diverse ma in un ordine qualunque, per modo che la differenza di due tra esse sia diversa dalla differenza dei posti che essi occupano.

Tali numeri, o soluzioni, in numero di 92, trovate separatamente da Günther e Glaisher e da Bellavitis, sono riuniti nel seguente quadro, che si può costruire con un metodo assai semplice, dovuto a Gauss.

1	1586	3724	24	3681	5724	47	5146	8273	70	6318	5247
2	1683	7425	25	3682	4175	48	5184	2736	71	6357	1428
3	1746	8253	26	3728	5146	49	5186	3724	72	6358	1427
4	1758	2463	27	3728	6415	50	5246	8317	73	6372	4815
5	2468	3175	28	3842	1625	51	5247	3861	74	6372	8514
6	2571	3864	29	4158	2736	52	5261	7483	75	6374	1825
7	2574	1863	30	4158	6372	53	5281	4736	76	6415	8273
8	2617	4835	31	4258	6137	54	5316	8247	77	6428	5713
9	2683	1475	32	4273	6815	55	5317	2864	78	6471	3528
10	2736	8514	33	4273	6851	56	5384	7162	79	6471	8253
11	2758	1463	34	4275	1863	57	5713	8642	80	6824	1753
12	2861	3574	35	4285	7136	58	5714	2863	81	7138	6420
13	3175	8246	36	4286	1357	59	5724	8136	82	7241	8536
14	3528	1746	37	4615	2837	60	5726	3148	83	7263	1485
15	3528	6471	38	4682	7135	61	5726	3184	84	7316	8524
16	3571	4286	39	4683	1752	62	5741	3862	85	7382	5164
17	3584	1726	40	4718	5263	63	5841	3627	86	7425	8136
18	3625	8174	41	4738	2516	64	5841	7263	87	7428	6135
19	3627	1485	42	4752	6138	65	6152	8374	88	7531	6824
20	3627	5184	43	4753	1682	66	6271	3584	89	8241	7536
21	3641	8572	44	4813	6275	67	6271	4853	90	8253	1746
22	2642	8571	45	4815	7263	68	6317	5824	91	8316	2574
23	3681	4752	46	4853	1726	69	6318	4275	92	8413	6275

Si colloca dapprima una regina nella prima casella nella prima colonna a sinistra; se ne colloca poi una nella seconda colonna nella casella meno alta che sia possibile, e così di seguito, cercando sempre di collocare una regina in una nuova colonna a destra il più basso possibile, tenendo sempre presente la regola del gioco riguardo alla *presa* possibile da parte delle regine già collocate.

Quando non si può più collocare nessuna regina nella sua colonna, si alza quella della colonna precedente di una, due caselle e si continua sempre, secondo lo stesso metodo a non alzare una regina che quando non vi sono più posizioni ammissibili per l'insieme delle regine da collocare a destra.

Ogni volta che una soluzione è trovata la si scrive secondo la notazione convenuta, e le soluzioni risultano in tal modo allineate nell'ordine numerico della notazione.

Se ne può fare una verifica riunendo in uno stesso gruppo tutte le soluzioni che si possono dedurre da una prima, mediante la rotazione o il rovesciamento della scacchiera o negli altri modi precedentemente indicati.

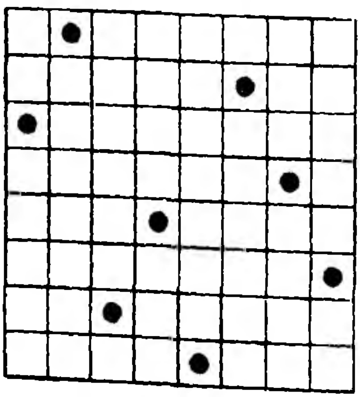


Fig. 62.

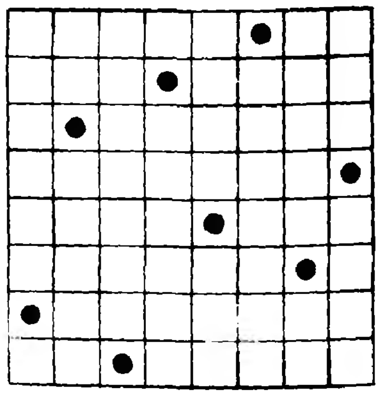


Fig. 63.

Abbiamo accennato a *soluzioni fondamentali* e ad altre *derivate*. Queste si possono dedurre da quelle immaginando di far rotare la scacchiera d'un quarto di giro nel senso opposto al movimento delle sfere dell'orologio. Così dalla soluzione della fig. 62 si può passare a quella della fig. 63.

Le notazioni relative sarebbero 68241753 e 26174835. Si può dedurre la fig. 64 dalla 63 e la 65 dalla 64 mediante nuove rotazioni della scacchiera, d'un quarto di giro; le relative notazioni si possono ottenere dalle due prime in questo modo. Scriviamone le cifre in ordine inverso:

68241753	26174835
35714286	53847162

prendiamo il complemento di ciascuna cifra al 9

64285713 46152837

e queste saranno le notazioni delle fig. 64 e 65.

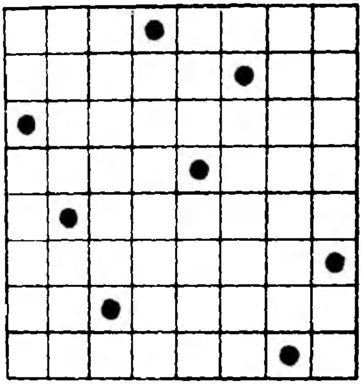


Fig. 64.

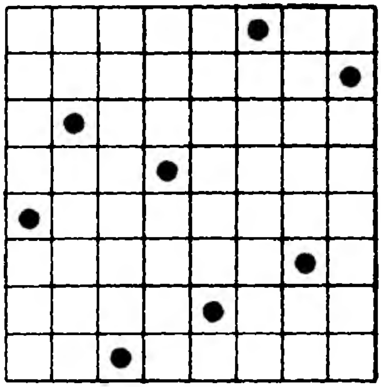


Fig. 65.

La fig. 66 rappresenta una soluzione che dà luogo ad una sola soluzione derivata, poichè facendo rotare la scacchiera

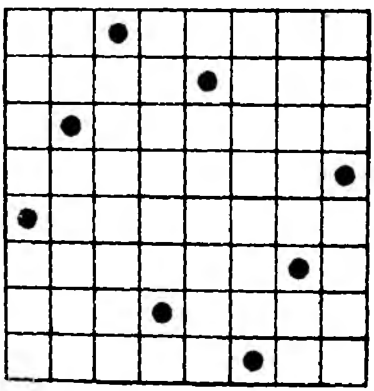


Fig. 66.

d'un mezzo giro si ritrova la stessa disposizione. La relativa notazione sommata col numero *rovesciato* dà per somma un numero di soli 9.

$$\begin{array}{r} 4\,6\,8\,2\,7\,1\,3\,5 \\ 5\,3\,1\,7\,2\,8\,6\,4 \\ \hline 9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9 \end{array}$$

Abbiamo veduto che si possono avere soluzioni che non diano luogo a nuove soluzioni derivate quando si faccia rotare d'uno o più quarti di giro la scacchiera Questa soluzione singolare non può presentarsi che quando il lato della scacchiera contieme un numero di caselle multiplo di 4 o di $4+1$. Questa regola soffre però eccezione per la scacchiera di otto caselle di lato.

Sono esempi di queste soluzioni la 2413 per la scacchiera di 16 caselle e la 25314 per quella di 25 caselle.

Si può notare che ancora una qualsiasi delle disposizioni considerate si può invertire come se se ne considerasse l'immagine in uno specchio, il che corrisponde allo scriverne la notazione a rovescio.

Cavalli.

Qual'è il numero massimo di cavalli che si possono disporre su di una scacchiera di m^2 *caselle, in modo che tutte le caselle siano occupate o vedute, senza che due cavalieri siano in mutua presa?*

Il numero richiesto sarà $\frac{m^2}{2}$ nel caso che m sia pari, ed $\frac{m^2+1}{2}$ nel caso in cui sia dispari.

Venne pure proposto di: *Trovare il minimo numero di cavalli che si possono disporre su di una scacchiera di* m^2 *caselle in modo che tutte siano occupate o vedute, senza che due cavalli siano in mutua presa.*

a	C	d
D		C
b	A	c

Fig. 67.

Problema di Guarini. — Abbiasi una scacchiera di 9 caselle e si dispongano nelle caselle (fig. 67) perimetrali dei cavalli del gioco di scacchi nel modo seguente:

a e *d* due cavalli bianchi
b e *c* » » neri.

Si tratta di spostarli in modo che i cavalli bianchi vengano ad occupare le caselle *b*, *c* e viceversa quelli neri le caselle *a*, *d*.

La soluzione è assai semplice. Si portano i pezzi da *a* in *A*, da *b* in *B*, da *c* in *C* e da *d* in *D*. Poi da *A* in *d*, da *B* in *a*, da *C* in *b* e da *D* in *c*. Si ottiene così lo stesso effetto come con una rotazione della scacchiera di un quadrante. Si ripetono allora i movimenti, ossia si spostano successivamente i pezzi da *a* in *A*, da *b* in *B*, da *c* in *C* e da *d* in *D*; poi da *A* in *d*, da *B* in *a*, da *C* in *b* e da *D* in *c*, e si ottiene così la soluzione cercata.

L'insieme dei percorsi dei cavalieri costituisce un ottagono stellato (fig. 68) una metà del quale è descritta da ciascuno dei cavalieri.

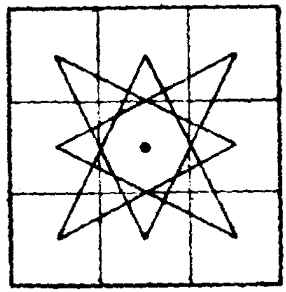


Fig. 68.

Il salto di cavallo. — È ben noto questo problema geometrico che consiste nell'occupare successivamente una sola volta tutte le caselle della scacchiera facendo muovere un solo pezzo, il cavallo.

Numerosissime ricerche furono fatte in proposito, le quali stanno ad affermare quanto sia arduo lo studio matematico del gioco di scacchi tentato dal russo Jaenisch; difficilmente la mente nostra può afferrare il complesso dell'intricata rete di movimenti possibili nella cerchia delle regole di gioco, coi 32 pezzi della scacchiera.

Indicherò alcune fra le tante soluzioni del problema proposte dai molti cha se ne occuparono (Eulero - De-Moivre - Warnsdorff - Roget, ecc.).

Se la scacchiera ha numero *pari* di caselle, il percorso da seguire può essere rientrante o no, ma se tale numero è dispari il percorso non può essere rientrante perchè l'ultima mossa del cavallo lo porta su di una casella dello stesso colore di quella di partenza e quindi nessun movimento di salto potrà riunire tali due caselle.

Nelle antiche soluzioni di De Montmort e De Moivre, applicabili a scacchiere d'un numero qualsiasi di caselle, si suppone la scacchiera divisa in un quadrato centrale di 16 caselle cinto da una fascia di 2 caselle. Se all'origine il cavallo si trova sopra una casella della fascia, esso si sposta lungo tale fascia e sempre nello stesso senso, in modo da toccare ciascuna casella, non penetrando nel quadrato centrale che in caso di assoluta necessità. Quando le caselle della fascia sonó state

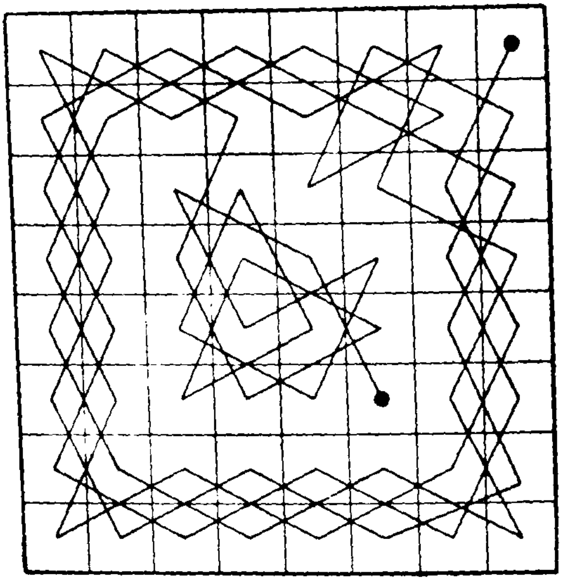


Fig. 69.

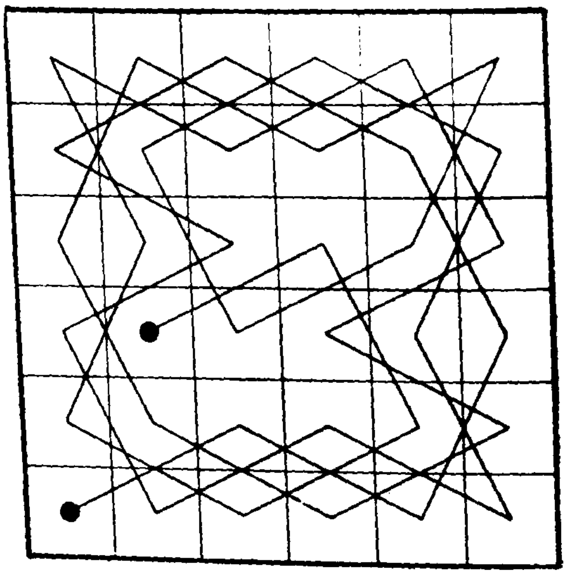


Fig. 70.

occupate tutte è facile proseguire nel salto sino alla fine. Se il cavallo era all'origine su di una casella del quadrato centrale, si procede in senso contrario.

La fig. 69 corrisponde ad una soluzione per scacchiera di 64 caselle. La fig. 70 rappresenta una soluzione a percorso rientrante, di Eulero, per scacchiera di 36 caselle.

La regola data da Eulero, che è applicata nella fig. 71 ad uno dei casi più difficili, consiste in questo. Si comincia a muovere il cavallo comunque, fino a che esso non possa più spostarsi; sia 1 · 2 · 3 ······· 60 il percorso così effettuato, in modo che non restino più da occupare che quattro caselle *a*, *b*, *c*, *d*

55	58	29	40	27	44	19	22
60	39	56	43	30	21	26	45
57	54	59	28	41	18	23	20
38	51	42	31	8	25	46	17
53	32	37	*a*	47	16	9	24
50	3	52	33	36	7	12	15
1	34	5	48	*b*	14		10
4	49	2	35	6	11	*d*	13

Fig. 71.

Si comincia col rendere rientrante il percorso da 1 a 60. La casella 1 comanda una casella p che sarà 32, 52 o 2; la casella 60 comanda una casella q che sarà 29, 59 o 51. Se due di tali valori di p e q differiscono tra loro d'una unità, come nel nostro caso avviene per i valori $p = 52$ $q = 51$, la via può essere resa rientrante. Così le caselle 1 · 2 · 3 ···· 51; 60 · 59 ···· 52 formano un percoso rientrante di 60 movimenti. Quindi sostituendo i numeri 60 · 59 ···· 52; con 52 · 53 ···· 60, i salti saranno numerizzati consecutivamente. Si tratta ora d'introdurre nel percorso le caselle *a*, *b*, *d*. Nel nuovo diagramma di 10 caselle formato nel modo indicato, la casella *a* comanda le 51, 53, 41, 25, 7, 5 e 3. È indifferente la scelta di una o di un'altra di esse; scegliamo il 51: esso deve essere messo all'ultimo posto nel percorso delle 60 caselle, in modo che potremo proseguire coi movimenti *a*, *b*, *d*. Per conseguenza, se si aggiunge $9 = 60 - 51$ a ciascun numero del diagramma costrutto, sostituendo 61 · 62 · 63 .... 69 con 1 · 2 · 3 .... 9 si ottiene un percorso partente dalla casella occupata primitivamente dal 60, il sessantesimo movimento si fa sulla casella occupata all'origine dal 51 e i movimenti 61^mo 62^mo 63^mo ci conducono rispettivamente alle caselle *a*, *b*, *d*.

Passiamo ora ad introdurre la casella *c*. Poichè *c* comanda la casella che attualmente porta il n.° 25, e che 63 comanda la 24, si può operare come precedentemente si è fatto per ot-

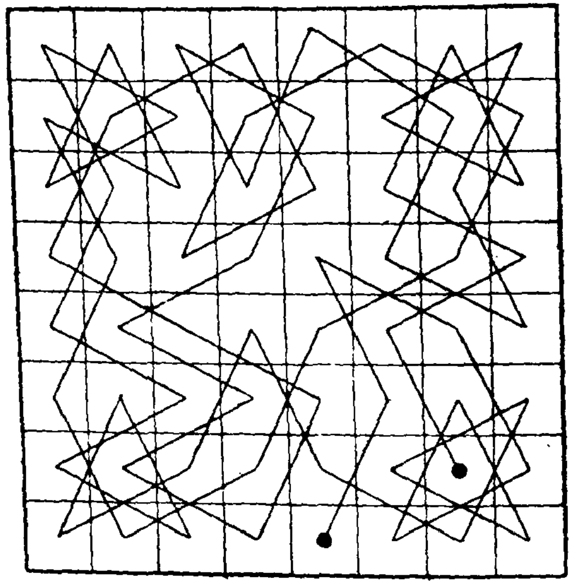


Fig. 72.

tenere una via rientrante. Infatti le caselle 1 · 2 · 3 ..... 24; 62 · 63 .... 25, *c* costituiscono un *salto di cavallo*; sostituiamo 63 · 62 .... 25 con 25 · 26 .... 63 e allora il 64 cadrà sulla casella *c*. Si ha così un percorso che copre senza lacune la scacchiera.

Occorre in ultimo rendere questo percorso *rientrante*. A tal uopo le caselle 1 e 64 debbono essere situate una presso l'altra e ciò può ottenersi nel seguente modo: Prendiamo una delle caselle comandate da 1, la 28 p. es., la quale a sua volta comanda 1 e 27. Per conseguenza le caselle 64 · 63 .... 28; 1 · 2 · 3 .... 27 costituiscono un percorso e potremo rappresentare questa disposizione sul diagramma sostituendo i numeri 1 · 2 .... 27 con 27 · 26 .... 1.

Ora, la casella occupata da 1 comanda le caselle 26, 38, 54, 12, 2, 14, 16 e 28 e la casella 64 comanda le 13, 43, 63, 55. Le caselle 13 e 14 essendo consecutive, ne segue che le caselle 64 · 63 .... 14 ; 1 · 2 · 3 .... 13 formano un percorso. Quindi sostituendo i numeri 1 · 2 · 3 .... 13 con 13 · 12 .... 1 si ottiene un percorso rientrante che copre la scacchiera e che è rappresentato dalla fig. 72.

Eulero dimostrò la possibilità di dedurre da un percorso rientrante qualsiasi, altri sette percorsi rientranti.

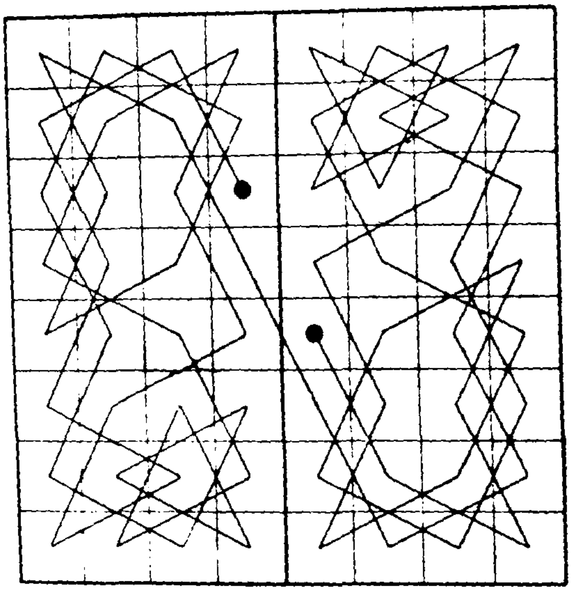


Fig. 73.

Si può anche far cominciare il percorso da una casella determinata e farlo terminare ad una casella pure determinata.

Altre modificazioni a questo suo metodo furono studiate da Eulero per adattarlo a casi comprendenti condizioni restrittive, quale ad esempio, il seguente nel quale le prime 32 mosse debbono effettuarsi senza invadere l'altra metà della scacchiera (fig. 73).

L'ordine delle 32 mosse può essere determinato col metodo d'Eulero. Aggiungendo 32 a ciascuno dei numeri iscritti nelle caselle percorse nelle prime 32 mosse, si ottiene una serie corrispondente di mosse da 33 a 64 che coprono l'altra metà della scacchiera. Ma generalmente, la 33 non è comandata dalla 32 quindi non dà il passo al cavallo, come pure la 64 non è comandata dalla 1.

Nondimeno Eulero dimostrò la possibilità di effettuare le prime 32 mosse in modo tale che facendo rotare di due angoli retti la metà della scacchiera contenente i movimenti da 32 a 64, i due percorsi non ne formano più che uno solo rientrante.

Se indichiamo con x ed y le coordinate di una casella qualsiasi rispetto a due lati consecutivi della scacchiera, possiamo chiamare complementare quella le cui distanze dai lati oppo-

f	a	e	g	f	a	e	g
e	g	f	a	e	g	f	a
a	f	g	e	a	f	g	e
g	e	a	f	g	e	a	f
f	a	e	g	f	a	e	g
e	g	f	a	e	g	f	a
a	f	g	e	a	f	g	e
g	e	a	f	g	e	a	f

Fig. 74.

sti sono rispettivamente uguali ad x e y. Così x ed y indicando la *colonna* e la *riga* d'una casella, le due caselle (x, y) e $(9 - x, 9 - y)$ saranno complementari. Quindi nella soluzione di Eulero, due numeri iscritti in due caselle complementari differiscono di 32. Così, ad esempio, la casella (7, 3) è complementare della (2, 6) occupate rispettivamente da 27 e $59 = 27 + 32$.

Il metodo di Eulero fu da lui dimostrato applicabile a scacchiere rettangole o a forma di croce.

La soluzione ideata da Collini nel 1773 è basata sull'uso esclusivo di percorsi simmetrici tracciati senza vincolo con la casella iniziale, ma riuniti in ultimo in modo da rendere possibile al cavallo di partire da tale casella. Questa soluzione servì di base ai metodi moderni fra i quali quello del Dr. Roget è uno dei migliori.

Si divide il percorso in quattro circuiti da potersi combinare in modo da permettere al cavallo di partire da una casella qualunque per arrivare ad altra casella qualunque, di diverso colore. Si ha dunque un percorso rientrante se si sceglie la casella d'arrivo fra quelle comandate dalla casella d'origine. La regola di Roget è applicabile solamente alle scacchiere di $(4\,n)^2$ caselle.

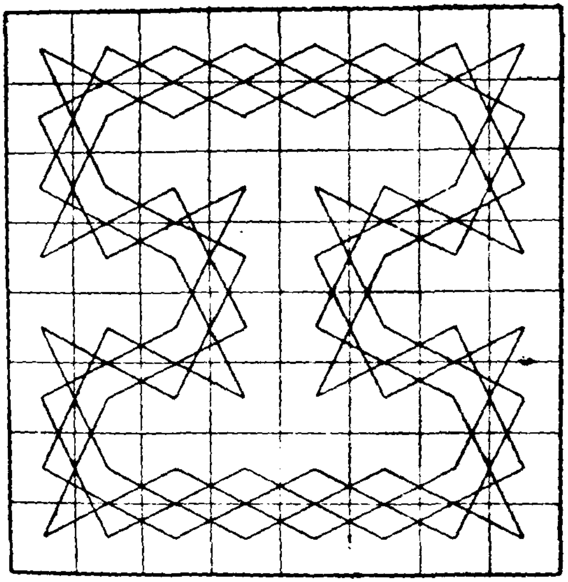


Fig. 75.

Nel caso della scacchiera comune di 64 caselle, si comincia col dividerla in quattro quadrati di 16 caselle ciascuno; ognuno di questi quadrati può a sua volta essere scomposto in quattro gruppi di quattro caselle ciascuno formanti un percorso di cavallo; nella fig. 74 le caselle dello stesso gruppo sono indicate con lettere uguali, due vocali e due consonanti. Le 16 caselle segnate con le stesse lettere possono essere disposte in modo da costituire un circuito a salto di cavallo. Se la scelta della casella finale non è fissata il percorso potrà essere rientrante, nel qual caso si potrà fare in modo che il percorso del cavallo in ciascun gruppo di quattro caselle omonime sia lo stesso; così, per esempio, nella fig. 75 tutti i gruppi che comprendono la lettera *f* sono disposti in modo da formare un circuito a salto di cavallo: così pure quelli corrispondenti alle lettere *g*, *a*, *e*.

Il problema consiste nel formare, coi quattro circuiti, un percorso di salto di cavallo da una casella data ad altra pure data (ma di diverso colore) coprendo tutta la scacchiera.

Si può risolverlo seguendo queste regole:

1.° Se le caselle di partenza e d'arrivo sono designate l'una con una consonante e l'altra con una vocale, si seguono alternatamente circuiti rappresentati da consonanti e da vocali,

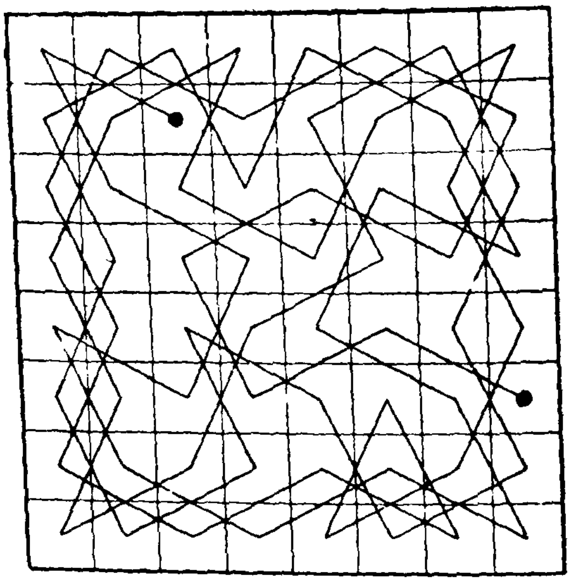


Fig. 76.

cominciando da quello di 16 caselle contraddistinto con la lettera della casella iniziale e terminando con quello contraddistinto con la lettera della casella finale.

La fig. 76 dà un esempio di tale soluzione.

2.° Se entrambe le caselle di partenza e d'arrivo sono designate con vocali o consonanti, si sceglie dapprima una casella *M* che appartenga allo stesso circuito della casella finale *Z* e ad un movimento di distanza di questa casella; si sceglie poi una casella *N* appartenente a specie differente da quella della casella *Z* e a un movimento di distanza di *M*, doppia operazione che è sempre possibile. Lasciando allora in disparte le due caselle *Z* ed *M* si può, seguendo la regola già indicata, passare dalla casella iniziale alla *N* in 62 tratti e da *N* a *Z* in due.

Bisogna però evitare che nei primi tre circuiti il percorso non termini nè ad una casella d'angolo nè, possibilmente, ad una di perimetro. È pure preferibile, tenendo calcolo di tali indicazioni, di seguire percorsi rientranti e di prendere ciascuno di essi o ciascuno dei gruppi di quattro caselle, nello stesso senso di rotazione.

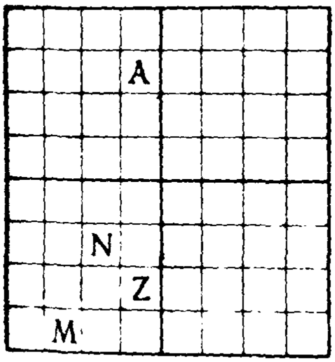


Fig. 77.

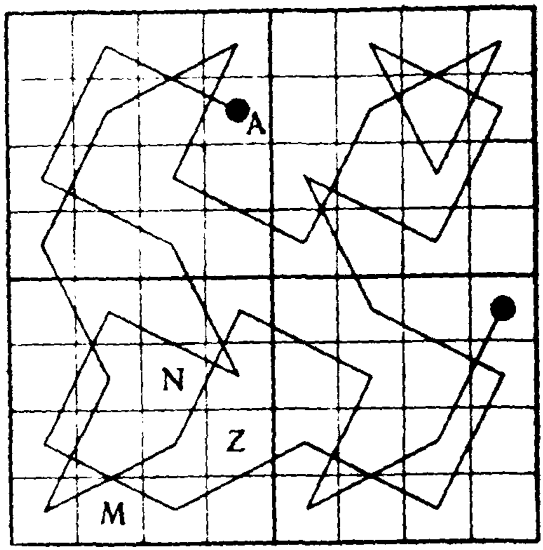


Fig. 78.

Nella fig. 77 sono indicate con *A* la casella di partenza, con *Z* quella d'arrivo, ecc.

La fig. 78 indica una delle soluzioni possibili.

Quanto al numero dei possibili percorsi tra due caselle prestabilite non fu precisato finora in modo assoluto, ma si trovò che è più grande di 31054144 e minore del numero delle combinazioni di 168 oggetti presi 63 alla volta, il primo numero è quello dei percorsi rientranti d'uno speciale tipo.

Le fig. 79-80-81 rappresentano vari modi di percorrere a salto di cavallo tutte le caselle d'una scacchiera di 3×4 quadrelli.

Le fig. 82 e 83 rappresentano percorsi analoghi su due croci, dovuti ad Eulero.

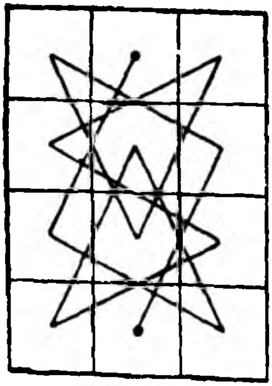


Fig. 79.

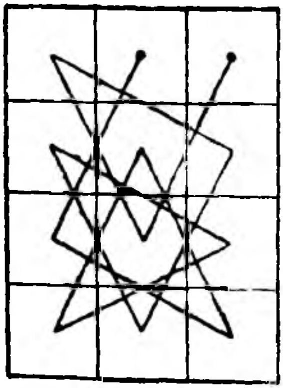


Fig. 80.

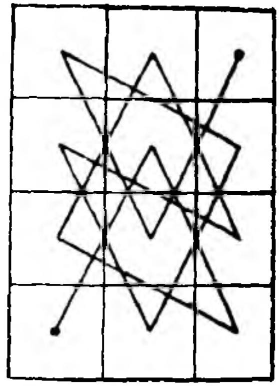


Fig. 81.

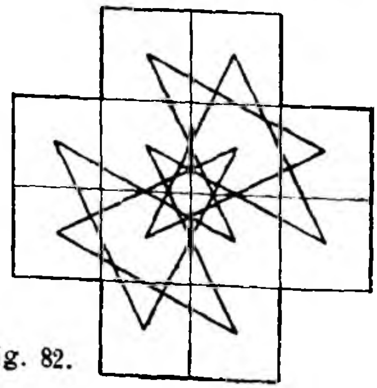


Fig. 82.

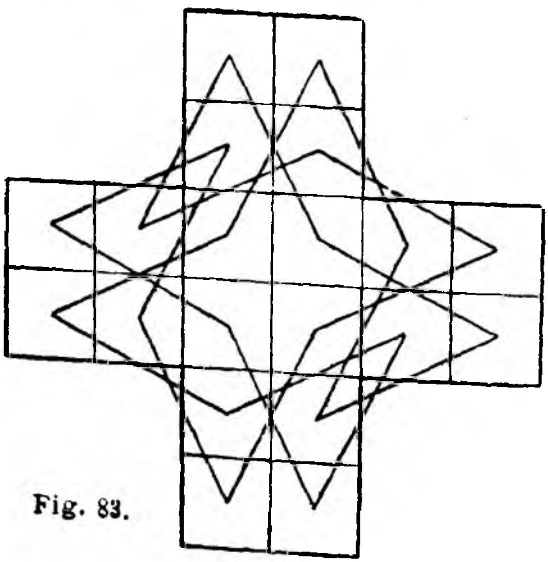


Fig. 83.

Problemi delle Torri e degli Alfieri.

Come si ha un problema delle otto Regine, ce ne possiamo proporre uno delle otto Torri ed uno degli otto Alfieri; da questi due si potrà poi dedurre la soluzione del primo poichè i movimenti della Regina non sono che quelli della Torre e dell'Alfiere combinati.

Torri.

Si riduce a trovare le *permutazioni* degli otto primi numeri naturali, che sono:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = 40320$$

Alfieri.

Questo problema e più complesso poichè se ne possono collocare fino a 14 sulla scacchiera senza che siano in presa l'uno coll'altro, cioè per esempio, otto nella prima colonna e sei nell'ultima, sopprimendo le due caselle estreme.

ARITMETICA

SUI NUMERI

Gli animali calcolatori.

Come si può accertarsi che un dato animale sappia contare fino ad un certo numero?

Leroy procedette in questo modo per i corvi. Egli aveva notato che essi non fanno ritorno al loro nido fino a che qualche persona vi rimane vicino.

Fatta dunque costruire una capanna in prossimità d'un nido di corvi, Leroy vi mandò un uomo e constatò difatti che i corvi non tornavano al nido fino a che l'uomo non fosse uscito dalla capanna per allontanarsi. Il giorno dopo egli vi mandò due uomini; ne fece uscire uno solo, e i corvi non tornarono al nido; lo fecero solamente dopo aver veduto uscire anche il secondo; e così accadde con tre fino a cinque uomini; con sei uomini i corvi cominciarono a confondersi; sembra quindi che essi possano contare fino a cinque.

Uno scimpanzè del giardino zoologico di Londra sapeva contare fino a cinque; infatti portava a chi ne lo richiedeva un numero di fuscelli di paglia del suo giaciglio corrispondente al numero pronunziato.

Con le galline venne fatta quest'altra prova. Su di un cartone vennero incollati dei chicchi *c* di frumento alternati con chicchi liberi *l* nei modi seguenti, progressivamente:

l c l c l c l c l . . . . .

l c c l c c l c c l c c l . . . . .

l c c c l c c c l c c c l . . . . .

Nel primo caso la gallina imparò ben presto come fosse inutile occuparsi dei chicchi N.° 2 · 4 · 6 · · · ·, vale a dire becco solamente quelli d'ordine dispari; sapeva dunque contare per *uno*. Nel secondo caso imparò a beccare un chicco ogni due e così fino al quattro · · · · · ma poi dovette procedere a tentoni. Del resto non è poco per una gallina · · · · come si vedrà nel § seguente.

La numerazione dei selvaggi.

I selvaggi, per quanto bassi nella scala etnologica, contano tutti sulle dita entro limiti più o meno estesi.

Ecco ad esempio la maniera di contare dei selvaggi australiani:

1	*uno*
2	*due*
3	*tre*
4	*due e due*
5	*metà delle dita*
6	*cinque e uno*
7	*cinque e due*
15	*le due mani e metà dei piedi.*

Degli Zulù:

5	*metà delle mani*
6	*prendere il pollice.*
21	*uno sulla mano d'un altro uomo.*

In sostanza il sistema *decimale* deve essere stato il primo ad usarsi come quello che si presenta naturale, e noi lo abbiamo adottato, si può dire, per atavismo, sebbene non sia comodo come lo sarebbero quelli a base di 6, 12 o 24.

Il modo di contare dei Bengalesi, che godono riputazione di esperti calcolatori, è basato sul fatto che ciascun dito (meno il pollice) contiene tre giunture ed una estremità; essi contano fino a 16 con le dita d'una sola mano. Essi contano toccando successivamente ciascuna giuntura coll'estremità del pollice della stessa mano, partendo da quella inferiore del mignolo e passando ordinatamente alle successive. Con la lunga pratica essi sanno, per es., che la punta dell'anulare corrisponde all'8, la base dell'indice al 13 ecc., per cui il loro calcolo riesce assai rapido, Forse questa maniera di contare deriva dall'uso della numerazione binaria che esisteva in Cina più di 3000 anni prima dell'Era Cristiana.

In Siria e in Palestina è ancora oggi in uso un'altra maniera di calcolo digitale. Immaginiamo di conoscere i prodotti della Tavola-pitagorica fino al 25 e non oltre. Quando si tratta di fare il prodotto d'un numero minore di 5 od uguale a 5 per uno maggiore di 5 che possiamo indicare con $5 + m$, si dovrà fare una moltiplicazione per 5 ed un'altra per m e addizionare i due prodotti. Ma quando i due fattori sono maggiori di 5 ecco come si calcola in Palestina. La mano aperta, con le dita ravvicinate rappresenta il *cinque:* abbassando il mignolo si ha il *sei;* abbassando l'anulare e il mignolo si ha il *sette;* si abbassano tre dita per avere l'*otto* e quattro per il *nove*. Si rappresentano i due fattori con le due mani e si fa la moltiplicazione con questa regola:

1.° Addizionare le dita abbassate e contarle come decine.

2.° Moltiplicare le dita alzate e aggiungere il prodotto contato come unità al numero delle decine già ottenuto.

Per esempio vogliasi moltiplicare:

sette	due dita abbassate e tre alzate
per *nove*	quattro dita abbassate e uno alzato

Fatto ciò:

1.° quattro e due dita abbassate	60
2.° uno per tre dita alzate . . .	3
	63

Si potrà scrivere in generale, per due numeri qualunque a e b:

$$(5 + a)(5 + b) = 10(a + b) + (5 - a)(5 - b)$$

identità che contiene la giustificazione del procedimento indicato.

I grandi numeri.

Gli esponenti ci permettono di esprimere, nel più semplice modo, numeri d'una grandezza senza limiti; ma, oltre un termine assai ristretto, la nostra mente non riesce più a formarsi un concetto esatto del significato del numero così rappresentato.

Dal selvaggio australiano che comincia a confondersi quando deve esprimere un numero superiore al venti e non sa più dire altro che *molti*, salendo per gradi si può arrivare ad un insigne matematico che saprà formarsi un certo concetto di numeri straordinariamente grandi; ma tale concetto sarà necessariamente tanto più nebbioso, confuso, quanto più ci allontaneremo da quei numeri che siamo soliti ad assumere come termini di confronto, come *unità* per passare ad unità d'ordine superiore.

Così, ad esempio, l'unità *anno di luce* adottata in astronomia potrà fornire all'astronomo una tal quale idea della distanza d'una stella da noi, ma per il profano costituisce qualche cosa di così vago, di così indeterminato da perdere interamente il significato di *misura* e da confondersi col *molto* dell'australiano. Le onde luminose percorrono in cifra tonda 300 mila chilometri al minuto secondo..... e che distanza è quella che la luce impiega un anno a percorrere con tale velocità?

Il miliardo presenta già qualche difficoltà in tal senso e molte persone. anche colte, leggeranno con sorpresa i numeri seguenti.

Immaginiamo il miliardo di lire, in oro (pezze da 20). Il suo peso sarebbe di 322,580 chilogrammi, con un volume corrispondente a circa 17000 litri.

Le monete, disposte una di seguito all'altra, a contatto, occuperebbero 1050 km. in linea retta, e ammonticchiate ci darebbero una pila di 33000 metri, ossia circa 8 volte il Monte-Bianco.

Seimila uomini occorrerebbero, per sollevare l'enorme blocco d'oro!

E un fonditore potrebbe foggiare con esso 22 statue umane di grandezza naturale.

In biglietti da 1000 lire il miliardo formerebbe 2000 volumi di 500 fogli (mille pagine) ciascuno.....

Possiamo ora ricordare alcune *curiosità* relative a grandi numeri dovute a varii matematici (Bernouilli, Legendre, Euler, Thoman, ecc.).

Il massimo numero esprimibile con tre cifre è (1):

$$9^{9^{9}}$$

---

(1) Si noti bene che questa espressione non devesi confondere con 9^{81}; essa rappresenta invece $9^{(9^9)}$ ma questa parentesi dell'esponente non è necessaria perchè l'esponente 81 non potrebbe scriversi 9^9 bensì 9×9.

ed è composto di 369693100 cifre. Scritto con carattere comune, sopra una sola riga avrebbe la lunghezza di 924 chilometri stampato con cifre di questa dimensione (11 cifre in un centim.) misurerebbe circa 336 chilometri.

E per scrivere il numero 9^{9^9} con 10 ore di lavoro al giorno (anno di 365 giorni di lavoro), in ragione di una cifra al minuto secondo, occorrerebbero 28 anni e 48 giorni. La prima cifra di questo numero è 4 e l'ultima, 9; magro conforto rispetto alla ignoranza in cui vi lascio circa le altre 369693098!

Il numero $10^{10^{10}}$ scritto con cifre larghe 4 m/m richiederebbe una striscia di carta lunga quanto la circonferenza dell'equatore terrestre.

Il prodotto dei 100000 primi numeri interi è un numero di 456572 cifre.

Il numero 30! ha trentatrè cifre; $(10^n)!$ ne ha circa $n\,10^n$.

Il numero $2^{2^{36}}$ ha più di venti milioni di cifre.

La somma delle decime potenze dei primi 1000 numeri interi è un numero di 32 cifre.

I più piccoli numeri interi che soddisfano alla relazione:

$$x^2 = 991\, y^2 + 1$$

hanno trenta cifre ciascuno.

Le più piccole soluzioni delle equazioni

$$x^2 = 1549\, y^2 + 1 \qquad \text{e} \qquad x^2 = 1621\, y^2 + 1$$

hanno rispettivamente 72 e 75 cifre (1).

Il venticinquesimo termine della serie 2 · 4 · 16 · 256 · · · · nella quale ciascun termine è il quadrato del precedente, ha 5050446 cifre.

Sarà facile riscontrare quanto sia rapido l'accrescimento nella serie di numeri così costituiti:

$$2^2 = a \qquad a^a = b \qquad b^b = c \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Il più piccolo numero che ammetta 100 divisori ha 31 cifre e la sua 66^{ma} potenza moltiplicata per la quarta d'un altro di nove cifre darebbe il più piccolo numero avente un milione di divisori.

Il numero 2^{64} ha venti cifre; in generale 2^n ha circa $\frac{1}{3}\, n$ cifre.

---

(1) Questi dati li dobbiamo alla cortesia del matematico francese prof. A. Aubry.

Per ottenere 2^{64}, si ha $2^{10} = 1024$ e si trova:

$$1024 = n$$

$$1024000 = 1000\,n$$

$$20480 = 20\,n = n'$$

$$4096 = \frac{2}{10}\,n'$$

$$2^{20} = 1048576$$

Per ottenere 2^{30} farò:

$$2^{20} = n \qquad 20\,n = n' \qquad \text{allora} \qquad 2^{30} = 10^3\,n + n' + \frac{1}{5}\,n'$$

Con questo calcolo rapidissimo fino a 2^{60} si trova, dopo moltiplicato per 2^4, il numero: 18446744073709551616.

Tre problemi di Ozanam.

I. — *In quanti modi otto chierici possono cambiare di posto in coro, così da trovarvisi disposti in modo sempre diverso?*

La risposta di Ozanam è: 40320. E aggiunge che se detti spostamenti si facessero tre volte al giorno (a Mattutino, alla Messa e ai Vespri) occorrerebbero 13440 giorni ossia quasi 37 anni per averli tutti esauriti.

II. — *I dodici Apostoli avendo disputato chi di essi fosse il primo, Gesù dichiarò loro che colui che avrebbe voluto essere il primo sarebbe l'ultimo e che l'ultimo diverrebbe il primo. Supponiamo che, dopo tale lezione d'umiltà, ognuno volesse cedere il primo posto, il secondo e il terzo al proprio compagno, e che avessero così stabilito di non trovarsi mai insieme in una medesima disposizione, si domanda in quanti modi avrebbero potuto cambiare di posto.*

La risposta di Ozanam è: 479001600. Se si suppone che gli altri undici Apostoli avessero sempre avuto riguardo di lasciare il primo posto a S. Pietro, avrebbero potuto cambiare di posto in 39916800 maniere differenti.

III. — *La virtù prolifica della troia.*

Chi crederà che le rendite del *Gran Signore* non sarebbero capaci di nutrire per 12 anni la discendenza d'una troia, che avesse figliato 2 maschi e 4 femmine? Eppure è la verità, anche nella supposizione che la discendenza si produca sempre nei medesimi termini, cioè 2 maschi e 4 femmine per 12 anni.

Ozanam dà come soluzione, cioè come numero totale dei maiali nel periodo di tempo indicato: 33554230 mentre esso è 33554430 o 33554431 con la troia capostipite.

La soluzione si ottiene addizionando le somme dei 12 termini delle due progressioni geometriche, per i maschi e per le femmine:

$$2 \cdot 8 \cdot 32 \cdot 128 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$4 \cdot 16 \cdot 64 \cdot 256 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

ossia:

$$11184810 + 22369620 = 33554430$$

Diversi.

I. — *In quanti modi si possono disporre 12 sbarre uguali, diversamente colorate, per formarne l'ossatura d'un cubo?*

La risposta è: 19.958,400.

II. — *In quanti modi si possono distribuire le 52 carte al gioco di Whist?*

Risposta: 53.644.737.765.488.792.839.237.440.000, come risulta dalla formola:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 52}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 13)^4}$$

III. — *In quanti modi è possibile disporre i 28 pezzi del domino secondo la regola del gioco?*

Questo problema fu risolto dal Dr. Reiss di Francoforte s/M e la soluzione fu pubblicata, dopo la sua morte, negli Annali di matematica, a Milano, nel 1871.

Ne daremo soltanto il risultato finale facendo notare che in esso sono computate come soluzioni distinte le disposizioni rettilinee uguali da destra a sinistra e da sinistra a destra:

$$7.959.229.931.520 = 2^{13} \,.\, 2^{8} \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 4231$$

sicchè le disposizioni veramente *differenti* sarebbero solamente la metà, ossia:

3.979.614.965.760

Un accordo di lunga durata.

Otto banchettanti, nella piena dell'entusiasmo per l'ottima riuscita dell'amichevole simposio, stabiliscono di ripeterlo ogni giorno, fino ad aver esaurito tutte le possibili maniere di disporsi a tavola gli uni rispetto agli altri. Affidato però il calcolo ad un matematico, risultava che i giorni di banchetto avrebbero dovuto essere nientemeno che $1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 = 5040$ corrispondenti a quasi 14 anni! .....

E notisi che in tale calcolo si considera che ciascuna persona abbia da occupare posizione diversa, *rispetto alle altre*, come vedesi della seguente figura, relativa a 4 soli commensali:

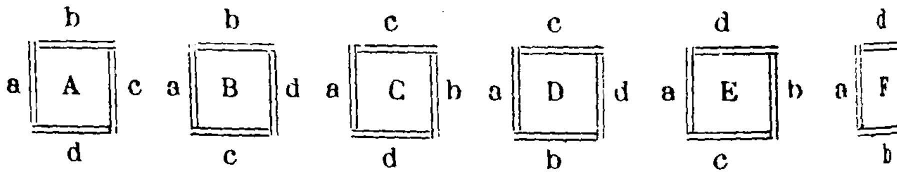


Fig. 84.

Che se poi si volesse proprio che ognuno dei banchettanti dovesse occupare tutte le possibili posizioni *anche rispetto ai lati della tavola*, si avrebbero, per la sola disposizione *A* della fig. 85 queste quattro varianti:

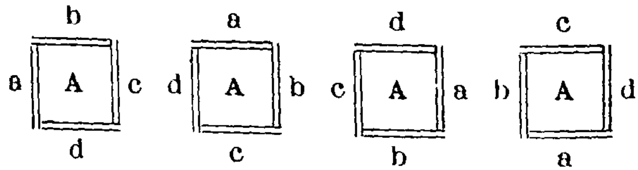


Fig. 85.

e gli 8 amici dovrebbero in tal caso fare $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40,320$ pranzi, il che durerebbe ben 110 anni e mezzo!

Nel caso di 12 banchettanti si avrebbe $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots 12 = 479001600$!

Le 21 lettere dell'alfabeto.

Il calcolo del numero di parole *possibili* ad ottenersi con la combinazione delle 21 lettere dell'alfabeto, non è facile, dovendosi tener calcolo delle ripetizioni ammissibili e delle combinazioni compatibili con la pronunzia.

Si può essere però certi che non occorrerà mai d'introdurre nuove lettere nell'alfabeto per foggiare neologismi. Eppure, con tanta varietà possibile, abbiamo (e i francesi ci superano d'assai in questo) un buon numero di vocaboli a significato multiplo, come *oste*, *senso*, *verso*, ecc.

Archimede e la Leva.

Si dice che Archimede affermasse in presenza di Gerione tiranno di Siracusa, che gli sarebbe stato possibile sollevare il mondo qualora gli si fosse dato un punto d'appoggio.

Le parole d'Archimede sarebbero state queste: Dammi ove posi, e la Terra solleverò; tali almeno sono quelle citate da Pappo nei suoi capitoli sulla meccanica.

Si può *arzigogolare* sull'argomento.

Montucla calcolò il peso della Terra e considerando di kg. 15 per secondo il lavoro giornaliero d'un uomo (valore assai elevato) trovò che occorrerebbero circa *tre miliardi di secoli*, cioè 3×10^4 anni, per sollevare di tre centimetri la massa terrestre.

Per ispostarla su di un piano orizzontale occorrerebbero 74000 secoli.

Ammesso che la Terra sia un elissoide di rivoluzione con gli assi di metri 12754796 o 12712160, il suo volume sarà:

$$\frac{4}{3}\pi \times \frac{12754796}{2} \times \frac{12712160^2}{4} = \text{m. c. } 1079224648425{,}130163855$$

Essendo poi la densità media della Terra 5,5, il suo peso risulta di:

kg. 5.935.735.566.338.215.901.202.500

che, per semplicità di calcolo, consideremo come espresso da:

$$5935 \times 10^{21}$$

Immaginiamo ora che il punto d'appoggio della leva sia solamente ad 1 metro dalla Terra e attribuiamo ad Archimede la forza media d'un uomo, kg. 75; se x è il braccio di leva alla cui estremità egli deve agire, si avrà:

$$x = \frac{1 \times 5935 \times 10^{21}}{75} = \text{m. } 79.133.333.333.333.333.333.333$$

La distanza del Sole dalla Terra essendo di m. 153.491.215.064, si trova che x vale 515 miliardi di volte tale distanza.

Se poi Archimede avesse voluto spostare la Terra d'un solo millimetro avrebbe dovuto spostare l'estremità del braccio di leva di 79.133.333.333.333.333 chilometri.

La richiesta di Sissa-Nassir, l'inventore degli scacchi, e i grani di sabbia di Archimede.

Narrasi che *Sissa* (detto anche *Nassir*), sapiente indiano, inventò il gioco degli Scacchi per diletto ed istruzione di un principe, il quale tanto se ne compiacque e lo ammirò, che, in premio dell'ingegnoso trovato, si disse pronto a dargli quella ricompensa, *per quanto grande fosse*, che l'inventore gli chiedesse. L'indiano rispose prontamente che si sarebbe contentato di avere un chicco di grano per la prima casella della scacchiera, due per la seconda, quattro per la terza e così continuando i raddoppiamenti fino alla 64ª. Sogghignò il fastoso principe nel sentirsi chiedere un premio che gli parve tanto modesto e ordinò che fosse dato senz'altro; ma dovette rimanere poi sbalordito quando, fatti i conti, il suo ministro del tesoro ebbe ad annunziargli come, per soddisfare quella domanda, non potessero bastare i magazzini di tutto il mondo allora conosciuto, e come, volendo pagare il valore del grano, occorresse una somma equivalente a molti miliardi delle nostre lire. Non solo la potenza, ma la stessa immaginativa dell'oriental signore era così di gran lunga superata. La leggenda non aggiunge che cosa egli facesse allora.

Il numero dei chicchi si può ottenere facilmente facendo la somma delle potenze di 2 dallo zero al 63 che è data da $2^{64}-1$ cui corrisponde il numero:

18.446 744.073.709.551.615

Per soddisfare col raccolto d'una annata la richiesta di Sessa sarebbe occorsa una Terra di superficie ottupla di quella della nostra, supponendola *tutta quanta* coltivata a frumento; infatti, supponendo che un metro cubo contenga 20 milioni di chicchi di frumento (ossia 20 per cm³.), si avrebbero:

922.337.203.685 metri cubici.

A proposito di progressioni *geometriche* riferirò qualche cosa di ciò che ne diceva Archimede, che ne ha dato la teoria insieme a quella delle *aritmetiche*, nel libro immortale «l'*Arenaria*» nel quale egli intravvede già la numerazione decimale. Egli scriveva al re di Siracusa: «Molti pensano, o re Gerione, «che il numero dei grani di sabbia sia infinito; non solo di «quella che si trova presso Siracusa e su tutta la Sicilia, ma «di quella ancora che è sparsa per tutte le parti della Terra, «abitate e disabitate. Altri, benchè non considerino tale nu«mero come infinito, pensano che non esiste grandezza, che «non si può esprimere il nome d'una grandezza, che ecceda la «molteplicità di tali grani. Da ciò risulta ad evidenza che le «persone di tale opinione, quando pure immaginassero un muc«chio di sabbia capace di riempire e di livellare tutte le pro«fondità del mare e tutte le cavità della Terra sino alle vette «delle più alte montagne, sosterrebbero ugualmente non essere «possibile assegnare un numero superiore ai grani di un tal «mucchio. Ma io proverò ora di far vedere il contrario con di«mostrazioni irrecusabili, per mezzo delle quali tu potrai rico«noscere che taluni dei numeri da me indicati nei miei libri a «Zeuxippo (1) sorpassano non solamente il numero dei grani di «sabbia che possono riempire tutta la Terra, ma ancora la «massa di sabbia uguale al volume di tutto l'Universo».

Archimede intendeva per Universo la sfera dei pianeti, ossia il sistema solare. Con osservazioni nelle quali rifulge il suo genio, egli calcolò il diametro di tale sfera trovandolo minore di 10 milioni di stadii (180 mila miriametri) il che corrisponde con sufficiente approssimazione alla distanza tra il Sole e Saturno.

Il sommo geometra trovò pure che un seme di papavero ha, in media, diametro minore d'un quarantesimo di *dito* (468/1000 di millimetro) e che il volume di questo granellino equivale a quello di 10000 granellini di sabbia. Dimostrato che le sfere stanno fra loro come i cubi dei loro diametri, egli ottenne il rapporto fra i volumi della sfera solare e del seme di papavero; moltiplicando tale rapporto per 10000 ne dedusse il numero dei grani di sabbia che riempirebbero tutto lo spazio planetario, ed ecco in qual modo cercò di esprimerlo. Presso i Greci era in uso la numerazione decimale parlata con le denominazioni: unità, decina, centinaio, migliaio e miriade; si esprimevano le unità successive dicendo: dieci miriadi, cento miriadi, mille miriadi, miriadi di miriadi, ecc., ripetendo sempre gli stessi vocaboli. Essi ignoravano i miliardi.

(1) Libri disgraziatamente perduti.

Archimede considerò la progressione decimale, ma senza far uso nè dello zero nè degli esponenti:

$1 \cdot 10^1 \cdot 10^2 \cdot 10^3 \ldots\ldots 10^8 \cdot 10^9 \ldots\ldots 10^{16} \cdot 10^{17} \ldots\ldots$

e chiamò *ottade* l'insieme di otto termini consecutivi. Gli risultò che il numero dei grani di sabbia di cui sopra è minore dell'ultimo termine dell'ottava ottade (10^{63}) ossia dell'unità seguita da 63 zeri. Egli conclude: « Io so bene, o re Gerione, che « questi risultati sembreranno incredibili al volgo, a tutti co- « loro che non hanno pratica delle scenze matematiche; ma « ciò sembrerà abbastanza credibile, stante le prove, a coloro « che vi sono esercitati e che hanno fatto delle ricerche sulle « distanze dei corpi celesti, sulla grandezza della Terra, del « Sole, della Luna e dell'Universo intero; gli è perciò che ho « creduto conveniente consacrare a tale oggetto alcune medi- « tazioni » (1).

Il centesimo ad interesse composto.

È dovuta ad Archimede l'osservazione che i termini d'una progressione geometrica la cui ragione supera l'unità d'una quantità piccola quanto si vuole possono superare i termini corrispondenti di una progressione aritmetica di ragione grande quanto si voglia.

Supponiamo che al principio dell'Era Cristiana sia stato impiegato un centesimo ad interesse composto, al tasso del 5% all'anno; capitalizzando anche gli interessi a quale somma ammonterebbe ora quel misero capitale iniziale? Il calcolo consiste nel trovare il 1910mo termine di una progressione geometrica che comincia con L. 0,01 e la cui ragione è 1,05.

Si trova un numero composto di 38 cifre. . . . . trascurando i decimali. Vediamo di formarci in qualche modo un'idea del valore enorme che esso rappresenterebbe. Assumeremo una unità adeguata . . . . . cioè una *Terra* d'oro massiccio. Se una sfera di tal genere avesse cominciato a cadere ad ogni minuto, dalla nascita di Cristo fino ad ora, dovrebbe continuare a cadere ancora per *tre secoli* per riuscire ad uguagliare il

(1) È pure dovuta ad Archimede l'osservazione che il prodotto di due termini d'una progressione geometrica il cui primo termine è l'unità si ottiene sommando i posti che occupano a partire dall'unità, osservazione che è la base della teoria dei logaritmi, nati duemila anni dipoi.

valore odierno dell'umile centesimo capitalizzato, perchè di sfere d'oro di quella mole ne occorrerebbero più d'un miliardo!

Il lettore ci sarà grato d'avergli indicato un mezzo semplicissimo per diventare un Re all'americana, sia pure, accontentandosi del modesto tasso delle nostre banche, e. . . . chi ha tempo non aspetti tempo.

Le moderate protese di Nureddin.

Nureddin era un povero diavolo, indiano, che a tempo perso si occupava di calcoli matematici e cabalistici. Avendo il Mahrajah di Bassora voluto tenerlo presso di sè, gli chiese quale stipendio avrebbe dovuto corrispondergli e Nureddin dichiarò di accontentarsi di una piccola moneta del valore di circa un centesimo pel primo giorno, del doppio il secondo giorno e così via sino alla fine del mese; ricominciando ad ogni primo del mese con un centesimo, ecc.

Accettate queste condizioni il tesoriere del Mahrajah dovette fare rispettosamente osservare al suo signore, alla chiusura dei conti del primo mese, di 31 giorni, d'aver già dovuto pagare o Nureddin la bella sommetta di centesimi:

2.147.483.647

pari a lire italiane:

21.474.836,47

e dalle Cronache di Bassora risulta che Nureddin rimase in servizio del suo Mahrajah precisamente 31 giorni, avendogli questi dichiarato d'essere stato da lui servito abbastanza bene in quel breve tempo!

Se il Mahrajah avesse saputo fare questo piccolo calcolo:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + 2^{30} = 2^{31} - 1$$

avrebbe certamente rifiutato la firma del contratto e non avrebbe fatto la brutta figura di rescinderlo d'autorità.

Un po' di roulette.

Consideriamo una *serie* di 25 numeri rossi alla *roulette* di Montecarlo. In media si giocano colà 500 colpi al giorno per ciascuna roulette ossia 180000 all'anno.

La probabilità che si abbia una serie di 25 rossi è di $1 : 2^{25}$, ossia di:

$$1 : 33.554.432$$

Essa non dovrebbe dunque prodursi, normalmente, che una volta su 33.554.432 colpi, ossia una volta in 177 anni.

La probabilità che si produca una serie di 500 rossi, ad es., è data da una frazione, di numeratore 1, col denominatore superiore all'unità seguita da 150 zeri.

Supponendo che il globo terrestre non sia che una vasta casa di gioco, nella quale la superficie dei mari e dei continenti fosse sostituita da altrettanti tavoli di gioco di roulette disposti accanto gli uni agli altri, in ragione di 2000 per km.^{2} e che vi si giocasse, non per sole 12 ore sulle 24, ma giorno e notte, continuamente, in ragione di 1000 colpi al giorno, e che il gioco avesse durato per 60 secoli, non si avrebbero per questi 9.830.400.000.000 di tavoli da gioco che un numero totale di colpi raggiungente appena la cifra 2 seguita da 23 zeri, che è inferiore a 2^{78}. Per quanto fantastica possa essere una simile partita, essa sarebbe ancora normalmente insufficiente perchè avesse mai potuto dar luogo all'apparizione d'una serie di 78 rossi.

In un *miliardo di secoli* il numero totale dei colpi non eccede il numero 354 seguito da 27 zeri.

Se la partita durasse da un miliardo di secoli non solo sul nostro pianeta, ma sopra un miliardo di pianeti simili, non si arriverebbe ancora che ad un numero di colpi corrispondente a 354 seguito da 36 zeri, che è inferiore a 2^{129}, cioè non avrebbe dato luogo alla produzione di una serie di 129 rossi!

A quali iperboliche ipotesi si dovrebbe dunque ricorrere per avere la probabilità della *sortita* d'una serie di 500 o di 1000 rossi?!

Un po' di atomi.

Nel *Bulletin des anciens élèves de l'École de physique et de chimie* (*1913*) Boll così si esprime intorno al numero degli atomi in un millimetro cubico di idrogeno, numero che si è calcolato con sufficiente precisione scientifica, cioè con risultati poco differenti, basandosi su fenomeni assai diversi, quali: viscosità dei gas, movimenti browniani, colore azzurro del cielo, vita del radio:

« Se si cerca di contare detto numero di atomi, e se ne separano mentalmente, col pensiero, *un miliardo per secondo*, questa operazione durerebbe *più di dieci secoli!* ».

Numerazione binaria.

In questa numerazione la *base* è il numero *due* e si possono scrivere tutti i numeri con le cifre 1 e 0, adottando questa sola convenzione, analoga a quella del sistema decimale, che ogni cifra posta immediatamente a sinistra rappresenta unità *due* volte maggiori. Ecco il modo di scrivere i numeri nella numerazione binaria:

1	1	9	1001	17	10001	25	11001
2	10	10	1010	18	10010	26	11010
3	11	11	1011	19	10011	27	11011
4	100	12	1100	20	10100	28	11100
5	101	13	1101	21	10101	29	11101
6	110	14	1110	22	10110	30	11110
7	111	15	1111	23	10111	31	11111
8	1000	16	10000	24	11000	32	100000

È facile continuare quanto si voglia questo quadro; si vede subito che un numero qualunque può essere ottenuto dall'addizione dei numeri 1 - 2 - 4 - 16 - 32 che rappresentano, con l'unità in più, tutte le potenze di 2.

In altri termini, un numero intero qualunque è una somma di potenze di 2, tutte diverse, ammettendo l'unità come potenza di *esponente zero*.

Un modo pratico di rappresentare i numeri nella numerazione binaria lo abbiamo nelle tavolette che qui riproduciamo:

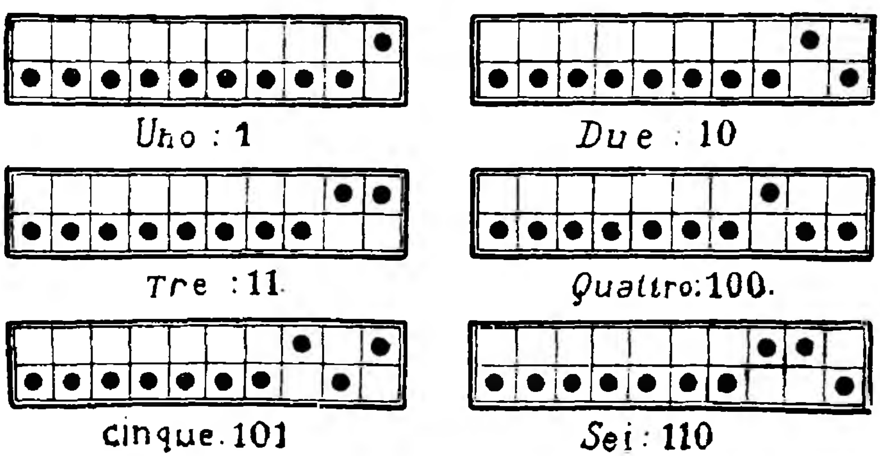


Fig. 86.

Le tavolette misteriose.

Trattando della numerazione *binaria* abbiamo dato un quadretto dei primi 32 numeri interi scritti su tale base (v. pag. 103).

Scriviamo ora gli uni sotto gli altri in una prima colonna a destra tutti i numeri tali che la loro ultima cifra nel sistema binario sia l'unità; scriviamo in una seconda colonna tutti i numeri tali che la loro seconda cifra, a partire da destra, nel sistema-binario sia l'unità; in una terza colonna tutti i nunumeri tali che la loro terza cifra, a partire da destra, sia l'unità e così di seguito. Potremo fermarci ad una colonna qualsiasi, per esempio, alla *quinta*; i numeri scritti saranno in tal caso 31 e, in generale, per n^a colonna saranno $2^n - 1$.

5	4	3	2	1
16	8	4	2	1
17	9	5	3	3
18	10	6	6	5
19	11	7	7	7
20	12	12	10	9
21	13	13	11	11
22	14	14	14	13
23	15	15	15	15
24	24	20	18	17
25	25	21	19	19
26	26	22	22	21
27	27	23	23	23
28	28	28	26	25
29	29	29	27	27
30	30	30	30	29
31	31	31	31	31
16	8	4	2	1

Si potrà proporre ad una persona di pensare un numero dall'1 al 31 e di indicare in quali colonne esso sia scritto. S'indovinerà facilmente il numero pensato scrivendo di seguito, da destra a sinistra, 1 per ciascuna delle colonne in cui il numero pensato si trova scritto e zero per le altre; si avrà così il numero pensato, scritto nel sistema di numerazione binario.

Ma si semplifica il calcolo scrivendo in calce a ciascuna colonna le potenze corrispondenti del 2. Per indovinare il numero basterà sommare le potenze di 2 scritte in calce alle colonne nelle quali si trova il numero pensato.

Si può rendere più complesso il gioco con numero maggiore di colonne o ricorrendo alle potenze di 3.

Naturalmente, si può dare al gioco maggiore estensione, come p. es., con le tabelle seguenti, o con altre comprendenti potenze pari del 2, di grado superiore:

32	16	8	4	2	1
33	17	9	5	3	3
34	18	10	6	6	5
35	19	11	7	7	7
36	20	12	12	10	9
37	21	13	13	11	11
38	22	14	14	14	13
39	23	15	15	15	15
40	24	24	20	18	17
41	25	25	21	19	19
42	26	26	22	22	21
43	27	27	23	23	23
44	28	28	28	26	25
45	29	29	29	27	27
46	30	30	30	30	29
47	31	31	31	31	31
48	48	40	36	34	33
49	49	41	37	35	35
50	50	42	38	38	37
51	51	43	39	39	39
52	52	44	44	42	41
53	53	45	45	43	43
54	54	46	46	46	45
55	55	47	47	47	47
56	56	56	52	50	49
57	57	57	53	51	51
58	58	58	54	54	53
59	59	59	55	55	55
60	60	60	60	58	57
61	61	61	61	59	59
62	62	62	62	62	61
63	63	63	63	63	63

Come è facile vedere, queste tabelle si possono costruire indipendentemente dalla considerazione della numerazione binaria, in questo modo:

I numeri 1, 2, 4, 8, 16, ... non potranno esser contenuti che nella rispettiva colonna.

Il	3	nelle	colonne	1 e 2
Il	5	»	»	2 e 3
Il	6	»	»	2 e 4
Il	7	»	»	1, 2 e 4

e così di seguito, sino al n.°

$$2^n - 1$$

se n è il numero delle tavolette. Così, per 6 tavolette si potrà arrivare al numero

$$2^6 - 1 = 63.$$

Sui quadrati dei numeri interi.

1. — *Si può formare con facilità una tavola dei quadrati dei numeri interi, nella serie naturale, seguendo questa norma:*

In una prima colonna si scrive la serie dei numeri a partire dall'*uno*; nella terza quella dei numeri dispari a cominciare dal *tre*. Basterà addizionare il quadrato d'un certo numero

Numero n	Quadrato q	Num. dispari d
1	1	3
2	4	5
3	9	7
4	16	9
5	25	11
6	36	13
7	49	15
8	64	17
9	81	19

per esempio di 6, col numero dispari 13, che gli corrisponde, per avere 49 che è il quadrato del numero successivo 7.

Questa regola si rileva, a prescindere da altre considerazioni teoriche, dallo studio *grafico* dei numeri quadrati (vedi numeri *triangolari, quadrati, ecc.*).

II. — *La somma dei primi numeri dispari della serie naturale, a partire da 1 è uguale al quadrato del loro numero.*

Esempio: $$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$

III. — *La somma dei quadrati di tre numeri dispari consecutivi* x, y, z, *è uguale al triplo del quadrato del numero medio* y, *più 8.*

È facile dimostrarlo ponendo i due numeri x, z sotto la forma:

$$x = y - 2$$
$$z = y - 2$$

e facendo poi la somma totale.

Esempio: $$5^2 + 7^2 + 9^2 = 3 \times 7^2 + 8$$

IV. — *Ogni numero intero è una somma di potenze di 2, ciascuna di esse presa una sola volta.*

Ritorniamo sull'osservazione già fatta a pag. 103.

Proponiamoci di esprimere un numero qualsiasi, per es. 62, con la numerazione binaria; dividiamo 62 per 2, il resto zero sarà la prima cifra a destra; il quoziente 31 diviso per 2 dà per resto 1 che sarà la seconda cifra, e così di seguito, sicchè 62 scritto nella numerazione a base 3 sarà:

$$111110$$

Ritornando ora dal sistema binario a quella decimale avremo, esprimendo l'ordine delle unità di ciascuna cifra:

$$(111110)_2 = 0 + 1 \times 2 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^5 =$$
$$= 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = (62)_{10}$$

Il che dimostra il teorema per un numero pari. Analogamente lo si dimostra per un numero dispari, p. es. 75:

$$(75)^2 = 1001011 = 1 + 1 \times 2 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^4 +$$
$$+ 0 \times 2^5 + 1 \times 2^6 = 2^0 + 2 + 2^3 + 2^6 = (75)_{10}$$

V. — *Trovare un quadrato di quattro cifre che, invertito, sia ancora un quadrato perfetto.*

Se supponiamo eseguita la somma del quadrato cercato e del suo inverso, essa sarà divisibile per 11, e siccome il quadrato ed il suo inverso devono essere multipli di 11^2, la loro radice sarà multipla di 11.

D'altra parte, ogni quadrato dovendo terminare con una delle cifre:

$$0 - 1 - 4 - 5 - 6 - 9$$

affinchè il suo inverso sia esso pure un quadrato perfetto occorre che la prima cifra del quadrato cercato sia una delle seguenti:

$$1 - 4 - 5 - 6 - 9$$

La prima cifra del quadrato non può essere 5 perchè il suo inverso essendo allora terminato da 25, il quadrato comincerebbe con 52; esso sarebbe dunque compreso fra 5200 e 5300 e la sua radice fra 72 e 73 e quindi non sarebbe un numero intero.

La prima cifra è dunque 1, 4, 6 o 9 ed il quadrato è compreso fra:

1000 e 2000   4000 e 5000   6000 e 7000   9000 e 10000

e la sua radice fra:

31 e 45   63 e 71   77 e 84   94 e 100

Siccome tale radice è inoltre un multiplo di 11, essa è compresa nella serie:

$$33 - 44 - 66 - 99$$

È facile verificare che di questi numeri il primo e l'ultimo solamente soddisfano al problema, ossia:

$$33^2 = 1089 \quad \text{e} \quad 99^2 = 9801$$

Con ragionamento analogo si troverebbe che, fra i quadrati di 6 cifre, soli tre hanno per inverso un quadrato perfetto, e sono:

$$108900 = 330^2 \quad \text{inverso} \quad 9801 = 99^2$$
$$980100 = 990^2 \quad \text{inverso} \quad 1089 = 33^2$$
e
$$698896 = 836^2$$

VI. — *Trovare il quadrato di 4 cifre nel quale le due prime siano uguali fra loro, come pure le altre due.*

Si osservi che un numero di 4 cifre nel quale le due prime siano identiche, come pure le due ultime, è divisibile per 11. Infatti, sia per esempio 4477. Si ha:

$$4477 = 4400 \times 77 = (4 \times 100 + 7)\ 11$$

Inoltre, siccome il numero cercato è un quadrato, è divisibile per 11^2; lo sua radice è multipla di 11; d'altronde essa è compresa fra 31 e 100 poichè il quadrato cercato ha 4 cifre. Essa è dunque uno dei numeri della serie:

$$33 - 44 - 55 - 66 - 77 - 88 - 99$$

Non può essere 55 il cui quadrato termina con 25, nè 33, 44, 66, 77, 99 poichè le due ultime cifre del loro quadrato debbono essere identiche, mentre si sa che se la cifra delle unità d'un quadrato è 0, 1, 4, 5, 9, quella delle decine è pari, e se è 6, la cifra delle decine è dispari. Dunque la radice cercata non può essere che 88 e infatti:

$$88^2 = 7744.$$

VII. — *Si può trovare un numero uguale alla somma di* k *quadrati, e il cui quadrato sia uguale alla somma di* 2 k *quadrati.*

Infatti:

$$(x^{2n} + x^{2n-2} y^2 + \cdots\cdots x^2 y^{2n-2} + y^{2n})^2 =$$
$$= (x^{2n})^2 + (x^{2n-1} y)^2 + \cdots\cdots + (xy^{2n-1})^2 + (y^{2n})^2 +$$
$$+ [xy\,(x^{2n-2} + x^{2n-4} y^2 + \cdots\cdots + x^2 y^{2n-4} + y^{2n-2})]^2.$$

Esempio. Siano:

$$x = 1 \qquad y = 2 \qquad n = 3 \qquad k = n + 1 = 4.$$

Si ha:

$$(1 + 4 + 16 + 64)^2 = 1 + 2^2 + 4^2 + 3^2 + 16^2 +$$
$$+ 32^2 + 64^2 + [2\,(1 + 4 + 16)]^2$$

cioè:

$$7225 = 1 + 4 + 16 + 64 + 256 + 1024 + 4096 + 1764.$$

VIII. — ***Qualsiasi numero primo della forma $4n + 1$ può, come pure le sue potenze, essere scomposto in una somma di due quadrati e la scomposizione della prima e della seconda potenza non può farsi che in una maniera.***

Ci limiteremo a dare alcuni esempi:

$13 = 3^2 + 2^2$	$13^2 = 12^2 + 5^2$	$13^3 = 46^2 + 9^2$
$29 = 5^2 + 2^2$	$29^2 = 21^2 + 20^2$	$29^3 = 142^2 + 65^2$
$41 = 5^2 + 4^2$	$41^2 = 40^2 + 9^2$	$41^3 = 236^2 + 115^2$
$89 = 8^2 + 5^2$	$89^2 = 80^2 + 39^2$	$89^3 = 712^2 + 445^2$

IX. — ***Somma di quadrati, uguali a quadrati od a somme di altri quadrati:***

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2 + 9^2 = 14^2$$
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 9^2 = 10^2 + 11^2$$
$$5^2 + 6^2 + 10^2 + 12^2 = 4^2 + 17^2 = 7^2 + 16^2$$

X. — ***Il prodotto $(a^2 + b^2 + c^2)\ (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)$ può scomporsi in 18 maniere in somme di quattro quadrati.***

Infatti tale prodotto è uguale a:

$$(aa_1 + bb_1 + cc_1)^2 + (bc_1 - b_1 c)^2 + (ca_1 - c_1 a)^2 + (ab_1 - a_1 b)^2$$

ma si possono sostituire a_1, b_1, c_1, con b_1, c_1, a_1 oppure con c_1, a_1, b_1 o con a_1, c_1, b_1 . . . . . od ancora con a_1, b_1 $-c_1$ o con a_1, $-b_1$, $-c_1$ . . . . ., ecc.

XI. — ***Qualsiasi potenza intiera d'una somma di due quadrati, è essa pure una somma di due quadrati, ossia:***

$$(a^2 + b^2)^m = A^2 + B^2$$

Infatti si ha:

$$\left(a + b\sqrt{-1}\right)^m = A + B\sqrt{-1}$$
$$\left(a - b\sqrt{-1}\right)^m = A - B\sqrt{-1}$$

Moltiplicando membro a membro:

$$(a^2 + b^2)^m = A^2 + B^2$$

XII. — *Il prodotto di cinque numeri consecutivi non può essere un quadrato, ossia l'equazione:*

$$x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = y^2 \qquad (*)$$

non ammette soluzioni intere.

Lo stesso dicasi per il prodotto di 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 11, numeri consecutivi e quindi delle relative equazioni simili alla (*).

XIII. — *Il prodotto di cinque numeri consecutivi non può essere un cubo.*

Lo stesso dicasi per un prodotto di 6 o di 9 numeri consecutivi.

Il prodotto di tre numeri interi in progressione aritmetica non è mai un cubo.

XIV. — *Consideriamo la serie dei numeri 16 - 1156 - 111556 . . . . ottenuta inserendo il numero 15 in mezzo alle cifre del numero precedente. Dimostrare che tali numeri sono quadrati perfetti.*

Prendiamo, ad esempio, il terzo termine della serie. Si può scrivere:

$$111556 = 111\,(10^3 + 5) + 1$$

ma:

$$111 = \frac{10^3 - 1}{9}$$

dunque:

$$111556 = \frac{(10^3 - 1)(10^3 + 5)}{9} + 1 = \frac{10^3(10^3 + 5) - (10^3 + 5)}{9} + 1 =$$

$$= \frac{10^6 + 4 \cdot 10^3 - 5}{9} + 1 = \frac{10^6 + 4 \cdot 10^3 + 4}{9} = \left(\frac{10^3 + 2}{3}\right)^2$$

Essendo:

$$10^3 = 999 + 1$$

si ha:

$$\frac{10^3 + 2}{3} = \frac{999 + 3}{3} = 333 + 1 = 334$$

dunque: $$111556 = 334^2$$

I numeri delle serie proposta sono dunque i quadrati dei numeri:

$$4 \cdot 34 \cdot 334 \ldots\ldots$$

ottenuti scrivendo successivamente la cifra 3 alla sinistra del numero precedente, ossia:

$$\begin{aligned}
4^2 &= 16 \\
34^2 &= 1156 \\
334^2 &= 111556 \\
3334^2 &= 11115556 \\
33334^2 &= 1111155556 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

In modo analogo si proverebbe che i termini della serie

$$49 \cdot 4489 \cdot 444889 \ldots\ldots$$

sono i quadrati dei numeri:

$$7 \cdot 67 \cdot 667 \ldots\ldots$$

ossia:

$$\begin{aligned}
7^2 &= 49 \\
67^2 &= 4489 \\
667^2 &= 444889 \\
6667^2 &= 44448889 \\
66667^2 &= 4444488889 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

I cubi dei numeri interi.

In modo analogo a quelle indicato per i quadrati, si puo ottenere una tavola dei cubi dei numeri interi della serie naturale.

Numero	Cubo	a	b	c
1	1	7	12	6
2	8	19	18	6
3	27	37	24	6
4	64	61	30	6
5	125	91	36	6
6	216	127	42	6
7	343	169	48	6
8	512	217	54	—
9	729	271	—	—
10	1000	—	—	—

Scriviamo nella seconda colonna i primi quattro cubi; formiamo la seconda con le differenze:

$$8 - 1 = 7 \qquad 27 - 8 = 19 \qquad 64 - 27 = 37$$

La colonna b si forma con le differenze:

$$19 - 7 = 12 \qquad 37 - 19 = 18$$

e quella c con:

$$18 - 12 = 6$$

differenza che rimane poi costante. Ciò pósto è semplicissimo dedurre i numeri b da c, a da b e infine il cubo da a.

Di alcune proprietà dei cubi.

Accenneremo, senza dimostrarle, ad alcune proprietà dei cubi dei numeri interi.

1.° Il cubo d'un numero intero composto di decine ed unità, termina con la stessa cifra del cubo delle sue unità.

2.° I cubi dei numeri terminanti con 1, 4, 5, 6, 9 terminano con le stesse cifre; quelli dei numeri terminanti con 2, 3, 7, 8 terminano con 8, 7, 3, 2 rispettivamente. In quest'ultimo caso, un numero ed il suo cubo sono terminati da due cifre la cui somma è 10.

3.° Ogni intero terminante con un numero di zeri non multiplo di 3 non è un cubo perfetto.

4.° Ogni cubo intero o è un multiplo di 9, o un multiplo di 9 aumentato o diminuito di 1.

5.° Formiamo dei gruppi crescenti coi numeri dispari, nell'ordine naturale, e indichiamoli con un numero d'ordine.

Gruppo	1°	1			
»	2°	3	5		
»	3°	7	9	11	
»	4°	13	15	17	19

. . . .

La somma dei numeri contenuti in ciascun gruppo è uguale al cubo del numero d'ordine del gruppo, ossia, ad esempio:

$$13 + 15 + 17 + 19 = 4^3$$

Il quadrato in fig. 87 rappresenta, nelle sue zone, i cubi dei numeri 1, 2, 3, 4, cioè 1, 8, 27, 64. È facile vedere che la somma di questi cubi corrisponde al *quadrato della loro somma*, poichè il quadrato in figura ha appunto per lato $1 + 2 + 3 + 4 = 10$

$$1 + 8 + 27 + 64 = 100$$

È così confermata in modo tangibile, *grafico*, la ben nota regola:

$$1 + 2^3 + 3^3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdot \cdot \cdot n)^2$$

Del resto, quanto sopra può anche rilevarsi dalla *tavola grafica* di moltiplicazione (fig. 88).

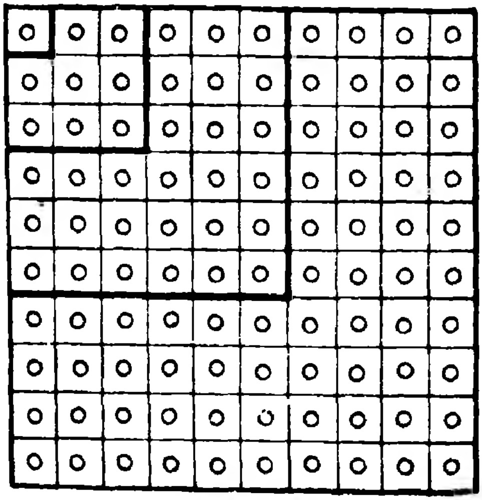


Fig. 87.

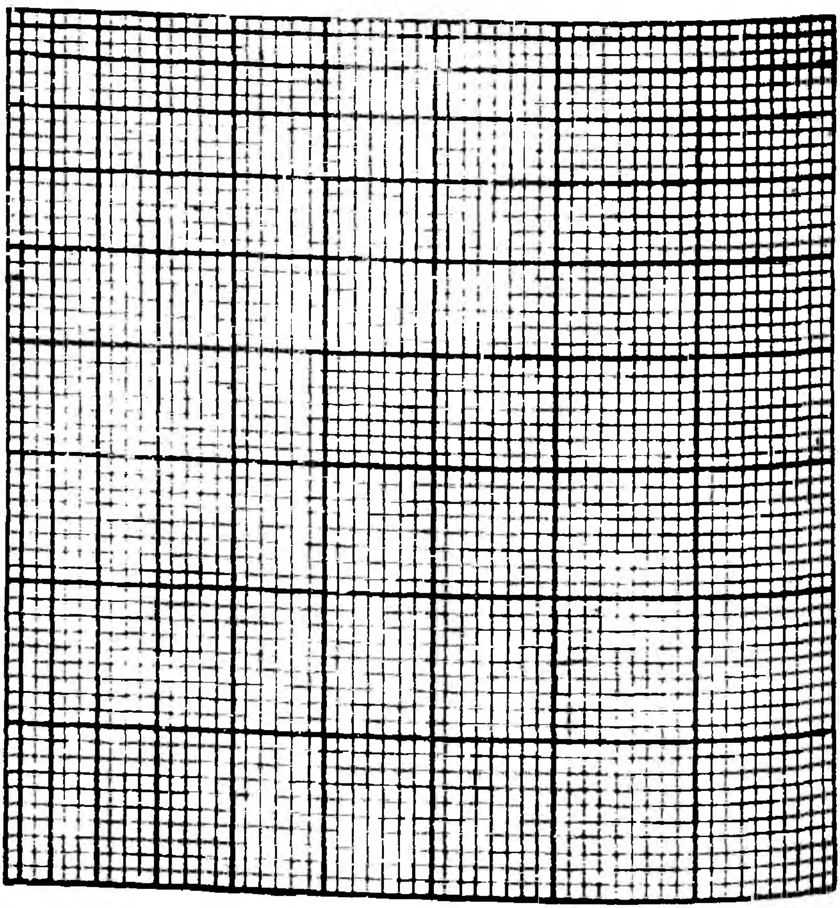


Fig. 88.

I. — *Trovare più cubi consecutivi, la cui somma sia un quadrato.*

Ecco alcune soluzioni del problema che, in modo generale fu trattato dal Genocchi (1).

$$289^3 + 290^3 + \cdots + 4904^3 = (3 \times 577 \times 6948)^2$$
$$3600^3 + 3601^3 + \cdots + 4225^3 = (5 \times 313 \times 3925)^2$$

$$887240758600^3 + 887240758601^3 + \cdots + 1041543499225^3 =$$
$$= (967473261775 \times 77151370313)^2$$

II. — *Trovare un numero che sia uguale alla somma dell cifre del suo cubo.*

Tanto il numero come il suo cubo divisi per 9 devono dar lo stesso resto; un cubo dovendo necessariamente essere d'un di queste forme: $9a$, $9a-1$, $9a+1$, anche i numeri cereat dovranno esserlo.

Consideriamo un numero di tre cifre; il suo cubo ne avrà al più, e la somma delle cifre del suo cubo sarà inferiore 9×9 cioè minore di 100.

Dunque i numeri richiesti non possono avere che una o du cifre.

Il cubo d'un numero di due cifre avrà, al più, sei cifre, e l somma delle cifre del suo cubo sarà minore di $6 \times 9 = 54$.

Dovendosi escludere il 53 il cui cubo termina con 7, direm che la somma non può eccedere 52; così pure sono da esclu dere i numeri 44, 45, 46 i cui cubi terminano rispettivament con 4, 5, 6 e sono costituiti da 5 cifre, onde la somma dell cifre non potrà eccedere il 42.

Formiamo dunque i cubi dei numeri di una delle forme in dicate, dall'1 al 37 ed avremo le soluzioni seguenti, che son le sole possibili:

N	1	8	17	18	26	27
N^3	1	512	4193	5832	17576	19683

(1) « *Nota su alcune somme di cubi* » negli Atti dell'Accademia de' Nuovi Lincei

I numeri perfetti.

Dalla progressione geometrica di base 2 si può passare ai *numeri perfetti*, cioè a quei numeri interi che sono uguali alla somma dei proprii divisori, escluso il numero stesso.

Non è completamente nota la teoria pei numeri perfetti dispari; quelli pari sono tutti compresi nella formola:

$$N = 2^{n-1}(2^n - 1)$$

nella quale il secondo fattore deve essere un numero primo; sicchè in tale formola non bisogna dare ad n che i valori interi pei quali il numero $R_\chi = 2^n - 1$ è primo. È facile vedere che R_χ non può essere primo se n non è primo a sua volta, ma ciò non basta. Bisognerà accertarsi che $2^n - 1$ sia un numero primo; teoria questa assai difficile e che per ora non ci permette di dimostrarlo che nel caso in cui n sia un numero primo > 100. I numeri perfetti attualmente noti sono i seguenti:

	n	2^{n-1}	$2^n - 1$	Numeri perfetti
1	2	2	3	6
2	3	4	7	28
3	5	16	31	496
4	7	64	127	8128
5	13	4096	8191	33550336
6	17	65536	131071	8489869056
7	19	262144	524287	137438691328
8	31	1073741824	2147483647	2305843008139952128
9	61	—	—	2658455991569831744654692615953842176

I valori di n: 11, 23 e 29 sono stati esclusi perchè i tre numeri:

$$2^{11} - 1 \qquad 2^{23} - 1 \qquad 2^{29} - 1$$

non sono primi essendo rispettivamente divisibili per 23, 47 e 233.

I numeri perfetti terminano sempre con 6 o con 8. Ciò dipende, da un lato, dalla periodicità dell'ultima cifra nelle potenze del 2, e dall'altro da che i numeri primi n sono necessariamente, eccetto il 2 e il 3, multipli di 6 aumentati o diminuiti dell'unità. Così, quando n è un multiplo di 6 diminuito dell'unità, il numero N termina con un 6, senza che n debba essere un numero primo; quando n è un multiplo di 6 aumentato dell'unità, il numero N termina con la cifra 8.

Ogni numero compreso nella formola (eccetto quello corrispondente a $n=2$) dà per resto 1 quando sia diviso per 9. La prima cifra a destra di questi numeri è 6, oppure le due ultime cifre formano 28.

Numeri perfetti di seconda specie.

Sono i numeri uguali al *prodotto* dei loro fattori. I numeri p^3 (p. es. 8) e $p_1 \, p_2$ (p. es. 10, 14. . . . .) sono numeri perfetti di seconda specie. Il numero 6 è il solo che sia *doppiamente perfetto* cioè che sia ad un tempo perfetto di prima e di seconda specie.

I numeri amicabili.

Due numeri A, B sono detti amicabili, *quando la somma dei divisori del primo, astrazione fatta dal numero stesso, è uguale a B, e reciprocamente, la somma dei divisori di B astrazione fatta da B, è uguale ad A.*

I numeri 220 e 284 sono amicabili; infatti:

$$220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142$$

che è la somma delle parti aliquote di 284, e:

$$284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110$$

che è la somma delle parti aliquote di 220.

Si tratta d'un problema più che indeterminato. Supponiamo infatti A e B scomposti in fattori primi:

$$A = a^{\alpha} . b^{\beta} . c^{\gamma} \ldots\ldots, \qquad B = a_1^{\alpha'} . b_1^{\beta'} . c_1^{\gamma'} \ldots\ldots$$

Denotando con S ed S' le somme delle parti aliquote di tali numeri, si deve avere:

$$S = \frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \times \frac{a^{\beta+1}-1}{b-1} \times \frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1} \times \ldots\ldots - A = B$$

$$S' = \frac{a_1^{\alpha'+1}-1}{a_1-1} \times \frac{b_1^{\beta'+1}-1}{b_1-1} \times \frac{c_1^{\gamma'+1}-1}{c_1-1} \times \ldots\ldots - B = A$$

da cui si deduce:

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \times \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \times \frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1} \times \ldots\ldots =$$

$$= \frac{a_1^{\alpha'+1}-1}{a_1-1} \times \frac{b_1^{\beta'+1}-1}{b_1-1} \times \frac{c_1^{\gamma'+1}-1}{c_1-1} \times \ldots\ldots$$

Questa relazione è troppo generale perchè se ne possano dedurre delle formole per ricavarne delle coppie di numeri amicabili; ma assegnando ad A e B le forme particolari più semplici:

$$A = 2^n \cdot a \qquad B = 2^n\, b \cdot c$$

nelle quali a, b, c sono fattori primi dispari, si possono determinare delle coppie di numeri che soddisfino alle condizioni enunciate. Si ha infatti:

$$(2^{n+1}-1)\ (a+1) = (2^{n+1}-1)\ (b+1)\ (c+1) = 2^n\,(a+b\,c)$$

da cui:

$$a = b\,c + b + c$$

ed eliminando a:

$$(b - 2^n + 1)\ (c - 2^n + 1) = 2^{2n} = 2^{n+\alpha}\, 2^{n-\alpha}$$

supponendo $\alpha < n$.

Si può dunque porre;

$$b = 2^n - 1 + 2^{n-\alpha}$$
$$c = 2^n - 1 + 2^{n+\alpha}$$

e dedurne;

$$a = (2^\alpha + 1)^2\, 2^{2n-\alpha} - 1$$

con la condizione che a, b, c siano numer. primi; per conseguenza α è dispari, altrimenti a sarebbe composto.

Per $\alpha = 1$ si trova una prima forma di numeri amicabili supponendo:

$$a = 3^2 \cdot 2^{2n-1} - 1 \qquad b = 3 \cdot 2^{n-1} - 1 \qquad c = 3 \cdot 2^n - 1$$

Attribuendo ad n i valori successivi 2, 3, 4 . . . . . , non conservando che quelli pei quali i numeri a, b, c sono primi, si trovano le soluzioni:

n	a	b	c	A	B
2	71	5	11	284	220
4	1151	23	47	18416	17296
7	73727	191	383	9437056	9363584

Non si può supporre $\alpha = 3$, poichè uno dei numeri b o c sarebbe una differenza di due quadrati. Rimane da studiare il caso di $\alpha = 5, 7 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$ il che è assai difficile.

Nel seguente quadro sono riunite alcune coppie di numeri amicabili; comprese le tre sopra indicate:

Alcune coppie di numeri amicabili

220	$= 2^2.5.11$	69615	$= 3^2.7.13.5.17$	503056	$= 2^4.23.1367$
284	$= 2^2.71$	87633	$= 3^2.7.13.107$	514736	$= 2^4.53.607$
2620	$= 2^2.5.131$	122265	$= 3^2.5.13.11.19$	522405	$= 3^2.5.13.19.47$
2924	$= 2^2.17.43$	139815	$= 3^2.5.13.239$	525915	$= 3^2.5.13.29.31$
5020	$= 2^2.5.251$	141664	$= 2^5.19.333$	609928	$= 2^3.11.29.239$
5564	$= 2^2.13.107$	153176	$= 2^3.41.467$	686072	$= 2^3.191.449$
6232	$= 2^3.19.41$	142310	$= 2.5.7.19.107$	1175265	$= 3^2.7^2.13.5.41$
6368	$= 2^5.199$	168730	$= 2.5.47.359$	1438983	$= 3^2.7^2.13.251$
10744	$= 2^3.17.79$	171856	$= 2^4.23.467$	1280565	$= 3^2.5.13.11.199$
10856	$= 2^3.23.59$	176336	$= 2^4.103.107$	1340235	$= 3^2.5.13.29.79$
17296	$= 2^4.23.47$	176272	$= 2^4.23.479$	1358595	$= 3^2.5.19.7.227$
18416	$= 2^4.1151$	180848	$= 2^4.89.127$	1486845	$= 3^2.5.19.37.47$
63020	$= 2^2.23.5.137$	196724	$= 2^2.11.17.263$	9363584	$= 2^7.191.383$
76084	$= 2^2.23.827$	202444	$= 2^2.11.43.107$	9437056	$= 2^7.73727$
66928	$= 2^4.47.89$	308620	$= 2^2.5.13.1187$	196421715	$= 3^2.5.7.19.37.887$
66992	$= 2^4.53.79$	389924	$= 2^2.43.2267$	224703405	$= 3^2.5.19.37.7103$
67095	$= 3^3.5.7.71$	437456	$= 2^4.19.1439$		
71145	$= 3^3.5.17.31$	455344	$= 2^4.149.191$		

I numeri triangolari.

Si chiamano triangolari i numeri formati nel modo indicato nella fig. 89, cioè sovrapponendo il primo al secondo, il secondo al terzo, e così via come se si trattasse di biglie.

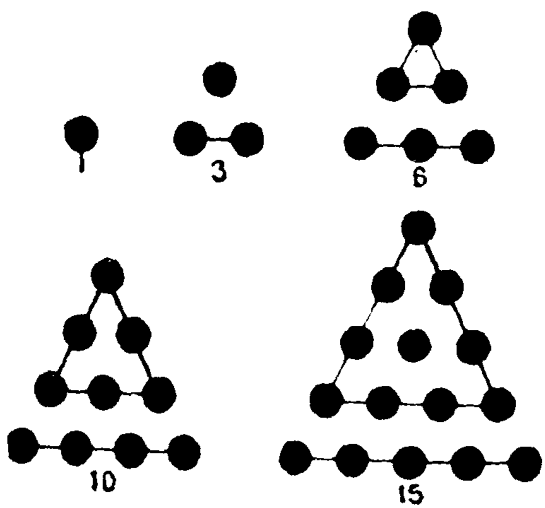


Fig. 89.

Possiamo formare con facilità la serie dei numeri triangolari nel modo seguente:

Unità	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Interi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Triangolari	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55

Come è facile vedere un numero triangolare non è altro che la somma di quello che lo precede e di quello che gli sta sopra, nella riga dei numeri naturali, come per esempio:

$$21 = 15 + 6$$

Come si potrà in tale serie trovare un numero di *posto* determinato, per esempio il 20mo?

In questo modo assai semplice.

Se poniamo accanto ad un numero triangolare (quello di lato 5 ad esempio) lo stesso triangolare capovolto, come vedesi nella fig. 90, ne risulterà un parallelogramma costituito da 5 file di $5+1$ unità ciascuna, cioè, in totale $5 \times 6 = 30$ unità; la metà

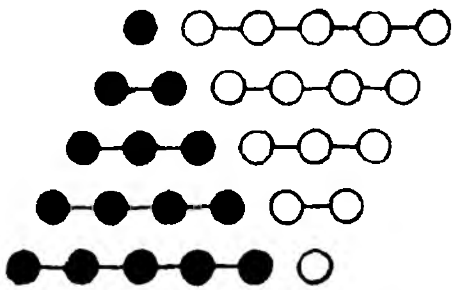


Fig. 90.

sarà il triangolare di lato 5. Cosicchè possiamo stabilire la formola generale per trovare un triangolare di posto ennesimo, cioè:

$$n \frac{(n+1)}{2}$$

che si esprime dicendo: *Un numero triangolare* di posto determinato è uguale alla metà del prodotto del numero che ne indica il posto, per il numero successivo.

Questo modo di calcolare un triangolare può servire di controllo all'altro nel quale si fanno le addizioni successive.

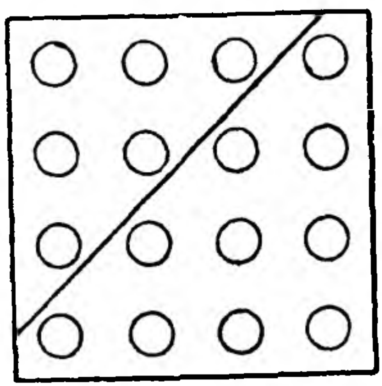


Fig. 91.

Ogni quadrato impari è la differenza di due triangolari.

Ogni numero della forma $n^2 \pm n + 1$ è la somma di due triangolari.

Ogni cubo è la differenza di due triangolari consecutivi.

La somma di due triangolari successivi è un quadrato.

Questa proprietà risulta chiaramente dalla fig. 91.

I numeri quadrati.

In modo analogo ai *triangolari* si possono ottenere i numeri *quadrati*, procedendo come è indicato nella fig. 92. Si vede, con un semplice esame della figura, che un numero quadrato differisce dal precedente per un numero *dispari* di unità e

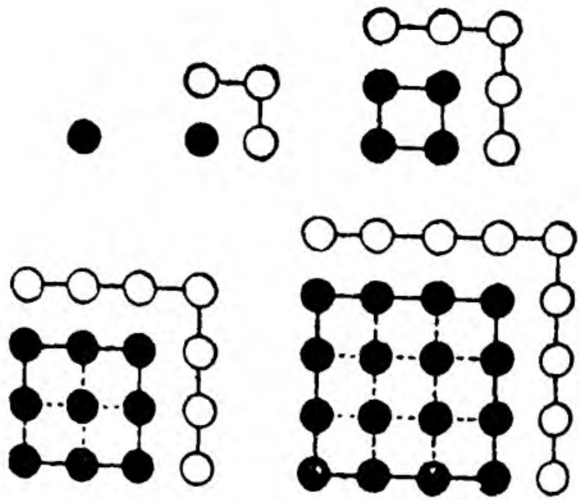


Fig. 92.

che queste differenze costituiscono la serie dei numeri dispari naturali. Segue da ciò che è facile costruire la serie dei numeri quadrati (ossia dei quadrati dei numeri) in questo modo:

Base . . .	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Dispari .	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
Quadrati	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Un numero *quadrato* si ottiene (come abbiamo veduto pei *triangolari*) addizionando quello che lo precede con quello che gli sta sopra, come per esempio:

$$64 = 49 + 15$$

Teorema di Diofanto. — La fig. 93 costituisce un quadrato di 9 unità di lato, composto di otto volte il numero triangolare dieci e di una unità al centro. Abbiamo dunque in esso la dimostrazione grafica del teorema di Diofanto: *L'ottuplo d'un numero triangolare, aumentato dell'unità, è sempre un quadrato.*

Reciprocamente: « *Ogni quadrato di un numero dispari, diminuito dell'unità, è l'ottuplo d'un numero triangolare* ».

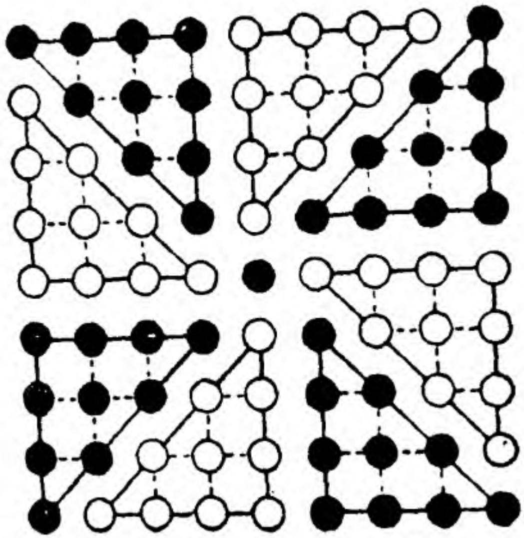


Fig. 93.

Si deduce da ciò che per riconoscere se un dato numero sia triangolare basta moltiplicarlo per 8 e aggiungere 1 al prodotto; se si ottiene così un quadrato, il numero proposto era triangolare. Per esempio:

$$66 \times 8 + 1 = 529 = 23^2$$

dunque 66 è un numero triangolare.

Altri teoremi del genere sono i seguenti: *Ogni numero quadrato è uguale al proprio lato aumentato di due volte il triangolare di posto antecedente.*

Ogni numero quadrato è la somma del triangolare dello stesso ordine e del triangolare antecedente.

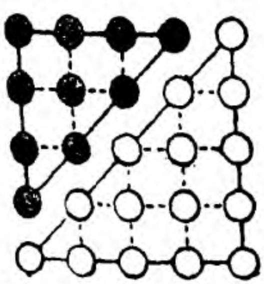


Fig. 94.

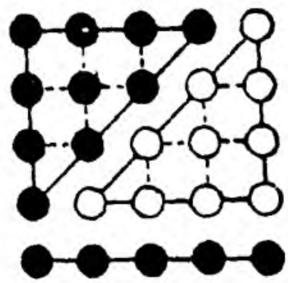


Fig. 95.

Le fig. 94 e 95 dimostrano graficamente tali proprietà dei quadrati. Del resto si possono pure rilevare dal raffronto della serie dei *triangolari* e dei *quadrati*, che abbiamo date precedentemente:

Unità	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Interi . . .	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Triangolari	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Quadrati. .	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

$$64 = 8 + 2 \times 28$$
$$64 = 36 + 28$$

I numeri pentagonali.

La fig. 96 rappresenta il numero pentagonale di lato 5. Si vede che ogni *accrescimento*, come $R\ Q\ P\ E$, differisce dal precedente per tre unità. Risulta da ciò che si può costituire la

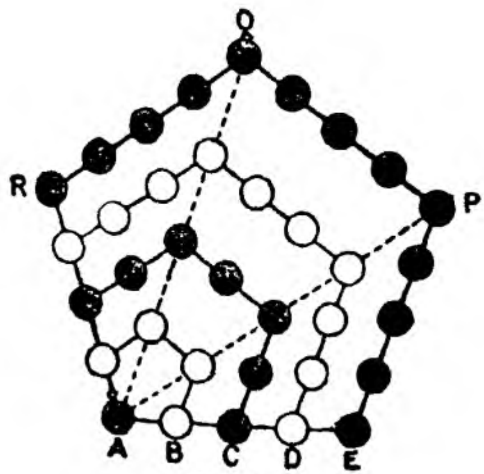


Fig. 96.

serie dei numeri *pentagonali* in modo analogo a quello seguito per i *triangolari* e i *quadrati*, ma partendo dalla base *tre*.

	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28
Pentagonali	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145

Per calcolare un pentagonale qualsiasi giovano però anche alcune osservazioni, che sono messe in evidenza dalla fig. 97:

1.° *Un numero pentagonale è uguale al proprio lato aumentato del triplo del pentagonale che lo precede.*

2.° *Un numero pentagonale è la somma del triangolare dello stesso ordine A B C e del doppio del triangolare antecedente.*

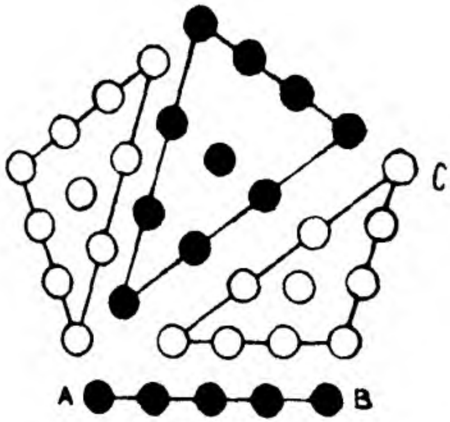


Fig. 97.

I numeri pentagonali si possono anche ottenere nel modo indicato nella fig. 98.

1	2	3	4	5
1	2	3	4	5
1	2	3	4	5
1	2	3	4	5
1	2	3	4	5

Fig. 98.

$1;\quad 1+2+2=5;\quad 1+2+3+3+3=12$

$1+2+3+4+4+4+4=22\ \ldots\ldots$

Per riconoscere se un numero sia pentagonale basta osservare che: *il triplo di un numero pentagonale è un numero triangolare il cui ordine è il triplo meno uno di quello del pentagonale e inversamente.*

Cosicchè volendo riconoscere, per esempio, se 117 sia un pentagonale, lo si moltiplica per 3 e si riscontra se il prodotto 351 sia un numero triangolare.

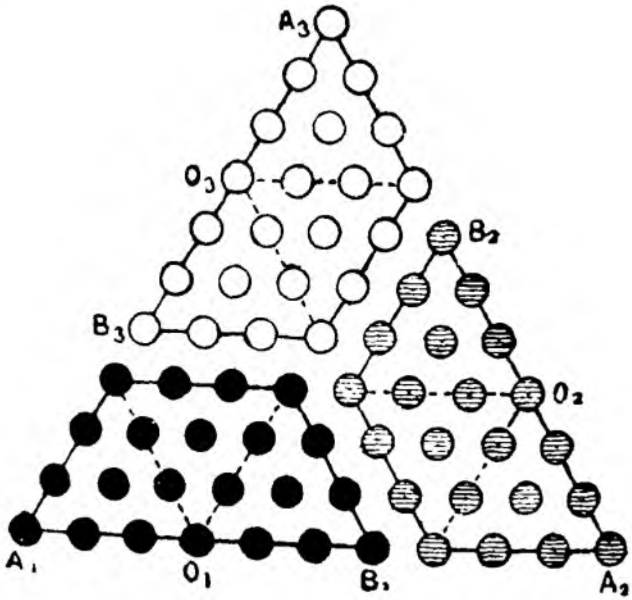


Fig. 99.

Applicando il teorema di Diofanto (v. pag. 122) si potrà osservare che: *prendendo 24 volte un numero pentagonale e aumentando il prodotto di un'unità si ha il quadrato il cui lato è il sestuplo meno uno del lato del pentagonale e inversamente.*

È pure facile vedere che un pentagonale non può terminare con una delle cifre 3, 4, 8, 9 perchè se così fosse, il suo triplo terminerebbe con 9, 2, 4, 7, cifre che non possono essere finali d'un triangolare.

I numeri esagonali.

Si ottengono questi numeri come gli altri di cui precedentemente, collocando delle unità nel modo indicato nella fig. 100 sui perimetri successivi di esagoni concentrici, aventi il vertice *A* comune.

Analogamente a quanto abbiamo fatto pei numeri triangolari, ecc., possiamo ottenere quelli esagonali partendo dalla base 4, oppure osservando che un numero esagonale è uguale

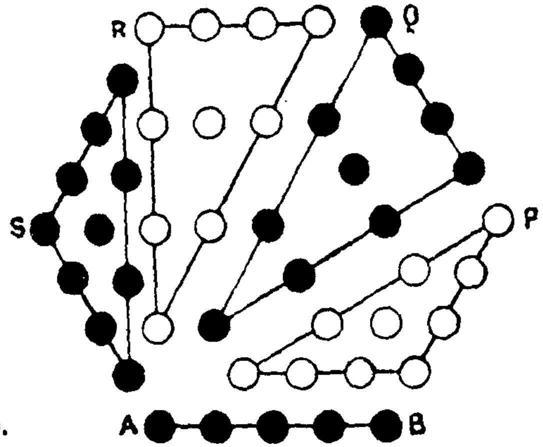


Fig. 100.

al proprio lato aumentato di quattro volte il triangolare dell'ordine precedente.

Si osserva parimente che un esagonale è costituito dal *triangolare* $A\ B\ P$ dello stesso ordine, aumentato del triplo del triangolare che lo precede.

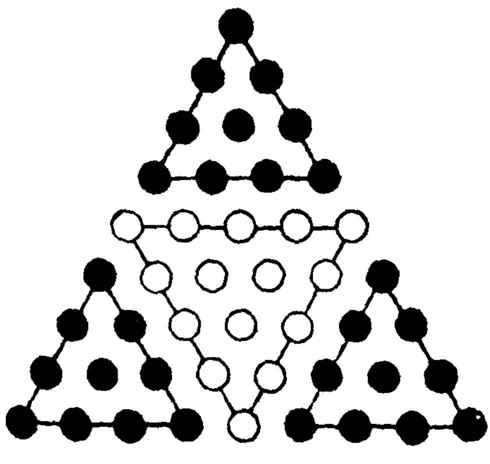


Fig. 101.

Tali considerazioni sono però superflue per il calcolo degli esagonali poichè dalla fig. 101 si rileva che: *ogni esagonale è un triangolare di lato dispari e reciprocamente.*

I numeri poligonali.

In generale, possiamo formulare le due proposizioni seguenti:

1.° *Un poligonale è uguale al numero del proprio ordine aumentato di tante volte il triangolare antecedente, quante sono le unità del proprio ordine, meno due.*

2.° *Un poligonale è uguale al triangolare dello stesso ordine aumentato di tante volte il triangolare che lo precede quante sono le unità del suo ordine meno tre.*

Si può ottenere la serie dei pentagonali prendendo come base numeri uguali al numero del lato diminuito di due unità.

Riproduciamo ora la tabella dei numeri poligonali fino al decagonale:

Numero	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
Triangolare . .	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Quadrato	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Pentagonale . .	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145
Esagonale . . .	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190
Ettagonale . . .	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235
Ottagonale. . .	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280
Nonagonale . .	1	9	24	46	75	111	154	204	261	325
Decagonale. . .	1	10	27	52	85	226	175	232	297	370

I numeri ottagonali.

Il triplo più uno di un ottagonale, è un quadrato il cui lato è il triplo meno uno del lato dell'ottagonale.

Questo teorema si dimostra osservando, che un ottagonale è uguale al pentagonale dello stesso ordine aumentato del triplo del triangolare d'ordine precedente. Ciò posto la fig. 102 dimostra che il nonuplo più uno d'un triangolare è un triangolare di lato triplo più uno del lato del primo.

Sovrapponendo il lato $A_2 A_3$ di questa figura sul lato $A_2 A_3$ della fig. 99, tenendo conto della scomposizione dell'ottagonale in un pentagonale e tre triangolari d'ordine antecedente,

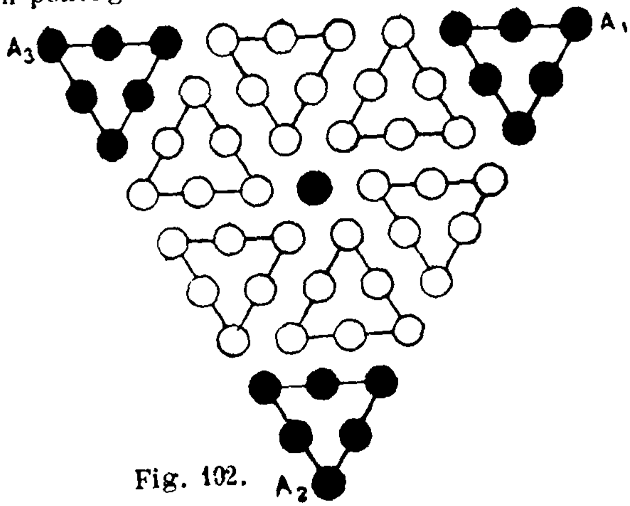


Fig. 102.

si dimostra la proposizione sopra enunciata, poichè si viene a formare una figura nella quale il numero delle unità è un quadrato.

Segue da ciò che un ottagonale non può terminare con una delle cifre 7, 4, 2, 9 altrimenti il suo triplo più uno, che è un quadrato, terminerebbe con 2, 3, 7, 8 il che non può essere.

I numeri decagonali.

Il doppio più uno di un decagonale è un triangolare d'ordine quadruplo meno due di quello del decagonale. Infatti un decagonale vale un triangolare dello stesso ordine aumentato di sette triangolari dell'ordine precedente; ora, aggiungendo (figura 103) uno dei triangolari tratteggiati ai *sette* triangolari bianchi o neri si forma il decagonale. Dunque un decagonale non può terminare con una delle cifre 3, 4, 8, 9.

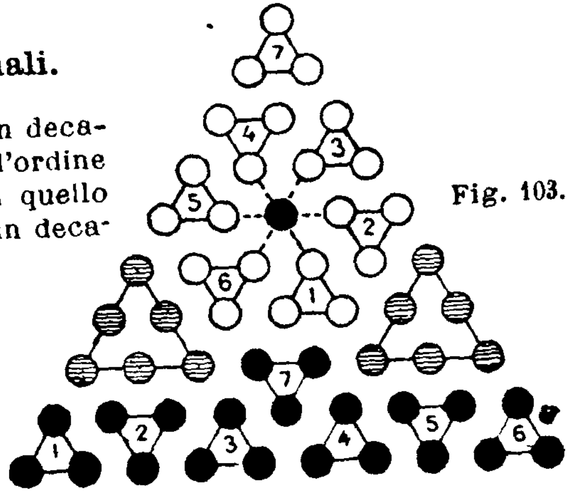


Fig. 103.

I numeri piramidali.

Immaginiamo un numero triangolare costituito da cubetti come nella fig. 104. Vediamo di stabilire la formola che permette di calcolare la somma dei numeri triangolari a partire

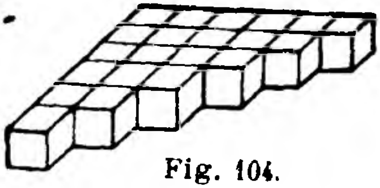


Fig. 104.

dall'unità, somma che corrisponde al numero dei proiettili contenuti in una pila a base triangolare, come è facile vedere nella fig. 105 nella quale i dischi a contorno sottile rappresentano i proiettili d'uno strato e quelli a contorno più grosso i proiettili dello strato a quello sovrapposto; essi costituiscono appunto due numeri triangolari successivi.

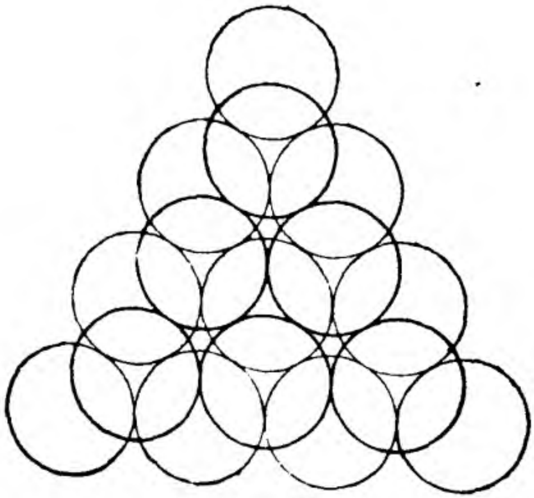


Fig. 105.

Si chiama *numero piramidale triangolare* il numero risultante dalla somma dei triangolari a partire dal primo che è 1, e l'*ordine* del piramidale è quello del triangolare al quale è stata limitata la somma, vale a dire che è il numero degli *strati* dei quali il piramidale è costituito.

Si può dunque formare una tavola di numeri piramidali in questo modo:

Interi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10....
Triangolari	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55...
Piramidali	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220...

La serie dei piramidali si ottiene addizionando il piramidale precedente col triangolare soprastante, ossia di medesimo ordine:

piramidale 84 = *piramidale* 56 + *triangolare* 28

Si può ottenere direttamente un piramidale d'ordine qualsiasi con una regola che si può stabilire in questo modo.

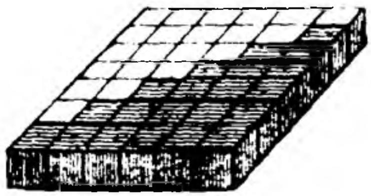


Fig. 106.

Cominciamo col duplicare un triangolare qualunque; otterremo così un *rettangolare* (fig. 106).

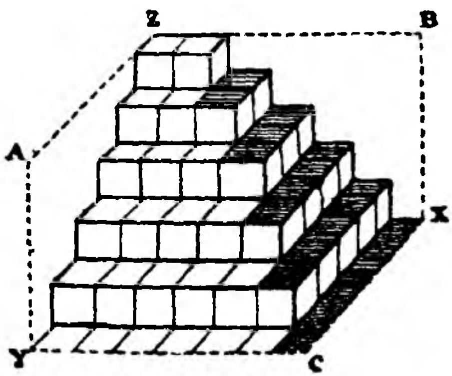


Fig. 107.

Sovrapponiamo a questo i rettangolari gradatamente d'ordine inferiore; otterremo la piramide della fig. 107.

Potremo poi applicare su di essa un'altra piramide uguale, capovolta in modo da avere la fig. 108 alla quale non man-

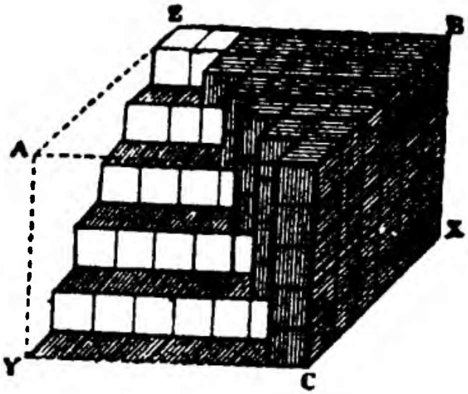


Fig. 108.

cherà più che una terza piramide uguale alle prime due per completare un parallelepipedo nel quale:

$A\ Y =$ ordine pel piramidale
$C\ Y =$ » » » più 1
$Z\ B =$ » » » più 2

Dunque: *il sestuplo d'un piramidale è il prodotto di tre numeri interi, consecutivi e crescenti, il primo dei quali è l'ordine del piramidale.*

Numeri piramidali quadrangolari.

Se ne può ottenere la serie in modo analogo a quella dei triangolari, ma se ne può anche calcolare uno qualunque con queste regole:

1.° *Il piramidale quadrangolare è uguale al piramidale triangolare di uguale ordine aumentato del piramidale triangolare d'ordine antecedente.*

2.° *Il sestuplo d'un piramidale quadrangolare è il prodotto del suo numero d'ordine per il numero seguente e poi per il doppio del suo numero d'ordine più uno.*

Risultati analoghi si possono ottenere per le piramidi poligonali.

Osservazione: La somma dei cubi dei numeri naturali corrisponde al quadrato della somma dei rispettivi numeri semplici. Così:

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$
$$1 + 8 + 27 + 64 = 100 = 10^2$$

Progressioni per differenza.

Abbiasi la progressione per differenza:

$$4 \quad 7 \quad 10 \quad 13$$

Possiamo rappresentarla graficamente con una figura a quadrelli in cui la prima riga ne contenga 4, la seconda 7, e così via (fig. 109; quadrelli a dischetti neri). Se a questa figura ne

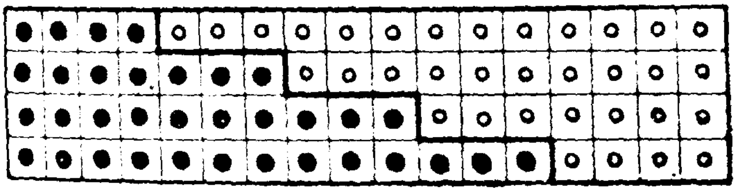


Fig. 109.

adattiamo un'altra uguale (a quadrelli con circoletti), ma disposta in modo inverso, completando il rettangolo, potremo rilevare facilmente che la somma dei termini estremi della progressione è uguale a quella di due termini equidistanti dagli estremi

$$4 + 13 = 7 + 10$$

e che la somma dei termini della progressione è la metà del numero delle caselle del rettangolo, ossia $\frac{4 + 17}{2}$. Cosicchè se a ed l sono i due termini estremi, e se n è il numero dei termini considerati, detta somma sarà data da:

$$S = \frac{(a + l)\,n}{2} \qquad (1)$$

Nel caso della serie naturale dei numeri, si tratta d'una progressione aritmetica di ragione 1, il cui primo termine è 1, ossia $a = 1$ ed $l = n$, per cui la formola (1) diventa:

$$S = \frac{n\,(n + 1)}{2}$$

E se $a = 1$ con ragione 2, si ha $l = 2\,n - 1$ e la formola ci dà:

$$S = n^2$$

che sarebbe la somma dei numeri *dispari*:

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ n$$

Permutazioni.

Una rappresentazione grafica delle permutazioni possibili con n cose (in particolare per $n = 4$) è quella immaginata da E. Lucas e rappresentata nella fig. 110.

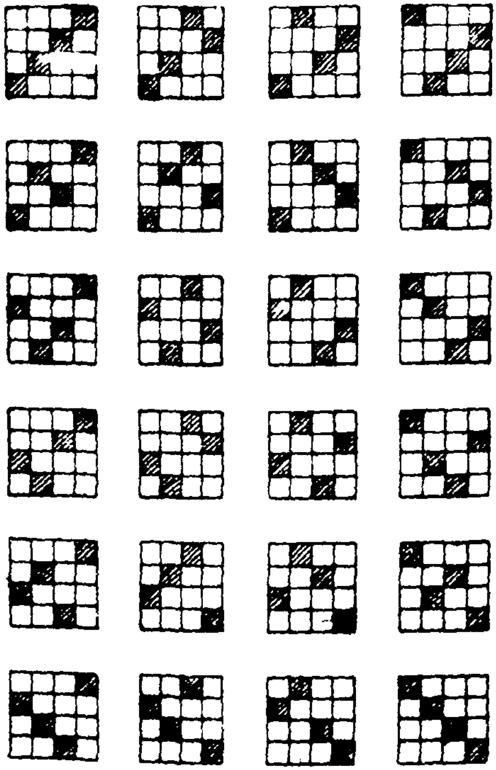


Fig. 110.

Se indichiamo con a la prima casella inferiore d'uno dei 24 quadrati della figura, con b la seconda, al disopra, con c la terza e con d la quarta, i quadrelli tratteggiati corrisponderanno alle 24 permutazioni possibili con dette 4 lettere, cioè:

abcd	*abdc*	*adbc*	*dabc*
acbd	*acdb*	*adcb*	*dacb*
cabd	*cadb*	*cdab*	*dcab*
bacd	*badc*	*bdac*	*dbac*
bcad	*bcda*	*bdca*	*dbca*
cbad	*cbda*	*cdba*	*dcba*

Queste permutazioni corrispondono alle soluzioni del problema delle *torri* su d'una scacchiera di 16 caselle: *in quanti* *modi è possibile collocarvi 4 torri in modo che non ve ne sia alcuna in presa.*

Per l'usuale scacchiera di 64 caselle il problema (con 8 torri) ammette dunque

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$$

soluzioni (v. pag. 70-85).

Il triangolo di Pascal.

La serie dei coefficienti dei termini dello sviluppo del *binomio di Newton:*

$$(a \pm x)^n$$

messa sotto forma di triangolo da Pascal:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
. & & . & & . & & . & & . & & .
\end{array}$$

quando venga scritta in questo modo:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
. & . & . & . & . & .
\end{array}$$

sommandone i termini in senso parallelo alla bisettrice dell'angolo retto si hanno i termini della nota serie di Fibonacci:

$$1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21 \; . \; . \; . \; . \; . \; ,$$

Triangolo e quadrato aritmetici.

Nella fig. 111 abbiamo disposto scalarmente i coefficienti binomiali di Pascal (v. pag. 135). Nel *quadrato* di *Fermat* (fig. 112) vediamo gli stessi numeri, in altra disposizione. Il numero che

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

Fig. 111.

1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	6	10	15	21	28	36
1	4	10	20	35	56	84	
1	5	15	35	70			
1	6	21	56				
1	7	28	84				
1	8	36					

Fig. 112.

trovasi in ciascuna casella di questo quadrato è dato dalla somma dei due numeri che si trovano nella casella alla sua *sinistra* e in quella *sopra* di esso. Così, 84 risulta dalla somma 56 + 28.

Il quadrato di Fermat si presta alla soluzione di questo problema:

Se in una scacchiera usuale è data la posizione O *di una*

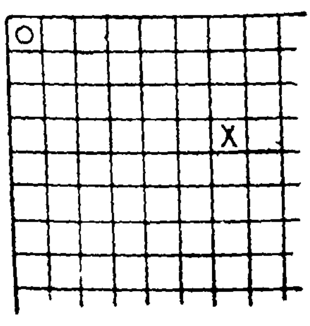


Fig. 113.

torre, in angolo (fig. 113), *in quanti percorsi differenti potrà essa torre pervenire dalla casella* O *in altra, di posizione stabilita X, senza regressi?*

Nel caso della fig. 113 la risposta sarebbe 84.

Curiosità diverse sui numeri.

Sul numero 37.

Se consideriamo la progressione aritmetica:

$$\div 3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 18 \cdot 21 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 27$$

e ne moltiplichiamo i termini per 37, otteniamo:

$$111 \cdot 222 \cdot 333 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 999$$

Questi prodotti sono costituiti da tre cifre uguali e tali che la loro somma è uguale al moltiplicatore da cui derivano.

La spiegazione di tale particolarità sta in ciò che:

$$37 \times 3 = 111$$

per cui, ad esempio:

$$37 \times 15 = 37 \times 3 \times 5 = 111 \times 5 \text{ ecc.}$$

$$37 = 3^2 + 7^2 - 3 \cdot 7 \qquad\qquad 37\,(3 + 7) = 3^3 + 7^3$$

$$3 \cdot 7 \cdot 37 = 777$$

Il 37 è il solo numero di due cifre che moltiplicato per la somma delle sue cifre dia un prodotto uguale alla somma dei cubi di tali cifre, ossia $370 = 27 + 343$.

Sul numero 45.

Consideriamo il numero 987654321 costituito dalle 9 cifre significative, in senso inverso; e l'altro numero 123456789 costituito dalle stesse cifre nell'ordine naturale. La somma delle cifre nei due numeri è 45; la differenza dei due numeri è 864197532 costituita come essi dalle 9 cifre significative, ma in ordine diverso.

Il numero 45 si può scomporre (1) in quattro numeri (8, 12, 5 e 20) tali che:

$$8 + 2 = 10$$
$$12 - 2 = 10$$
$$5 \times 2 = 10$$
$$20 : 2 = 10$$

---

(1) In altro paragrafo diamo la generalizzazione di questo genere di scomposizione di numeri.

Sul numero 100.

Questo numero si può scomporre (in modo analogo al 45) in quattro numeri (12, 20, 4 e 64) tali che:

$$12 + 4 = 16$$
$$20 - 4 = 16$$
$$4 \times 4 = 16$$
$$64 : 3 = 16$$

Si può scrivere 100 usando 5 volte la stessa cifra, nei modi seguenti:

$$100 = 111 - 11$$
$$100 = 3 \times 33 + \frac{3}{3}$$
$$100 = 5 \times 5 \times 5 - 5 \times 5$$
$$100 = (5 + 5 + 5 + 5)\ 5$$

Si può scrivere 100 in vari modi usando le 9 cifre significative, senza ripetizioni (v. pag. 148):

$$100 = 74 + 25 + \frac{3}{6} + \frac{9}{18} \qquad 100 = 98 + 1 + \frac{3}{6} + \frac{27}{54}$$

$$100 = 95 + 4 + \frac{38}{76} + \frac{1}{2} \qquad 100 = 91 + \frac{7524}{836}$$

$$100 = 91 + \frac{5742}{638} \qquad 100 = 91 + \frac{5823}{647}$$

$$100 = 94 + \frac{1578}{263} \qquad 100 = 96 + \frac{1428}{357}$$

$$100 = 96 + \frac{2148}{537} \qquad 100 = 96 + \frac{1752}{438}$$

Sul numero 143.

Moltiplicando 143 per ciascuno dei 999 primi multipli di 7, ognuno dei prodotti ottenuti sarà costituito da due numeri identici corrispondenti precisamente al numero d'ordine del multiplo di 7 usato come multiplicatore.

Esempio.

$$143 \times (\overline{238} \times 7) = 143 \times 1666 = \overline{238}\,\overline{238}$$

Per ispiegare tale risultato si osservi che si può scrivere:

$$143 \times 238 \times 7 = 143 \times 7 \times 238 = 1001 \times 238 = 1000 \times 238 + 238$$

Quando si tratti d'un multiplo di 7 il cui ordine sia dato da un numero avente meno di tre cifre, le due parti del prodotto potranno essere separate da uno o più zeri; così:

$$143 \times (26 \times 7) = 26026$$

Osservazioni. — Risultati analoghi si ottengono moltiplicando per 77 i 999 primi multipli di 13 e per 91 i 999 primi multipli di 11. Infatti:

$$1001 = 7 \times 11 \times 13$$

dunque 1001 è divisibile per:

$$7 \times 11 = 77 \text{ e per } 13$$

nonchè per:

$$7 \times 13 = 91 \text{ e per } 11$$

Si può poi generalizzare osservando che:

$$10001 = 73 \times 137$$
$$100001 = 11 \times 9091 \;\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

Ne risulta che i prodotti di 137 per i 9999 primi multipli di 73 di 9091 per i 99999 primi multipli di 11, ... sono composti di due parti identiche. Così:

$$9091 \times (\overline{478} \times 11) = \overline{478}00\overline{478}$$
$$9091 \times (\overline{57642} \times 11) = \overline{57642}\;\overline{57642}$$

Sul numero 225.

Scomporre 225 in una somma di numeri costituiti, in complesso, dalle 9 cifre significative, senza ripetizioni.

$$225 = 1 + 23 + 45 + 67 + 89$$

Ciascuno di questi numeri si ottiene aggiungendo 22 al precedente. Si può anche scomporre così:

$$225 = 1 + 35 + 42 + 69 + 78 \text{ ecc.}$$

Naturalmente altri numeri si possono scomporre in modo analogo. Essi però debbono essere multipli di 9 poichè:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = \text{multiplo di } 9.$$

Esempii:

$$162 = 9 + 12 + 36 + 48 + 57$$
$$171 = 2 + 18 + 39 + 47 + 65$$
$$810 = 195 + 267 + 348$$

Sul numero 142857.

Esaminiamo i 6 primi multipli di questo numero:

1 4 2 8 5 7	2 8 5 7 1 4	4 2 8 5 7 1
5 7 1 4 2 8	7 1 4 2 8 5	8 5 7 1 4 2

Essi sono composti delle medesime cifre nel medesimo ordine, sì che si può passare dall'uno all'altro per semplice trasposizione di cifre.

Inoltre essi sono formati da gruppi di due cifre multipli pari di 7 o multipli pari più 1. Così 171428 è composto dei gruppi:

$$57 = 7 \times 8 + 1 \qquad 71 = 7 \times 10 + 1$$
$$14 = 7 \times 2 \qquad 42 = 7 \times 6$$
$$28 = 7 \times 4$$

Moltiplicando 142857 per 326451 si ha:

$$\begin{array}{r}
142857 \\
326451 \\
\hline
142857 \\
714285 \\
571428 \\
857142 \\
285714 \\
428571 \\
\hline
46635810507
\end{array}$$

Le cifre delle colonne verticali sono identiche, ciascun prodotto comincia coe la cifra con cui termina il precedente; le 6 prime cifre di ciascun prodotto a cominciare dal basso formano l'ultimo prodotto 4 2 8 5 7 1; così le 6 seconde cifre costituiscono il penultimo 2 8 5 7 1 4, ecc.

Sul numero 12345679.

Questo numero è formato dalle cifre progressive nel loro ordine naturale, meno l'8. Se lo si moltiplica per un termine qualunque della progressione aritmetica:

$$\div\, 9 \cdot 18 \cdot 27 \cdot 36 \cdot 45 \cdot 54 \cdot 63 \cdot 72 \cdot 81$$

la cui ragione è 9, il prodotto risulterà composto di 9 cifre uguali. Così:

$$12345679 \times 54 = 666666666$$

Si osserva che la cifra 6 indica il posto del termine 54 della progressione (il 6°) e risulta pure come differenza tra la decina superiore e detto termine, ossia:

$$6 = 60 - 54$$

Per ispiegare il risultato ottenuto si osservi che:

$$12345679 \times 9 = 111111111$$

e

$$12345679 \times 54 = 12345679 \times 9 \times 6 = 111111111 \times 6$$

La somma dei numeri naturali.

I numeri interi naturali costituiscono una progressione aritmetica di ragione 1. La fig. 114 rappresenta nella sua parte sinistra, con punti neri, i primi sei di tali numeri.

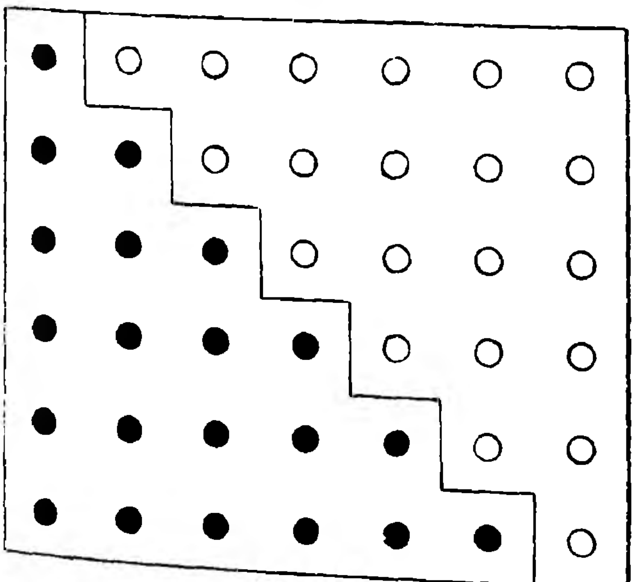


Fig. 114.

Per averne la somma possiamo accoppiare una figura simmetrica di quella a punti neri con questa, in modo da avere appunto la fig. 114. Essa è costituita, in totale, di $6 \times 7 = 42$

punti (neri e bianchi); dunque la somma cercata sarà la metà di 42 ossia 21. Sicchè, in generale, la somma dei primi n numeri interi naturali, sarà data dalla formola:

$$\frac{n\,(n+1)}{2}$$

La somma, ad esempio, dei 90 numeri del lotto è data da:

$$\frac{90 \cdot 91}{2} = 4095$$

Dalla fig. 115 apparisce chiaramente come la somma di n numeri dispari naturali a partire da 1 sia n^2. Le linee punteg-

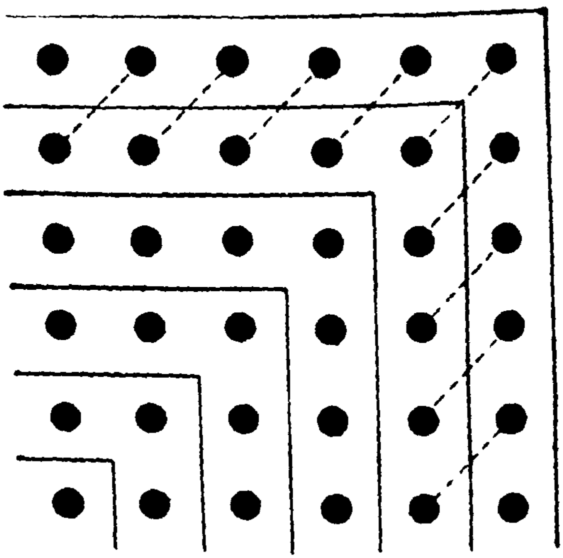


Fig. 115.

giate mettono in evidenza che una *fila ad angolo* differisce da quella ad essa adiacente per due unità.

Il numero *e*.

Regola mnemonica per il valore del numero e (base dei logaritmi neperiani):

	Tu	aideras	à	rappeler	ta	quantité	à	beaucoup
$e =$	2	7	1	8	2	8	1	8
				de	docteurs	amis		
				2	8	4		

Il numero delle lettere d'ogni singola parola della frase corrisponde alle cifre del numero e, ordinatamente.

I. — *Trovare un numero uguale a 7 volte la cifra delle proprie unità.*

Questo numero ha evidentemente due sole cifre: le sue decine ne sono i $\frac{6}{7}$ e valgono 6 volte le unità. La cifra delle decine è dunque i $\frac{6}{10}$ ossia i $\frac{3}{5}$ della cifra delle unità; questa non può dunque essere che 5 o zero, e la cifra delle decine 3 per cui il numero cercato è 35.

Nota. — Trattando il problema in generale si può stabilire la seguente espressione risolutiva:

$$d = \frac{u\,(m-1)}{10}$$

nella quale d è il numero delle decine, u quelle delle unitò, m il numero di volte che il numero cercato deve contenere le proprie unità.

Per $m = 7$ si ha appunto:

$$d = \frac{3}{5}\,u$$

nella quale, per avere d intero, occorre che sia:

$u = 5$ da cui $d = 3$ ed $N = 35$

II. — *Trovare un numero di due cifre, uguale al doppio prodotto delle proprie cifre.*

Tratteremo la questione algebricamente e aritmeticamente.

1.° *Algebricamente.* — Sia d la cifra delle decine, u quella delle unità; si avrà:

$$10\,d + u = 2\,du$$

da cui:

$$d = \frac{u}{2\,(u-5)}$$

Dovendo d essere una delle cifre significative, non sarà assegnabile ad u che il valore 6 al quale corrisponde $d = 3$; per cui il numero cercato non può essere che 36.

2.ª *Aritmeticamente.* — Il numero cercato essendo pari è terminato da 2, 4, 6 od 8, dovendosi escludere lo zero nel nostro caso.

Ora, secondo l'ipotesi, questo numero è divisibile per la cifra delle proprie decine. Occorre dunque che la cifra delle sue unità sia divisibile per la cifra delle decine; la prima essendo 2, 4, 6 od 8 la seconda sarà 1, 2, 3, 4, 6 od 8. Il numero cercato è dunque fra i seguenti:

12 14 16 18 22 24 26 28

36 44 48 66 88

D'altra parte si osserva che il numero di 2 cifre formato dalle decine del numero cercato deve essere divisibile per la cifra delle unità, poichè ogni numero che divide una somma di due numeri ed uno dei numeri della somma, divide pure l'altro numero.

Restano dunque solamente:

12 22 24 36 44 48 66 88

Il numero cercato non può essere 12, il doppio di 2 essendo inferiore a 10, nè 22, 44, 66, 88 che sono multipli di 11, numero primo superiore a 10. Fra i numeri restanti 24, 36 e 48 è facile vedere che solo il 36 soddisfa al problema.

III. — *Sia un numero qualsiasi. Si scriva al disotto lo stesso numero ponendone la prima cifra sotto la quarta del primo. Si eseguisca la somma e si divida poi questa per 7, 11 e 13. Il quoziente in ultimo attenuto sarà precisamente il numero primitivo.*

Esempio. Sia il numero 86753:

$$\begin{array}{r} 86753 \\ 86753 \\ \hline 86839753 \end{array}$$

$$86839753 : 7 = 12405679$$

$$12405679 : 11 = 1127789$$

$$1127789 : 13 = 86753$$

La spiegazione è assai facile.

Infatti si ha:

$$86753 \times 1000 + 86753 = 86753 \times 1001$$

ed essendo:

$$1001 = 7 \times 11 \times 13$$

si può scrivere:

$$86753 \times 1001 = 86753\,(7 \times 11 \times 13)$$

Nota. — Nel caso d'un numero di 3 cifre l'enunciato si semplifica perchè basta scrivere il numero alla propria destra, ecc.

IV. — *Quanti numeri interi vi sono, composti di un determinato numero di cifre?*

Vi sono 9×1 ossia 9×10^0 numeri di una cifra. I numeri di due cifre cominciano col 10 e terminano al 99: ve ne sono dunque 9×10^1; quelli di tre cifre sono 9×10^2 e così via.

V. — *Quante cifre occorrono per iscrivere tutti gli interi composti d'un determinato numero di cifre?*.

Da quanto precede si vede che per iscrivere tutti gli interi rispettivamente di 1, 2, 3, 4 · · · · cifre, occorrono 9; $2 \times 9 \times 10$; $3 \times 9 \times 10^2$; $4 \times 9 \times 10^3$ · · · · cifre.

VI. — *Quante cifre occorrono per iscrivere tutti i numeri dall'1 fino al 99999 · · · · inclusivamente?*

Da quanto precede si deduce che per i numeri di:

1 cifra	occorrono	$9 \times 10^0 =$	1×9	cifre
2 »	»	$2 \times 9 \times 10^1 =$	20×9	»
3 »	»	$3 \times 9 \times 10^2 =$	300×9	»
4 »	»	$4 \times 9 \times 10^3 =$	4000×9	»

Dunque per iscrivere tutti gli interi dall'1 al 99999 · · · · ossia tutti gli interi aventi 1, 2, 3, 4, 5 · · · · cifre occorre un numero di cifre dato da · · · · 54321×9, il numero · · · · 54321 essendo formato dalla serie naturale degli interi e contenendo tanti di questi ultimi quante sono le cifre 9 contenute nel numero 99999 · · · ·

VII. — *Essendo stati scritti tutti i numeri interi gli uni di seguito agli altri e nel loro ordine naturale, trovare una cifra di posizione determinata, per esempio la 552715ma.*

I numeri aventi 1, 2, 3, 4, 5, 6 cifre hanno in totale:

$$654321 \times 9 = 5888889 \text{ cifre.}$$

per quanto si è sopra esposto (vedi n.° VI.).

I numeri aventi 1, 2, 3, 4, 5 cifre hanno in totale:

$$54321 \times 9 = 488889 \text{ cifre.}$$

La cifra considerata appartiene dunque ad un numero di 6 cifre; la serie data essendo supposto che arrivi a tale ultimo numero, i numeri di tale serie hanno dunque:

$$552715 - 488889 = 63826 \text{ cifre.}$$

D'altronde si ha:

$$63826 = 10637 \times 6 + 4$$

La cifra cercata è per conseguenza la quarta del 10638° numero della serie. Ora il primo numero di 6 cifre essendo 100000, il secondo 100000 + 1, il 10638mo è 110637. Sicchè la cifra cercata è 6.

VIII. — *Quante cifre vi sono nella serie dei numeri dall'1 ad N inclusivamente?*

Immaginiamo scritto uno sotto l'altro tutti i numeri dall'1 ad N; quest'ultimo lo supporremo di m cifre e supporremo ancora di avere completato ciascun numero con zeri alla sinistra così da avere un quadro di numeri composti di ugual numero di cifre; completiamolo poi con una prima fila di zeri.

Avremo il numero X cercato, calcolando quanti sono i caratteri contenuti in tale quadro, che sarà $m(N+1)$, e sottraendone poi tutti gli zeri aggiunti. Quanto a questi osserviamo che da 10^{m-1} ad N non ne sono stati aggiunti. Al disopra di 10^{m-1}, nella prima colonna di sinistra furono aggiunti 10^{m-1} zeri; al disopra di 10^{m-2}, nella seconda colonna, ne abbiamo aggiunto 10^{m-2}, ecc. Al disopra di 10, nella seconda colonna a destra ne abbiamo aggiunto 10; al disopra di 1, nella prima colonna a destra ne abbiamo aggiunto 1; dunque in tutto furono aggiunti:

$$10^{m-1} + 10^{m-2} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + 10 + 1 \text{ zeri}$$

ossia:

$$\frac{10^m - 1}{9}$$

Cosicchè:

$$X = m(N+1) - \frac{10^m - 1}{9}$$

Questa formula si può esprimere così:

Per avere il numero delle cifre che compongono la serie degli N primi numeri, basta moltiplicare $N+1$ per il numero delle cifre che compongono il numero N, e sottrarre dal prodotto un numero formato di tanti 1 quante sono le cifre di N.

Così nella serie dei primi 200 numeri, abbiamo:

$$3 \times 201 - 111 = 492 \text{ cifre}$$

Nel caso particolare in cui $N = 10^m - 1$, si ha:

$$X = m \times 10^m - \frac{10^m - 1}{9}$$

che si può esprimere dicendo che basta sottrarre da un numero composto di m seguito da m zeri, un numero formato di m volte la cifra 1. La differenza avrà per prima cifra a destra un 9; avrà poi $m - 1$ volte la cifra 8; la prima cifra a sinistra sarà $m - 1$ se m non ha che una sola cifra, altrimenti le prime cifre a sinistra formeranno il numero $m - 1$.

Esempii:

$N = 99$ $\quad X = 200 - 11 = 189$

$N = 999$ $\quad X = 3000 - 111 = 2889$

$N = 999999999999$ $\quad X = 12000000000000 - 111111111111 = 11888888888889$

XI. – *Usando i dieci caratteri dallo zero al 9, ma ciascuno una sola volta, formare i numeri la cui somma sia uguale all'unità, essendo ammessa la forma frazionaria.*

Esempio. Una soluzione è data da:

$$\frac{35}{70} + \frac{148}{296} = 1$$

X. — *Problema simile al precedente nel quale la somma debba essere 100 anzichè l'unità* (v. pag. 138).

Esempio:

$$50 + 49 + \frac{1}{2} + \frac{38}{76} = 100$$

XI. — *Formare, con le nove cifre significative, quattro numeri la cui somma sia 100* (v. pag. 138).

Ecco due soluzioni del problema:

$$15 + 78 + \sqrt[2]{9} + \sqrt[3]{64} = 100$$

XII. — *Scrivere il numero 31 usando cinque volte la cifra 3 solamente.*

$$31 = 3 + \frac{3}{3} + 3^3$$

XIII. — *Formare il numero 14 con cinque cifre dispari.*

$$14 = 1 + 1 + 1 + 11$$

XIV. — *Formare 34 usando quattro volte la cifra 3.*

$$34 = 33 + \frac{3}{3}$$

XV. — *Formare 20 con quattro 9.*

$$9 + \frac{99}{9} = 20$$

XVI. — *Formare 100 con quattro 9* (v. pag. 138).

$$99 + \frac{9}{9} = 100$$

Prodotti singolari.

I numeri di tre cifre che ammettono i fattori 7, 11 e 13, il cui prodotto è 1001, danno prodotti composti di gruppi uguali di tre cifre.

Esempii:

$$231 \times 741 = 171171$$

$$231 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \qquad 741 = 3 \cdot 13 \cdot 19$$

$$429 \times 588 = 252252$$

$$468 \times 539 = 252252$$

$$294 \times 858 = 252252$$

$$182 \times 704 = 128128$$

$$672 \times 858 = 576576$$

I. — *Perchè i prodotti del numero 142857 per 1, 2, 3, 4, 5 e 6 sono composti delle medesime cifre, che si seguono nell'ordine circolare indicato in figura, e perchè il prodotto per 7 è composto di tanti 9?*

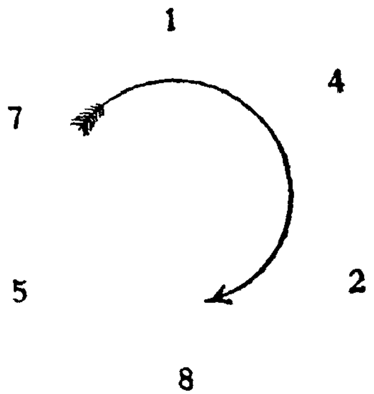


Fig. 116.

Osserviamo che 142857 è il periodo della frazione decimale periodica derivante dall'ordinaria:

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857 \cdot 142857 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

quindi:

$$\frac{1}{7}\times 2=\frac{2}{7}=\frac{100}{7}-\frac{98}{7}=\frac{100}{7}-14=$$

$$=14{,}285714285714\,.\,.\,.\,.\,.\,.-14=0{,}285714285714\,.\,.\,.\,.\,.$$

$$0{,}142857142857\,.\,.\,.\,.\,.\,.\times 2=0{,}285714285714\,.\,.\,.\,.\,.$$

da cui:

$$142857\times 2=285714$$

$$\frac{1}{7}\times 3=\frac{3}{7}=\frac{10}{7}-\frac{7}{7}=\frac{10}{7}-1=$$

$$=1{,}428571428571\,.\,.\,.\,.\,.\,.-1=0{,}428571428571\,.\,.\,.\,.\,.$$

$$0{,}142857142857\,.\,.\,.\,.\,.\,.\times 3=0{,}428571428571\,.\,.\,.\,.\,.$$

da cui:

$$142857\times 3=428571$$

Nello stesso modo:

$$\frac{1}{7}\times 4=\frac{4}{7}=\frac{10000}{7}-\frac{9996}{7}=\frac{10000}{7}-1428=0{,}571428571428\,.\,.\,.\,.$$

$$142857\times 4=571428$$

$$\frac{5}{7}=\frac{100000}{7}-\frac{99995}{7}=\frac{100000}{7}-14285=0{,}714285714285\,.\,.\,.\,.$$

$$\frac{6}{7}=\frac{1000}{7}-\frac{994}{7}=\frac{1000}{7}-142=0{,}857142857142\,.\,.\,.\,.\,.$$

Infine:

$$\frac{1}{7}=\frac{142857}{999999} \qquad \frac{1}{7}\times 7=\frac{142857\times 7}{999999}=1$$

da cui:

$$142857\times 7=999999$$

II. — *Prodotti nei quali la somma delle cifre uguaglia quella delle cifre dei fattori.*

Indichiamo solo qualche esempio fra i moltissimi:

$51\times 84=4284$ $\quad 42\times 84=3528$ $\quad 6\times 48=288$

$41\times 89=3649$ $\quad 51\times 75=3825$ $\quad 33\times 75=2475$

$11\times 47=517$ $\quad 71\times 59=4189$

III. — *Prodotti costituiti delle stesse cifre dei fattori.*

21 × 87 = 1827	336 × 951 = 319536
27 × 81 = 2187	951 × 588 = 559188
465 × 831 = 386415	152 × 761 = 115672
201 × 627 = 126027	281 × 344 = 124483
201 × 897 = 180297	902 × 875 = 789250
591 × 327 = 193257	686 × 533 = 365638
701 × 167 = 117067	317 × 425 = 134725
824 × 512 = 125248	602 × 437 = 263074
317 × 461 = 146137	534 × 195 = 315594
992 × 776 = 769792	321 × 678 = 217638
524 × 623 = 326452	843 × 876 = 738468
251 × 608 = 152608	321 × 975 = 312975
161 × 725 = 116725	489 × 582 = 284598
231 × 543 = 125433	807 × 984 = 794088
825 × 957 = 789525	681 × 759 = 516879
906 × 894 = 809964	366 × 948 = 346968
231 × 759 = 175329	341 × 626 = 213466
35 × 41 = 1435	431 × 725 = 312475
15 × 93 = 1395	356 × 431 = 153436
381 × 969 = 369189	431 × 707 = 304717
255 × 807 = 205785	431 × 878 = 378418

IV. — *Di alcuni prodotti singolari:*

12345679 × 9 = 111111111

12345679 × 8 = 98765432

1 × 9 + 2 = 11

12 × 9 + 3 = 111

123 × 9 + 4 = 1111

1234 × 9 + 5 = 11111

12345 × 9 + 6 = 111111

123456 × 9 + 7 = 1111111

1234567 × 9 + 8 = 11111111

12345678 × 9 + 9 = 111111111

9 × 9 + 7 = 88

98 × 9 + 6 = 888

987 × 9 + 5 = 8888

9876 × 9 + 4 = 88888

98765 × 9 + 3 = 888888

987654 × 9 + 2 = 8888888

9876543 × 9 + 1 = 88888888

98765432 × 9 + 0 = 888888888

$$
\begin{array}{r}
1 \times 8 + 1 = 9 \\
12 \times 8 + 2 = 98 \\
123 \times 8 + 3 = 987 \\
1234 \times 8 + 4 = 9876 \\
12345 \times 8 + 5 = 98765 \\
123456 \times 8 + 6 = 987654 \\
1234567 \times 8 + 7 = 9876543 \\
12345678 \times 3 + 8 = 98765432 \\
123456789 \times 8 + 9 = 987654321
\end{array}
$$

Indovinare un numero pensato.

I problemi di questo tipo, che facevano *furore* quando gli studi in genere e quello dell'aritmetica in ispecie, erano poco diffusi, non potrebbero ora destare una così generale sorpresa ed ammirazione.

Nondimeno presentano sempre qualche interesse poichè richiedono in chi li spiega una certa prontezza di calcolo che non è di tutti.

Quanto *a regole propriamente* dette per risolvere questo genere di questiòni non ve ne sono, ma solamente *metodi* ossia modi di procedere che possono variare a piacere, sì che non riuscirà difficile a chi abbia qualche dimestichezza con l'algebra il crearsene di proprii.

Il procedimento, come è noto, consiste nel fare eseguire da una persona una serie di operazioni (che le si vengono indicando mano a mano) sopra un numero da essa pensato, facendosi in ultimo indicare il risultato finale, oppure taluni risultati parziali delle successive operazioni, da cui si deduce poi con adatti calcoli il numero pensato.

Il *Ball*, dal quale ho ricavato buona parte di quèsto paragrafo, indica i seguenti primi cinque metodi.

Primò metodo.

1.° Far triplicare il numero.

2.° Se tale prodotto è pari, farne prendere la metà; se è dispari farvi prima aggiungere 1 e poi prenderne la metà.

3.° Far moltiplicare il risultato per 3.

4.° Far sottrarre dal prodotto ottenuto, tante volte 9 quanto è possibile, chiedendo *quante volte la sottrazione* ha potuto esser fatta, e sia per esempio *n* tale numero.

5.° Si potrà affermare che il numero pensato è $2n$ oppure $n+1$ secondo che il risultato della prima operazione era pari o dispari.

Infatti ogni numero pari è della forma $2n$; perciò le operazioni che si sono fatte eseguire sul numero dalla persona che lo ha pensato danno questi risultati:

$$6n \qquad \frac{1}{2}6n = 3n \qquad 3n \times 3 = 9n \qquad \frac{9n}{9} = n$$

Se il numero è dispari la sua forma generale è $2n+1$ epperò i risultati delle operazioni fatte eseguire su di esso sono i seguenti:

$$(2n+1)\times 3 = 6n+3 \begin{pmatrix}\text{num.}\\ \text{dispari}\end{pmatrix} \qquad \frac{1}{2}(6n+3+1) = 3n+2$$

$$(3n+2)\times 3 = 9n+6 \qquad \frac{9n+6}{9} = n + \text{resto } 6$$

quindi il numero cercato è $2n+1$.

Secondo metodo.

1.° Si fa moltiplicare il numero pensato per 5.
2.° Si fa aggiungere 6 al prodotto.
3.° Si fa moltiplicare tale somma per 4.
4.° Si fa aggiungere 9 al nuovo prodotto.
5.° Si fa moltiplicare per 5 l'ultima somma ottenuta.

Reso noto il risultato così ottenuto basterà sottrarre da esso 165 e dividere per 100 il resto, per ottenere il numero pensato.

La spiegazione del procedimento è facile; le operazioni eseguite sul numero n danno infatti questi risultati:

$$5n \qquad 5n+6 \qquad (5n+6)\times 4 = 20n+24$$

$$20n+24+9 = 20n+33 \qquad (20n+33)\times 5 = 100n+165$$

d'onde si deduce la regola.

Terzo metodo.

1.° Si fa moltiplicare il numero pensato per un numero qualunque, ma noto, a e si ha $(n \cdot a)$

2.° Si fa dividere il prodotto per un secondo numero noto, b; $\left(n \frac{a}{b}\right)$.

3.° Si fa moltiplicare il quoziente per un terzo numero noto, c; $\left(n \frac{a}{b} c\right)$.

4.° Si fa dividere il risultato per un quarto numero noto, d; $\left(n \frac{a\,c}{b\,d}\right)$.

5.° Si fa dividere questo risultato per il numero pensato, n; $\left(\frac{a\,c}{b\,d}\right)$.

6.° Si fa aggiungere al quoziente il numero pensato e si domanda il risultato finale, che sarà $\left(\frac{a\,c}{b\,d} + n\right)$.

7.° Sottraendo mentalmente dal risultato che verrà così esposto, la quantità nota $\frac{a\,c}{b\,d}$ resterà evidentemente il numero pensato.

Quarto metodo. — *Si propone ad una persona di pensare un numero inferiore al 90, e poi:*

1.° Lo si fa moltiplicare per 10 e si fa aggiungere al prodotto un numero qualunque a, che dovrà essere noto ed inferiore al 10.

2.° Si fa dividere per 3 la somma ottenuta e si prende nota del resto dell'operazione, b.

3.° Si fa moltiplicare il quoziente precedente per 10 e si fa aggiungere al prodotto un numero arbitrario, ma noto, c, minore di 10.

4.° Si fa dividere il risultato per 3 e si prende nota del resto d.

5.° Sia poi e la terza cifra, a partire da destra, del quoziente della divisione.

Conoscendo a, b, c, d, e, riesce facile determinare il numero pensato. Infatti esso è della forma $9x + y$ e, per ipotesi, si ha:

$$x \leqq 9 \qquad \text{con} \qquad y \leqq 8$$

Se r è il resto ottenuto dividendo per 9 l'espressione:

$$a - b + 3(c - d) \qquad \text{si ha} \qquad x = e \qquad y = 9 - r$$

Il numero pensato essendo $9x + y$, la prima operazione ci dà:

$$(9x + y) \times 10 + a \qquad \text{ossia} \qquad 90x + 10y + a$$

od anche:

$$90x + 9y + y + a$$

che è della forma:

$$\text{mult. } 9 + (y + a)$$

Il resto della divisione per 3 sarà quindi lo stesso della divisione di $y + a$ per 3 e si può porre:

$$y + a = 3p + b \quad (b \text{ essendo più piccolo di } 3)$$

da cui:

$$(9x + y) \times 10 + a = 90x + 9y + 3p + b$$

La divisione per 3 ci dà per quoziente:

$$30x + 3y + p \qquad \text{e per resto } b$$

Si fa poi moltiplicare questo quoziente per 10 e aggiungere al prodotto c, minore di 10, il che ci dà:

$$300x + 30y + 10p + c$$

che si può mettere sotto la forma:

$$300x + 30y + 9p + p + c$$

Il resto della divisione per 3 di questo nuovo numero sarà ancora quello della divisione di $p + c \times 3$ e ponendo:

$$p + c = 3q + d$$

si ottiene per quoziente, effettuando l'operazione:

$$100x + 10y + 3p + q \qquad \text{e il resto } d.$$

Essendo $y \leqq 8$ ed $a \leqq 9$ se ne deduce $y + a \leqq 17$ e ne segu $p \leqq 5$. Essendo poi $p \leqq 5$ con $c \leqq 9$ se ne deduce $p + c \leqq 14$ $q \leqq 4$. Si ha quindi:

$$10y + 3p + q \leqq 80 + 15 + 4 \qquad \text{ossia} \qquad 10y + 3p + q \leqq 99$$

Dunque il quozlente $100x + 10y + 8p + q$ non ha che tre cifre. La sua terza cifra a partire da destra è perciò x:

$$e = x$$

Le relazioni $y + a = 3p + b$ $\quad p + c = 3q + b$ danno quest'altra:

$$3p + 3c + y + a = 9q + 3d + 3p + b$$

da cui:

$$a - b + 3(c - d) + y = \text{mult. } 9$$

Essendo $y < 9$, il resto r della divisione per 9 dell'espressione $a - b + 3(c - d)$ è il complemento a 9 del numero y, cioè:

$$y + r = 9 \qquad \text{da cui} \qquad y = 9 - r$$

Con ciò abbiamo supposto:

$$a - b + 3(c - d) \equiv o$$

Se tale espressione fosse negativa si avrebbe $y = r$. Del resto si può evitare che ciò avvenga, assegnando ad a e c valori convenienti. Con questo metodo si possono determinare x ed y e quindi il numero pensato $9x + y$.

Esempio. — Sia 82 il numero pensato:

$$82 \times 10 = 820 \qquad a = 7 \qquad 820 + 7 = 827$$

$$\frac{827}{3} = 275 + \text{resto } 2 \qquad b = 2 \qquad 275 \times 10 = 2750 \qquad c = 8$$

$$2750 + 8 = 2758 \qquad \frac{2758}{3} = 919 + \text{resto } 1 \qquad d = 1$$

$$e = 9 = x \qquad a - b + 3(c - d) = 7 - 2 + 3(8 - 1) = 26$$

$$\frac{26}{9} = 2 + \text{resto } 8 \qquad r = 8 \qquad y = 9 - 8 = 1$$

$$N = 9x + y = 9 \times 9 + 1 = 82$$

Quinto metodo. — *Si faccia pensare un numero minore di 60 e poi:*

1.° Si faccia dividere per 3 e sia a il resto.
2.° Si faccia dividere il numero pensato per 4 e sia b il resto.
3.° Si faccia dividere il numero pensato per 5 e sia c il resto.

Si avrà il numero pensato come *resto* della divisione dell'espressione $40a + 45b + 36c$ per 60.

Esempio. Sia:

$$N = 46 \qquad \frac{46}{3} \text{ dà per resto } a = 1$$

$$\frac{46}{4} \text{ dà per resto } b = 2 \qquad \frac{46}{5} \text{ dà per resto } c = 1$$

$$40a + 45b + 36c = 40 + 90 + 36 = 166$$

$$\frac{166}{60} \text{ dà per resto } 46 = N$$

Questo metodo si può generalizzare così da poterlo applicare ad un numero qualsiasi, ma riesce troppo lungo e quindi poco pratico.

Sesto metodo. — *Indovinare un numero pensato fra 0 e 15 inclusivamente, senza fare alcuna domanda.*

Si comincia col fare aggiungere 1 al numero pensato, poi si fa triplicare la somma; la serie delle operazioni da eseguire si divide allora in 4 periodi distinti:

Primo periodo. Si fa prendere la metà del risultato ottenuto e la si fa moltiplicare per 3.

Secondo periodo. Si fa prendere la metà dell'ultimo risultato e moltiplicare per 3 il risultato ottenuto.

Terzo periodo. Si fa prendere la metà dell'ultimo prodotto.

Quarto periodo. Si fa dividere per 2.

Se i risultati fossero dispari occorrerebbe fare aggiungere 1 prima di far prendere la metà.

Esaminiamo ora i singoli casi:

Primo periodo. Sia N il numero pensato:

Si fa prendere la metà di $3\,(N + 1)$, il che si può fare solo quando N sia dispari; in tal modo fin dal primo periodo si sa se N è pari o dispari.

Secondo periodo. Sia N dispari, cioè $N = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15$:

Si fa dividere per 2 il numero $\frac{1}{2}(N + 1)\,3^2$ e il risultato ottenuto viene moltiplicato per 3.

Se è possibile effettuare la divisione:

$$N + 1 = \text{mult. di } 4 \qquad \text{ossia} \qquad N = 3,\ 7,\ 11 \text{ o } 15.$$

Se la divisione non si può fare, si ha:

$$N = 1,\ 5,\ 9 \text{ o } 13$$

Dunque, dopo il secondo periodo la scelta resta limitata fra 4 numeri.

Terzo periodo.

1.° Supponiamo che si sia potuto effettuare la divisione per due di:

$$\frac{1}{2}(N+1)\,3^2; \qquad \frac{1}{2^2}(N+1)\,3^2$$

è intero, per cui:

$$N = 3,\ 7,\ 11 \text{ o } 15$$

Si ha ancora da dividere per 2 l'espressione:

$$\frac{1}{2^2}(N+1)\,3^3$$

a) La divisione si può fare e allora:

$$N + 1 = \text{mult. di } 8 \qquad \text{quindi} \qquad N = 7 \text{ o } 15$$

b) La divisione non si può fare e allora si divide per 2 l'espressione:

$$\frac{N+1}{2^2} \times 3^3 + 1 \qquad \text{e} \qquad N = 3 \text{ oppure } 11$$

2.° Supponiamo che $\frac{N+1}{2} \times 3^2$ non sia divisibile per 2; si ha da scegliere fra 1, 5, 9 o 13 e si fa dividere per 2 l'espressione:

$$\frac{N+1}{2} \times 3^2 + 1$$

Il risultato, della forma:

$$\frac{(N+1)\,3^2 + 2}{2^2}$$

lo si fa moltiplicare per 3 e si ha:

$$\frac{(N+1)\,3^3 + 2 \times 3}{2^2}$$

espressione che si tratta di dividere per 2.

Essa si può scrivere:

$$\frac{(27\,N+1)+32}{2^3}$$

c) Se la divisione è possibile:

$$27\,N+1 = \text{mult. di } 8 \qquad \text{allora} \qquad N=5 \text{ o } 13$$

d) Se non è possibile, si fa dividere per 2 l'espressione:

$$\frac{(N+1)\,3^3+2\times 3}{2^3}+1 \qquad \text{ed} \qquad N=1 \text{ o } 9$$

Dunque dopo il terzo periodo, la scelta è limitata fra due numeri.

Quarto periodo.

1.° Sia l'espressione $\frac{(N+1)\,3^3}{2^3}$ intera. Si divide per 2.

Se la divisione è possibile:

$$N+1 = \text{mult. di } 16 \qquad \text{ed} \qquad N=15$$

Se la divisione non è possibile, si divide per 2:

$$\frac{(N+1)\,3^3}{2^3}+1 \qquad \text{o} \qquad \frac{3\,(9\,N+1)+32}{2^3}$$

quindi:

$$9\,N+1 = \text{mult. di } 16 \qquad \text{da cui} \qquad N=7$$

2.° Se l'espressione $\frac{(N+1)\,3^3}{2^3}$ non è divisibile per due, è l'altra espressione:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{(N+1)\,3^3}{2^3}+1\right] \qquad \text{ossia} \qquad \frac{(N+1)\,3^3+2^3}{2^3}$$

che si tratta di dividere per due.

Se la divisione è possibile:

$$\frac{(27\,N-1)+32}{2^4}$$

rappresenta un intero, e:

$$27\,N-1 = \text{mult. di } 16 \qquad \text{da cui} \qquad N=3$$

Se la divisione non è possibile, l'espressione:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{(N+1)\,3^3+2^2}{2^3}+1\right] \qquad \text{o} \qquad \frac{(27\,N+7)+32}{2^4}$$

è intera, e

$$27\,N+7 = \text{mult. di } 16 \qquad \text{da cui} \qquad N = 11$$

3.° L'espressione $\frac{(27\,N+1)+32}{2^3}$ corrisponde ad un numero intero. Si fa dividere tale numero per due.

Se la divisione è possibile:

$$27\,N+1 = \text{mult. di } 16 \qquad \text{ed} \qquad N = 13$$

Se la divisione non è possibile, l'espressione:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{(27\,N+1)+32}{2^3}+1\right] \qquad \text{o} \qquad \frac{9\,(3\,N+1)+32}{2^4}$$

rappresenta un numero intero, sicchè:

$$3\,N+1 = \text{mult. di } 16 \qquad \text{ed} \qquad N = 15$$

4.° L'espressione:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{(N+1)\,3^3+2\cdot 3}{2^2}+1\right] \qquad \text{o} \qquad \frac{(27\,N+5)+32}{2^3}$$

viene divisa per due.

Se la divisione si può effettuare:

$$27\,N+5 = \text{mult. di } 16 \qquad \text{ed} \qquad N = 1$$

Se la divisione non è possibile $N=9$. Analoga discussione si farebbe nel caso di N pari.

Daremo pure una regola mnemonica costituita da otto nomi di uomini celebri italiani, di tre sillabe.

Quelle contenenti la vocale *i* indicano i periodi nei quali è occorsa l'aggiunta dell'unità per poter prendere la metà del risultato.

Il quarto periodo decide della scelta fra i due numeri attribuiti a ciascuno degli otto nomi prescelti; se è possibile prendere la metà senza aggiungere 1, si sceglie il numero della seconda colonna e in caso contrario, quello della prima.

Ri - en - zi	0 - 8
Cel - li - ni	9 - 1
Ti - zia - no	10 - 2
Mar - co - ni	11 - 3
Vi - gno - la	12 - 4
Ga - li - leo	5 - 13
Vir - gi - lio	14 - 6
Co - lom - bo	7 - 15

Esempio. Sia 9 il numero pensato. Avremo:

$$9 + 1 = 10 \qquad 3 \times 10 = 30$$

Primo periodo. — La divisione di 30 per 2 è possibile, dunque il numero pensato sarà uno di quelli che corrispondono ai quattro nomi la cui prima sillaba non contiene *i*:

(1)

Cel - li - ni	9 - 1
Mar - co - ni	11 - 3
Ga - li - leo	5 - 13
Co - lom - bo	7 - 15

$$\frac{30}{2} = 15 \qquad 15 \times 3 = 45$$

Secondo periodo. — Qui la divisione di 45 per 2 non è possibile; perciò il numero pensato apparterrà ai corrispondenti a quelli fra i quattro nomi (1) la cui seconda sillaba contiene la *i*:

Cel - li - ni	9 - 1
Ga - li - leo	5 - 13

$$45 + 1 = 46 \qquad \frac{46}{2} = 23 \qquad 23 \times 3 = 69$$

Terzo periodo. — Neanche il 69 è divisibile per 2, quindi il numero pensato sarà uno dei due corrispondenti al nome Cel - li - ni la cui terza sillaba contiene una *i*, cioè 9 od 1:

$$\frac{69 + 1}{2} = 35$$

Quarto periodo. — La divisione di 35 per 2 non è possibile, quiedi la cifra che si deve scegliere è quella della prima colonna, ossia 9.

Indovinelli su due numeri.

1.° Consideriamo due numeri, uno pari e l'altro dispari. Invitiamo una persona A a sceglierne uno, mentre un'altra persona B prenderà l'altro. Si tratta di trovare quale è il numero scelto da A.

Dite ad A di moltiplicare il numero che ha scelto per un numero pari, per esempio per 2, e a B di moltiplicare il suo per un numero dispari, per esempio per 3. Fate sommare i risultati e chiedete quale sia tale somma. Se essa è pari, A aveva scelto il numero dispari e viceversa se la somma è dispari; il che è evidente.

2.° Siano due numeri m ed n primi fra loro, ma tali che uno almeno non sia primo assoluto. Sia p un divisore di n.

Procedete come nel caso precedente. Dite alla persona A di scegliere uno dei numeri m od n e a B di prendere l'altro. Sia q un numero primo con p. Fate moltiplicare per q il numero scelto da A e per p quello preso da B; fate sommare i risultati e chiedete il totale. Secondo che questa somma è, o non è divisibile per p, la persona A ha scelto il numero n ovvero il numero m.

Esempio. Siano:

$$m = 11 \qquad n = 35 \qquad p = 5 \qquad q = 3$$

Supponiamo che A abbia scelto l'11; egli dovrà moltiplicarlo per 3, mentre B dovrà moltiplicare il 35 per 5, sicchè si avrà:

$$33 + 175 = 208$$

Il 208 non è divisibile per 5 quindi il numero scelto da A è m.

Risolvere un problema a 3 incognite, con un sol numero.

Ecco in qual modo si può fare questo *tour de force*, o come si possono calcolare queste tre incognite per mezzo di altre quantità *parimente* incognite, mediante una serie di operazioni da eseguirsi *da altri* e di cui non dovrà esser comunicato al solutore che il risultato finale espresso da *un solo numero*.

In altri termini, l'operatore pretende di risolvere questa equazione:

$$Xx + Yy + Zz = A$$

nella quale A solamente è dato!

L'operatore — munito di carta e matita — comanda all'........ avversario: « Pensate una data qualsiasi, passata, presente o futura; scrivete l'anno, il mese e il giorno di questa data, e io troverò queste tre quantità.

« Scrivete l'anno della vostra nascita e moltiplicatelo per l'anno da trovare.

« Raddoppiate l'anno della vostra nascita, prendete il numero formato dalle prime due cifre a sinistra di questo doppio e moltiplicatelo per il numero del mese da trovare. Aggiungete questo prodotto al prodotto degli anni.

« Prendete ora il numero formato dalle due ultime cifre a destra dell'anno della vostra nascita; moltiplicate l'anno da trovare per detto numero e sottraete questo prodotto dalla somma precedente.

« Aggiungete al resto il numero del giorno da trovare.

« Enunciate il risultato finale ».

Soluzione. — Si divide il risultato finale enunciato, per 1800; il quoziente sarà *l'anno* cercato; dividendo il resto per 37 si avrà per quoziente il *mese* cercato e il resto della divisione indicherà il *giorno* cercato.

Spiegazione. — Siano a l'anno da trovare, m il mese, g il giorno. Siano A e B due fattori arbitrarii.

Pongo:

$$Aa + Bm + g = S \tag{1}$$

Si può considerare S come il dividendo d'una divisione di cui A è il divisore, a il quoziente e $Bm + g$ il resto; la condizione necessaria e sufficiente per ciò è che si abbia:

$$A > Bm + g \tag{2}$$

dovendo, naturalmente, essere il resto inferiore al divisore. Supponiamo effettuata la divisione e sia R il resto; si ha:

$$Bm + g = R$$

Ragionando come precedentemente si trova che R è il dividendo di una divisione di cui B è il divisore, m il quoziente e g il resto, con la condizione che:

$$B > g \tag{3}$$

Le ineguaglianze (2) e (3) permettono di limitare i valori da attribuire ai fattori A e B.

Per la (3), B deve essere superiore a g. Dunque — poichè g può variare da 1 a 31 — B dev'essere almeno uguale a 32.

Pongo, ad es., $B = 37$.

Sostituendo B con questo valore e g col suo massimo valore 31, nella ineguaglianza (2), questa diviene:

$$A > 37\,m + 31,$$

o, poichè m può variare da 1 a 12:

$$A > 37 \times 12 + 31$$
$$A > 475$$

Pongo, per es., $A = 1800$.

Se vogliamo riportarci all'enunciato del problema, si vedrà che tutte le operazioni che l'operatore fa eseguire, si riducono a:

$$1800\,a + 37\,m + g = S$$

essendo S il risultato finale enunciato.

Si può osservare che il problema è possibile solamente pel fatto che m e g non sono suscettibili di variare che entro certi limiti. D'altro lato — nonostante le apparenze — l'operatore conosce, non solamente una relazione, ma ben *tre relazioni* esistenti fra le incognite, come è indispensabile per poterle determinare. Queste tre relazioni sono fornite dall'equazione (1) e dalle ineguaglianze (2) e (3).

L'anno della nascita non è che un tranello destinato a fuorviare l'*avversario*; esso non interviene che per fornire i fattori 1800 e 37.

Indicando tale anno con $1800 + x$, le operazioni alle quali esso serve di pretesto consistono in:

$$(1800 + x)\,a + 37\,m - a\,x$$

o, sviluppando:

$$1800\,a + a\,x + 37\,m - a\,x$$

il che elimina x.

È evidente che quanto precede è applicabile a una persona nata fra il 1800 e il 1899 — caso di gran lunga il più frequente. Che se l'*avversario* fosse più giovane, sarebbe facile modificare l'enunciato in conseguenza, una volta compreso il meccanismo del problema.

Estensione del problema precedente. — È evidente che si può presentare il problema in molti altri modi e *con quante incognite si voglia.*

Siano — in generale — x, y, z, t, u, v . . . . . queste incognite; basta porre:

$$A\,x + B\,y + C\,z + D\,t + E\,u + F\,v + \;.\;.\;.\;.\; = S$$

e determinare i fattori $A, B, C, D, E, F,$ .... mediante le ineguaglianze:

$$A > By + Cz + Dt + Eu + Fv + \dots$$
$$B > Cz + Dt + Eu + Fv + \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

L'incognita x è la sola alla quale si possa dare un valore qualsiasi, a condizione che esso sia intero. Le altre incognite non possono variare che entro certi limiti. Se si ha cura di scegliere come incognite delle quantità che non possano variare se non entro limiti assai ristretti, si riduce di altrettanto il valore dei fattori arbitrarii, il che permette di aumentare il numero delle incognite; ed è questo appunto il lato interessante, poichè ciò che impressiona maggiormente il pubblico in questo *gioco* è il numero grande delle incognite che l'operatore riesce a dedurre da una sola quantità data.

Ecco un esempio, assai semplice, del genere; esso non richiede da parte del pubblico, che moltiplicazioni riguardanti numeri di 1 a 4 cifre. Si noterà pure che l'enunciato — assai ciarlatanesco, come si conviene al caso — realizza certamente il minimo di dati da esigere per la soluzione d'un problema:

« *Essendo dato il nominato Bernardetti, soldato del genio, del quale nulla si sa, determinare il reggimento, il battaglione, la compagnia, la sezione, di questo militare, nonchè il suo numero di matricola* ».

Si possono cavare — in apparenza — questi elementi da un numero incognito, quale la data della nascita del soldato Bernardetti.

Nulla impedisce, d'altronde, di aggiungere alle quantità da trovare l'età del capitano, quella della cantiniera, ecc., ecc.; tutto ciò dipende solamente dal tempo di cui si dispone e dalla pazienza degli uditori.

Trovare l'età d'una persona.

Si facciano eseguire ad una persona i seguenti calcoli successivi sulla propria età:

1.° Raddoppiare il giorno della nascita;
2.° Aggiungere 4;
3.° Moltiplicare per 50;

4.° Aggiungere il numero ordinale del mese;
5.° Moltiplicare per 100;
6.° Sottrarre l'età che aveva nell'anno precedente;
7.° Sottrarre il numero 19881.

Quando tale persona avrà ottenuta questa ultima differenza, dovrà palesarla e da essa si dedurrà tosto la data voluta separandone le cifre per due, da destra verso sinistra. Il primo gruppo a sinistra (di una o di due cifre) indicherà il giorno del mese della nascita, il secondo il numero ordinale del mese, il terzo l'anno.

Occorrerebbe conoscere prima il *secolo* perchè non si hanno che le 2 ultime cifre del millesimo; ma in pratica è facile cavarsi d'impaccio!

Esempio: — Si tratti d'un individuo nato il 14 ottobre 1861 cioè il 14 . 10 . 61; ecco ordinatamente i risultati delle varie operazioni indicate:

1.° $2 \times 14 = 28$
2.° $28 + 4 = 32$
3.° $32 \times 50 = 1600$
4.° $1600 + 10 = 1610$
5.° $1610 \times 100 = 161000$
6.° $161000 - 58 = 160942$
7.° $160942 - 19881 = 141061$.

Si ha dunque: 14 . 10 . 61 che è appunto la data cercata.

Il numero $M = 19881$ non è fisso, ma varia *anno per anno*. Infatti, sia a il giorno, b il mese, c l'anno di nascita.

Per le regole indicate si ha:

$$[(2a + 4)\,50 + b]\,100 - (1900 + \varphi - 1 - 1800 - c) - M =$$
$$= 10000\,a + 100\,b + c$$

dove φ è l'anno in cui si fa il gioco (decine è unità) e c è l'anno di nascita (decine e unità).

Sviluppando e semplificando rimane:

$$M = 20000 - 99 - \varphi = 19901 - \varphi$$

Sicchè pel 1920 si ha $\varphi = 20$ e perciò $M = 19881$, ecc.

Indovinare un pezzo pensato del gioco del domino.

Si possono applicare ai pezzi del domino le regole indicate precedentemente per indovinare un numero pensato.

Si faccia dunque pensare ad una persona un pezzo del domino, o, meglio ancora, due numeri qualunque, uguali o disuguali, fra i dieci:

0 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9

Il modo più semplice per indovinare è il seguente. Si fa duplicare il primo punto e vi si fa aggiungere un numero a proprio piacere; si fa quintuplicare il risultato ed aggiungere il secondo punto. Si chiede allora il totale ottenuto.

Per conoscere i due numeri pensati basterà allora diminuire il totale di cinque volte il numero aggiunto; la differenza ottenuta è un numero di due cifre delle quali la prima corrisponde al primo numero pensato e la seconda all'altro punto.

Esempio. Sia 3 e 4 il domino pensato.

Il doppio del primo punto sarà 6; faccio aggiungere 8, faccio quintuplicare la somma 14 ed ottengo 70, e aggiungere il secondo punto, il che dà 74. Deduco allora cinque volte il numero aggiunto, cioè $5 \times 8 = 40$ e la differenza 34 mi dà i punti 3 e 4 del domino pensato.

Indicando infatti con x il primo punto, con y il secondo e con m il numero aggiunto si possono rappresentare algebricamente le operazioni successive con:

$$2x \qquad 2x + m \qquad 10x + 5m \qquad 10x + 5m + y$$

Sottraendo $5m$ dal totale esso si riduce appunto a $10x + y$ che sarebbe nel nostro esempio $10 \times 3 + 4$ ossia 34.

SULLE OPERAZIONI ARITMETICHE

Moltiplicazione.

Egiziana e russa. — Abbiasi da moltiplicare 42 per 37. Si ha:

$$37 = 2^5 + 2^2 + 1$$

Ora:

$$\begin{array}{llr}
42 \times 1 = & & = 42 \\
42 \times 2^2 = 84 \times 2 = & & = 168 \\
42 \times 2^5 = 168 \times 2^3 = 336 \times 2^2 = 672 \times 2 & & = 1344 \\
\hline
 & 42 \times 37 & = 1554
\end{array}$$

Si può evidentemente ridurre qualsiasi moltiplicazione ad una serie di duplicazioni e ad una somma, ed è così che procedevano gli antichi egiziani.

I contadini russi usano lo stesso procedimento sotto questa forma curiosa. Si ha:

37 volte 42 = 1 volta 42	42
più 18 volte 84 ossia 9 volte 168, cioè 1 volta 168	168
più 4 volte 336 ossia 2 volte 672 od 1 volta .	1344
Dunque il prodotto totale è	1554

L'operazione viene disposta in questo modo:

37	42	42
18	84	
9	168	168
4	336	
2	672	
1	1344	1344
		1554

Divisione.

Essendo noto il dividendo, il divisore e il resto d'una divisione, come si può trovarne tutte le cifre del quoziente da destra a sinistra?

Se si sottrae il resto dal dividendo si riduce il problema a quest'altro: *Trovare, da destra a sinistra, le cifre del quoziente di due numeri interi divisibili l'uno per l'altro.*

Si possono presentare quattro casi, cioè il divisore può terminare: 1.° con una cifra pari, significativa; 2.° con cinque; 3.° con zero; 4.° con una cifra dispari diversa da cinque.

Il primo e il secondo caso si riducono al quarto dividendo i numeri interi dati, per la più alta potenza, sia di 2 che di 5, che divide esattamente il divisore.

Il terzo caso si riduce ad uno degli altri tre, dividendo i due numeri per la più alta potenza di 10 che divide il divisore.

Segue da ciò, che è sempre possibile ridurre il divisore a terminare con una cifra dispari diversa da 5.

Ciò posto, i prodotti dei primi 10 numeri per una stessa cifra dispari, diversa da 5, sono terminati da cifre differenti. Per cui le cifre delle unità d'un dividendo e d'un divisore, divisibili l'uno per l'altro, bastano per determinare la cifra delle unità del quoziente quando nel divisore tale cifra è dispari e diversa da 5.

Osserviamo ancora che se due numeri sono divisibili l'uno per l'altro, la cifra delle decine del quoziente è la cifra delle unità del quoziente d'una divisione avente per divisore il divisore dato, e il cui dividendo si ottiene sopprimendo uno zero alla destra della differenza fra il dividendo dato e il prodotto del divisore per la cifra delle unità del quoziente corrispondente.

Esempio:

Dividendo	Divisore	Cifre del quoziente
173861836110000	5428432500	—
17386183611000	54284325	—
69544734444	2171373	8
6952736346	»	2
694839360	»	0
69483936	»	2
6514119	»	3

Il quoziente è dunque 32 o 28.

Per 9999. — Debbosi dividere 327581 per 999. Si può scrivere:

$$327581 = 327 \times 1000 + 581$$

ma:

$$327 \times 1000 = 327 \times 999 + 327$$

dunque il numero proposto 327581 contiene 327 volte il 999 con un resto di:

$$327 + 581 = 908$$

Così, il numero 7865422 diviso per 9999 dà per quoziente 786 e per resto:

$$786 + 5422 = 6208$$

E ancora:

$$4287547 : 999 = 4287 + \frac{4287 + 547}{999} = 4287 + \frac{4834}{999}$$

Estrazione della radice quadrata.

Metodi diversi.

1.º Sia n il numero del quale vuolsi trovare la radice quadrata ed a e b due suoi fattori qualunque (se il numero n è primo si prenderanno $a = n$ e $b = 1$).

Prendiamo la media aritmetica r di questi due fattori e la loro media armonica s ossia:

$$r = \frac{1}{2}(a + b) \qquad s = \frac{2ab}{a + b}$$

Prendiamo ancora la media aritmetica r_1 delle due medie r, s così ottenute e la loro media armonica s_1 e così di seguito. Le quantità r, s saranno altrettanti valori approssimati della radice che si cerca; l'approssimazione è rapidissima poichè il numero dei decimali esatti delle approssimazioni successive cresce in progressione geometrica.

Esempio. Calcoliamo $\sqrt{3}$. Avremo $a = 3$ $b = 1$ e le seguenti approssimazioni successive:

$$r = 2 \qquad r_1 = \frac{7}{4} \qquad r_2 = \frac{97}{56} \qquad r_3 = \frac{18817}{10864}$$

$$s = \frac{3}{2} \qquad s_1 = \frac{12}{7} \qquad s_2 = \frac{168}{97} \qquad s_3 = \frac{32592}{18817}$$

Fermandoci qui abbiamo:

$$r_3 = 1.732050810 \qquad \text{ed} \qquad s_3 = 1.732050805$$

quindi sette decimali sono esatte.

Il calcolo delle medie aritmetiche è assai semplice. Se ne deducono le medie armoniche capovolgendole dopo aver moltiplicato il loro denominatore per n. Così;

$$s_2 = \frac{56 \times 3}{97} = \frac{168}{97}$$

Questo procedimento ha il vantaggio di dare dopo alcune approssimazioni successive un risultato esattissimo; esso presenta però l'inconveniente di non far conoscere con esattezza se il numero dato sia un quadrato esatto, poichè la serie dei numeri r, s non termina mai (se $a > b$, r risulta sempre $> \sqrt{n}$ ed $s < \sqrt{n}$); inoltre l'applicazione del metodo diviene difficile, quando il numero dato contiene molte cifre.

2.° Debbasi estrarre la radice quadrata di 77211369. Indicando con a^2 un numero qualunque > 77211369 e del quale si conosce la radice a, p. es. 10^8 la cui radice è 10^4, si ha:

$$(a + x)(a - x) = a^2 - x^2 = 100000000 - 77211369 = 22788631$$
$$(a + x) + (a - x) = 2a = 2 \times 10000 = 20000$$

Sicchè il problema è stato ridotto a trovare due numeri dei quali sono noti la somma e il prodotto, il che puo farsi algebricamente per mezzo d'un'equazione di secondo grado, oppure aritmeticamente nel modo indicato nel Capitolo *Algebra*.

Applichiamo quest'ultimo procedimento.

Si divide 22788631 per 19999 e si moltiplica il quoziente 1139 per 1138 e si aggiunge il resto 9770.

Si ottiene 1305952 che si divide per 17721, differenza fra 19999 e il doppio del quoziente 1139 (cioè 2278).

Si ottiene così un secondo quoziente 73 che si moltiplica per 72 aggiungendovi poi il resto 12319 il che dà 17575.

Si dovrebbe ora dividere questo numero per la differenza tra 17721 e 146 (doppio di 72) che è appunto 17575, per cui si avrebbe per quoziente l'unità. Concludesi da ciò che $17575 - 1 = 17574$ è la differenza dei due numeri cercati (ossia delle due radici dell'equazione di secondo grado); la loro somma essendo 2000 la maggiore $a + x$, sarà:

$$\frac{37574}{2} = 18787$$

e siccome $a = 10000$, sarà $x = 8787$. Dunque $8787 = \sqrt{77211369}$.

Questo metodo di estrazione della radice quadrata ha il vantaggio di procedere franco, senza *tentativi*.

Riguardo alla brevità, molto dipende dalla scelta che si fa del numero a^2. Così, se per esempio, in luogo di 10^8 si fosse scelto 81000000 le operazioni sarebbero riuscite più brevi.

ARITMETICA GEOMETRICA

Moltiplicazione.

Supponiamo di dover trovare il prodotto di più segmenti rettilinei l_1, l_2, l_3 . . . . . rappresentati in una determinata scala. Portiamo sopra una retta OX un segmento OA uguale alla unità di lunghezza e innalziamo in A la perpendicolare ad OX

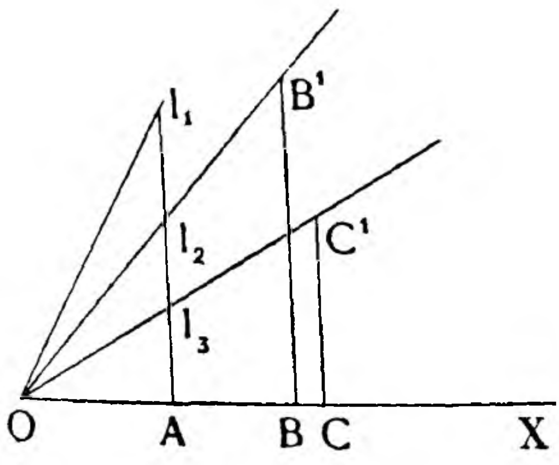


Fig. 117.

sulla quale porteremo i segmenti Al_1, Al_2, Al_3, ... uguali ai segmenti dati; conduciamo poi le rette Ol_1, Ol_2, Ol_3.

Portiamo Al_1 in OB e da B alziamo la perpendicolare che incontra Ol_2 in B'; portiamo BB' da O in C su OX e innalziamo in C la perpendicolare che incontra Ol_3 in C', ecc. I segmenti BB', CC', ... rappresentano rispettivamente i prodotti $l_1 \times l_2$, $l_1 \times l_2 \times l_3$, ... come si rileva dalla considerazione dei triangoli simili OAl_2, OBB', ecc.

Divisione.

Debbasi trovare il quoziente di due segmenti a e b. Porta da O in A la lunghezza unitaria e il segmento b in Ob, si i nalza in b, una perpen colare b a uguale ad a. conduce Oa e la lunghe za Am della perpendic lare in A ad OX compre fra OX ed Oa è il quozient cercato, come è facile v dere.

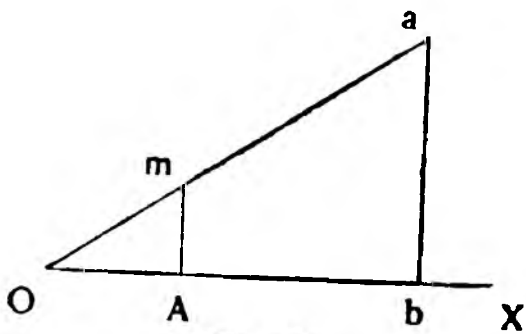


Fig. 118.

Osservazione. — Le ope razioni sulle frazioni s possono riferire a quell sui numeri interi dacch una frazione $\frac{a}{b}$ può essere rappresentata come si è detto co un segmento Am.

Potenze.

Sia a il segmento che rappresenta il numero da innalzar ad una certa potenza (fig. 119); X_1 X, Y_1 Y due assi ortogo

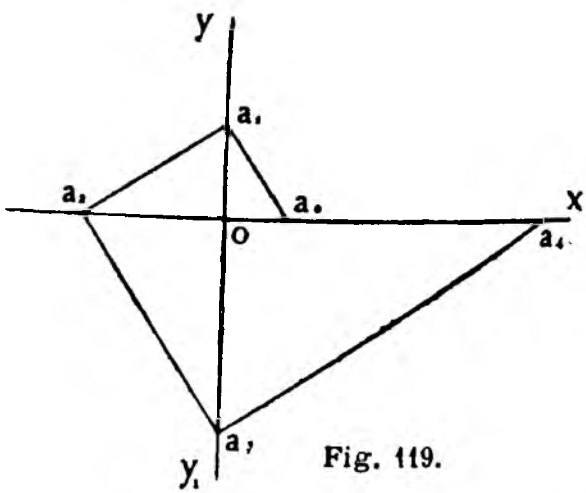


Fig. 119.

nali che si segano in O. Si porta su OX l'unità di lunghezz in Oa_0, e il segmento a su OY in Oa_1; si conduce la $a_0 a_1$

s'innalza su di essa la perpendicolare in a_1 che segherà OX_1 in a_2; da questo punto s'innalzerà la perpendicolare sulla $a_1 a_2$, ecc.

Per la proprietà dei triangoli rettangoli si avrà :

$$Oa_2 = a^2 \qquad Oa_3 = a^3 \qquad \text{ecc.}$$

Radici quadrate.

Basta costruire la media proporzionale Am fra il segmento unità OA e quello Aa da cui vuolsi estrarre la radice quadrata che rappresenta un numero dato N.

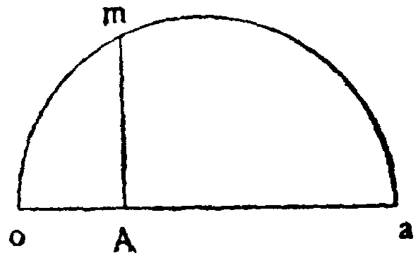


Fig. 120.

Se questo numero è scomponibile in fattori se ne avrà vantaggio dal lato grafico, poichè torna più comodo costruire la media proporzionale di $a\,b = N$ che di $1 \times N$.

In base al noto teorema di Fermat, ogni numero intero o è un quadrato, od è composto di 2, 3 o 4 quadrati al più. Per esempio $42 = 1 + 4^2 + 5^2$ D'onde la costruzione (basata sul teorema di Pitagora) della fig. 120.

Quando il numero proposto può venire scomposto in varie maniere in una somma di quadrati, può tornare più co-

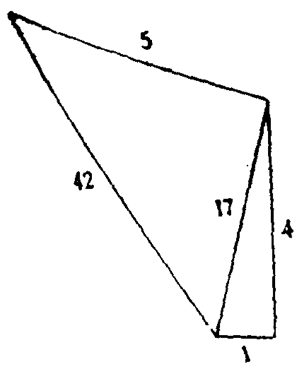


Fig. 121.

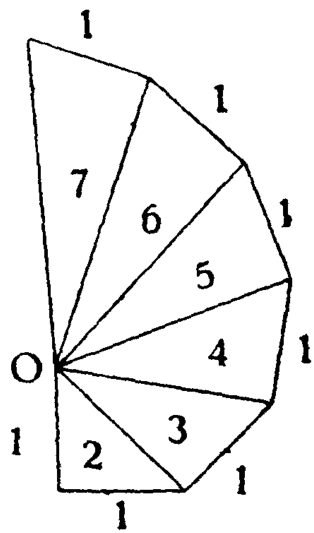


Fig. 122.

moda sia la scelta di una di esse piuttosto che di un'altra, e talvolta quella d'una *differenza* di quadrati.

Esempio:

$$28 = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 4^2 = 1^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 5^2 = 8^2 - 6^2$$

Quest'ultima scomposizione è la più comoda perchè dà $\sqrt{28}$ come cateto di un triangolo-rettangolo del quale 8 è l'ipotenusa e 6 l'altro cateto.

Per un numero dispari qualsiasi $(2m+1)$ si può dare una soluzione generale:

$$2m + 1 = (m+1)^2 - m^2$$

Si può costruire una scala grafica delle radici quadrate a mò di ventaglio, come vedesi nella fig. 122.

I. — I $\frac{19}{20}$ *di un numero sono uguali alla sua radice quadrata; qual'è questo numero?* (Leonardo da Pisa - *Liber Abaci, 1202*):

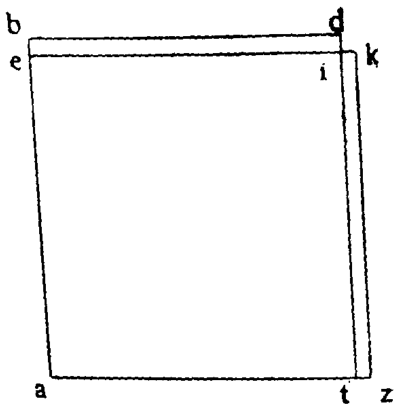


Fig. 123.

Sia ab il numero dato, at l'unità di lunghezza; costruiamo il rettangolo $abdt$ su ab e at e il quadrato $aekz$ su $ae = \frac{19}{20} ab$ come lato. Secondo l'enunciato devesi avere $ae = \sqrt{ab}$ od $ae^2 = ab$; se ne deduce:

$$\text{quadrato } a\,e\,k\,z \equiv \text{rettangolo } a\,b\,d\,t$$

e sottraendo da ambo i membri il rettangolo comune *aeit*:

$$\text{rettang. } t\,i\,k\,z = \text{rettang. } e\,b\,d\,i$$

da cui:

$$ti \times ki = ei \times di$$

ossia:

$$\frac{ti}{di} = \frac{ei}{ki}$$

da cui si deduce:

$$\frac{ti}{ti + di} = \frac{ei}{ei + ki} \qquad \frac{ti}{td} = \frac{ei}{ek} \qquad \frac{ae}{ab} = \frac{1}{ek}$$

$$\text{ma } \frac{ae}{ab} = \frac{19}{20} \qquad \text{dunque} \quad ek = \frac{20}{19}$$

e l'area del quadrato *aekz* che rappresenta il numero cercato è:

$$\left(\frac{20}{19}\right)^2 = \frac{400}{361}$$

Come osserva Leonardo da Pisa, poichè, $ab > ae$ si deve avere $ae > 1$ ossia $az > at$ e quindi t si trova fra a e z.

II. — *Trovare tre numeri tali che la somma dei primi due sia 50, quella dei due ultimi 70, e quella del primo col-l'ultimo 60* (Benedetti, *Speculationes diversæ, 1585*).

Sia ABC il triangolo di lati 50, 70 e 60; se si traccia il circolo iscritto in esso, le distanze dai vertici ai punti di contatto rappresenteranno i numeri cercati x, y, z.

Si vede subito che:

$$2x = AB + AC - BC$$

$$x = \frac{50 + 60 - 70}{2} = 20$$

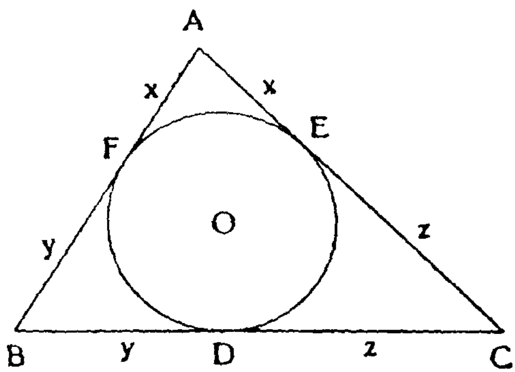


Fig. 124.

$$y = \frac{50 + 70 - 60}{2} = 30 \qquad z = \frac{60 + 70 - 50}{2} = 40$$

I gitanti in imbarazzo.

Due coppie di sposi (coppia A e coppia B) deoono recarsi in una casa distante 63 km. per una strada rettilinea. Non dispongono che d'un'automobile capace di due soli oiaggiatori oltre il conduttore. Decidono pertanto che la coppia A procederà a piedi a 4 km. l'ora mentre l'automobile trasporterà la coppia B, a 30 km. l'ora, sino ad un certo punto *C d'onde detta coppia proseguirà a piedi a 4 km. l'ora, mentre l'automobile tornerà indietro e, raggiunta la coppia A la trasporterà a destinazione, con la solita velocità oraria di 30 km. Si tratta di trooare a quale distanza dal punto di partenza doorà retrocedere l'automobile affinchè le due coppie possano arrioare a destino insieme.*

Sia $OQ = 63$ km. S il punto di retrocessione dell'automobile ed R quello in cui raggiunge la coppia A. È evidente che il problema sarà risolto se $OR = SQ$ (fig. 125).

Fig. 125.

Il tempo impiegato da A a percorrere la distanza $OR = \varphi$ sarà $\frac{\varphi}{4}$; nello stesso tempo l'automobile dovrà percorrere lo spazio $OS + SR = \varphi + 2\lambda$, per cui essa vi impiegherà un tempo espresso da $\frac{\varphi + 2\lambda}{30}$.

Avremo dunque l'equazione:

$$\frac{\varphi}{4} = \frac{\varphi + 2\lambda}{30}$$

e l'altra:

$$2\varphi + \lambda = 63$$

dalle quali $\varphi = 12$ e $\lambda = 51$.

Ma possiamo risolvere il problema graficamente (fig. 126). Misuriamo orizzontalmente il tempo, verticalmente i percorsi. Sarà XC il grafico dell'automobile, XD quello della coppia A. Evidentemente, si tratterà di costrurre un parallelogramma di cui XC, XD sono le posizioni di due lati e la KM la retta sulla quale dovrà trovarsi il vertice opposto ad X. Scelto dunque un punto C_1 qualunque di XC conduciamo la retta $C_1\,D_1$, grafico di *ritorno* dell'automobile se retrocedesse da C_1. Preso il punto medio O_1 di C_1 D_1 e condotta la XO_1 si avrà il vertice M cercato, nel punto suo d'incontro con la KM. Costruito il paral-

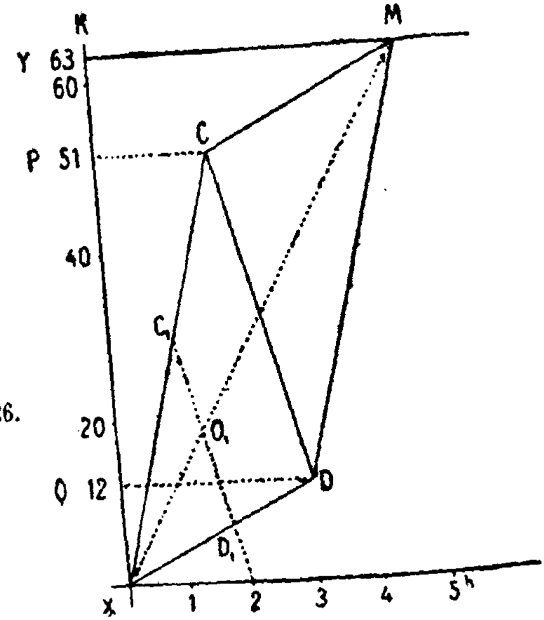


Fig. 126.

lelogramma, sarà C il punto dal quale l'automobile retrocederà, CD il suo grafico di ritorno e D il punto d'incontro coi gitanti A, d'onde $XQ =$ km. 12 $XP =$ km. 51 ecc.

Il problema dei corrieri.

Vediamo di esprimere graficamente il percorso d'un corriere I che parte a un dato momento (origine degli assi) con velocità oraria di 4 km. Il suo grafico sarà la retta OB_1. Il grafico d'un altro corriere II che parta dallo stesso punto un'ora dopo, con velocità oraria 6 km. sarà la retta A_2 B_2. I due corrieri si incontreranno secondo l'incontro M dei loro grafici, cioè dopo 3 ore dalla partenza del primo e a 12 km. dal punto di partenza (fig. 127) (1).

Se consideriamo pure una vettura che parta da una località a 14 km, dal punto di partenza del corriere I, e proceda in senso ad esso contrario con velocità oraria di km. 8, il suo

(1) Laisant — *Initiation mathématique*, pag. 157.

grafico sarà la retta $A_3\ B_3$ che sega la OM_1 in B_3 cui corrisponde un'ora e mezza e 6 km., incontro col primo corriere I.

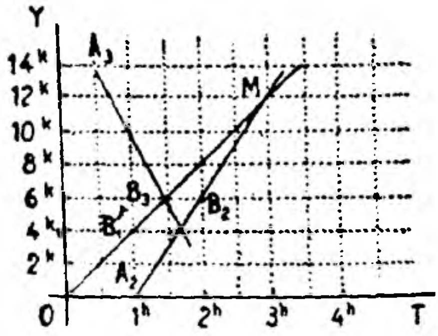


Fig. 127.

Il punto d'incontro con $A_2\ B_2$ (grafico del corriere II) corrisponde a poco meno di ore $1\,{}^3/_4$ e a poco più di km. $4\,{}^1/_4$ (col calcolo 1^h 43 minuti, e km. 4,286).

ALGEBRA

L'EQUAZIONE DI FERMAT

Un po' di storia.

L'equazione $x^n + y^n = z^n$ è famosa (1) per l'affermazione di Fermat di avere trovato la dimostrazione che non si puo risolverla con valori interi di x, y e z se n è un numero intero maggiore di 2; affermazione che tutto porta a ritenere fondata, sebbene nulla si sia trovato nei manoscritti del Fermat di tale dimostrazione.

Lo stesso Fermat dimostrò il suo teorema per $n = 3$ e per $n = 4$ ma, questa sola rimase, mentre la prima andò perduta; essa fu data però da Eulero in forma identica a quella usata da Fermat per $n = 4$; ma fu dimostrato che tale metodo non è applicabile che ai valori 3 e 4 di n.

Il teorema fu poi dimostrato da Legendre per $n = 5$, da Lejeune Dirichlet per $n = 14$ e da Lanée e Lebesgue per $n = 7$.

Quanto al metodo seguito dal Fermat per arrivare alla sua dimostrazione generale sono da escludersi quelli complicati dell'odierna aritmetica superiore tanto più che alle altre sue dimostrazioni il celebre matematico pervenne sempre per vie facili, dirette. È opinione di Ball che egli possa essersi basato sulla teoria delle frazioni continue; mediante le proprietà di queste frazioni si possono infatti stabilire con relativa facilità alcuni dei risultati più astratti ai quali il Fermat è pervenuto.

---

(1) La società delle scienze di Gottinga dispone d'un premio di 100000 marchi (125000 lire) per chi troverà una dimostrazione *generale* di questo teorema.

Triangoli rettangoli in numeri interi.

Le soluzioni intere dell'equazione $x^2 + y^2 = z^2$ corrispondono ai lati di triangoli rettangoli dei quali z sarebbe l'ipotenusa.

I. — La soluzione più semplice, coi numeri 3, 4 e 5 era nota agli egiziani. Frenicle stabilì che uno dei cateti è sempre un numero *pari*; da cio segue che tutti i triangoli del genere sono dati dalle formole (Euclide):

$$x = k\alpha^2 - k\beta^2 \qquad y = 2k\alpha\beta \qquad z = k\alpha^2 + k\beta^2$$

II. — Un anonimo Arabo trovò che l'ipotenusa è sempre un multiplo di 12 aumentato di 1 o di 5.

III. — Dall'essere sempre un cateto un multiplo di 3 e l'altro di 4, segue che la superficie è sempre un multiplo di 6. Inoltre, uno dei lati è multiplo di 5 e la somma o la differenza dei cateti è un multiplo di 8 aumentato o diminuito di 1 (Frenicle).

IV. — Il prodotto xyz dev'essere sempre un multiplo di 60 (1).

V. — Se nell'equazione $x^2 + y^2 = z^2$ poniamo la condizione $z = y + 1$, avremo $y = \frac{a^2 - 1}{2}$ epperciò a dispari.

Esempii:

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \qquad 5^2 + 12^2 = 13^2$$
$$7^2 + 24^2 = 25^2 \qquad 9^2 + 40^2 = 41^2$$
$$13^2 + 84^2 = 85^2 \qquad 17^2 + 144^2 = 145^2$$
$$37^2 + 684^2 = 685^2$$
$$\cdots\cdots$$

Si può notare che:

$$3^2 = 4 + 5 \qquad 5^2 = 12 + 13 \qquad 7^2 = 24 + 25$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Se poniamo le condizioni $z = y + 2$ e y dispari, avremo:

$$x^2 = 4(y + 1)$$

Dovrà quindi essere $(y + 1)$ un quadrato perfetto, cioè:

$$y = 3 - 15 - 35 - 63 - 99 - 143 \cdots\cdots$$

ed x sarà sempre pari ed $= 2\sqrt{z - 1}$.

---

(1) V. N. Annales de Mathématiques, 1842 - pag. 184.

Esempii:

$$4^2 + 3^2 = 5^2 \qquad 8^2 + 15^2 = 17^2$$
$$12^2 + 35^2 = 37^2 \qquad 16^2 + 63^2 = 65^2$$

. . . .

$$36^2 + 323^2 = 325^2$$

. . . .

$$60^2 + 899^2 = 901^2$$

. . . .

$$92^2 + 2115^2 = 2117^2$$

In questo caso abbiamo:

$$3^2 = 4 + 5 \qquad 5^2 = 8 + 17 \qquad 7^2 = 12 + 37$$

. . . .

Con:

$$z = y + 3 \qquad z = y + 4 \qquad z = y + 5$$
$$z = y + 6 \qquad z = y + 7$$

si ricade ancora nei tipi precedenti.

Con $z = y + 8$ si trova $x^2 = 4^2 (4 + y)$ per cui $4 + y$ dev'essere un quadrato perfetto.

Esempii:

$$20^2 + 21^2 = 29^2 \qquad 28^2 + 45^2 = 53^2$$
$$36^2 + 77^2 = 85^2 \qquad 44^2 + 117^2 = 125^2$$
$$52^2 + 165^2 = 173^2 \qquad 60^2 + 221^2 = 229^2$$
$$68^2 + 285^2 = 293^2$$

. . . .

Possiamo notare che:

$$7^2 = 20 + 29 \qquad 9^2 = 28 + 53 \qquad 11^2 = 36 + 85$$

. . . .

Per $z = y + 9$ si ha $x^2 = 9\,(9 + 2\,y)$.

Esempii:

$$33^2 + 56^2 = 65^2$$
$$39^2 + 80^2 = 89^2$$
$$51^2 + 140^2 = 149^2$$

. . . .

VI. — Abbiansi ad esempio le soluzioni:

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \qquad 8^2 + 15^2 = 17^2$$

Le soluzioni, non riducibili, di $x^2 + y^2 = 5^2 \times 17^2 = 85^2$ si possono ottenere in questo modo:

$$x = 3 \times 8 + 4 \times 15 = 84 \qquad y = \sqrt{85^2 - 84^2} = 13$$

$$84^2 + 13^2 = 85^2$$

che già conoscevamo ($13^2 + 84^2 = 85^2$):

$$x = 3 \times 15 + 4 \times 8 = 77 \qquad y = \sqrt{85^2 - 77^2} = 36$$

$$77^2 + 36^2 = 85^2$$

essa pure già trovata ($36^2 + 77^2 = 85^2$).

Altro esempio di questo genere:

$$x^2 + y^2 = 13^2 \times 29^2 = 377^2$$

$$5^2 + 12^2 = 13^2 \qquad 20^2 + 21^2 = 29^2$$

$$x = 5 \cdot 20 + 12 \cdot 21 = 352$$

$$y = 135 \qquad 352^2 + 135^2 = 377^2$$

$$x = 5 \cdot 21 + 12 \cdot 20 = 345$$

$$y = 152 \qquad 345^2 + 152^2 = 377^2$$

VII. — Poniamo la condizione che x, ad es., sia dispari. La somma dei numeri dispari dall'1 all'x^2 è data da:

$$\left(\frac{x^2 + 1}{2}\right)^2$$

essendo $\frac{x^2 + 1}{2}$ il *numero d'ordine* del numero dispari x^2 considerato. I numeri dispari che precedono x^2 sono:

$$\frac{x^2 + 1}{2} - 1 \qquad \text{ossia} \qquad \frac{x^2 - 1}{2}$$

e la loro somma è data da:

$$\left(\frac{x^2 - 1}{2}\right)^2$$

Si può dunque scrivere l'identità:

$$\left(\frac{x^2+1}{2}\right)^2-\left(\frac{x^2-1}{2}\right)^2=x^2$$

nella quale ponendo, in luogo di x, un numero dispari si avrà una soluzione del problema proposto. Così per $x=7$:

$$25^2-24^2=7^2 \qquad \text{ossia} \qquad 7^2+24^2=25^2$$

VIII. — Osserviamo che:

$$(m^2+n^2)^2=m^4+n^4+2\,m^2\,n^2=(m^2-n^2)^2+(2\,m\,n)^2$$

avremo dunque l'uguaglianza:

$$(m^2+n^2)^2=(m^2-n^2)^2+(2\,m\,n)^2$$

nella quale sostituendo ad m e n dei valori qualsiasi, si otterranno valori di x, y e z soddisfacenti al problema.

Facciamo ad esempio $m=5$, $n=2$. Sostituendo:

$$(5^2+2^2)^2=(5^2-2^2)^2+(2\cdot5\cdot2)^2$$

ossia:

$$29^2=21^2+20^2$$

PROBLEMA SUI NUMERI

Quale è il più grande fra i numeri:

$$\sqrt{2} \quad \sqrt[3]{3} \quad \sqrt[4]{4} \quad \sqrt[5]{5} \; \ldots\ldots ?$$

Soluzione. — Consideriamo due termini qualunque della serie:

$$\sqrt[n]{n} \quad \text{e} \quad \sqrt[n+1]{n+1}$$

e per paragonarli riduciamoli al medesimo indice:

$$\sqrt[n(n+1)]{n^{n+1}} \qquad \sqrt[n(n+1)]{(n+1)^n}$$

Si possono paragonare le quantità sotto radicale dopo averle divise per n^n e si hanno due numeri n ed $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Ora:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1-\frac{1}{n}}{1\cdot 2} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots,$$

inoltre si riconoscono i risultati:

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots\cdots < 3$$

Ciò posto, osserviamo che per $n = 2$ la seconda radice $\sqrt[3]{3}$ è maggiore della prima $\sqrt{2}$; per $n = 3$ si ha:

$$n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

dunque la prima radice o $\sqrt[3]{3}$ è maggiore della seconda o $\sqrt[4]{4}$; per $n > 3$ la prima è sempre più grande della seguente; si ha dunque:

$$\sqrt[2]{2} < \sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \sqrt[5]{5} > \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Per cui $\sqrt[3]{3}$ è il termine più grande della serie.

Un torneo matematico.

I. — *Trovare un numero quadrato che, aumentato o diminuito di 5, dia sempre un numero quadrato.*

A proposito di questo problema ricorderemo un aneddoto relativo a Leonardo da Pisa. Era così grande la fama di questo matematico che nel 1225 l'imperatore Federico II si fermò a Pisa per presiedere una specie di torneo matematico nel quale il talento di Leonardo doveva essere messo alla prova.

I competitori erano stati informati prima dei temi, alcuni dei quali erano dovuti a Giovanni da Palermo, matematico della Corte di Federico. È questo il primo esempio storico di queste sfide che divennero poi tanto comuni nel XVI e XVII secolo.

Il problema di cui qui si tratta era il primo proposto a Leonardo (1), il quale rispose a Giovanni da Palermo che il numero quadrato è:

$$11 + \frac{2}{3} + \frac{1}{144} = \left(\frac{41}{12}\right)^2$$

Infatti:

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{49}{12}\right)^2 \qquad \text{e} \qquad \left(\frac{41}{12}\right)^2 - 5 = \left(\frac{31}{12}\right)^2$$

Questo problema si potrebbe pure enunciare in altri modi, per esempio, così:

II. — *Trovare due quadrati tali che la loro somma sia il doppio d'un quadrato, e la loro differenza sia 10.*

---

(1) Vedasi più oltre il terzo di tali temi.

Infatti nel caso sopra indicato le equazioni del problema sono:

$$a^2 + 5 = m^2 \qquad a^2 - 5 = n^2$$

dalle quali si ricava:

$$m^2 + n^2 = 2\,a^2 \qquad e \qquad m^2 - n^2 = 10$$

III. — *Trovare un numero di 4 cifre uguale al quadrato della somma del numero formato dalle sue due prime cifre e del numero formato dalle sue due ultime cifre.*

Sia N^2 il numero cercato, x il numero formato dalle sue prime due cifre ed y quello formato dalle sue ultime due. Si avrà:

$$N^2 = 100\,x + y = (x + y)^2$$

quindi:

$$N = x + y \qquad N(N-1) = 99\,x$$

Il prodotto dei due numeri consecutivi N ed $N-1$ essendo divisibile per $99 = 11 \times 9$, uno di essi due numeri almeno sarà divisibile per 9 o per 11.

Essendo d'altronde N^2 compreso fra 1000 e 10000, N od $N-1$ è compreso fra 30 e 100. Ad un multiplo di 9 compreso fra 30 e 100 basta dunque unire un multiplo di 11 che gli sia consecutivo e sia compreso fra gli stessi limiti (eccetto che pel 99).

Ora, la serie dei multipli di 9 è:

36 - 45 - 54 - 63 - 72 - 81 - 99

e quella dei multipli di 11 è:

33 - 44 - 55 - 66 - 77 - 88 - 99

Dall'esame di tali due serie risulta che i numeri da unire sono:

44 e 45   54 e 55

Dunque non si possono assumere per N che i valori:

45 - 55 - 99

i cui quadrati sono:

2025 - 3025 - 9801

E tali sono le sole soluzioni che ammette il problema.

IV. — *Trovare un numero di 2 cifre, tale, che scrivendolo due volte di seguito e scrivendo poi la cifra 1, si formi un numero di 5 cifre quadrato perfetto.*

Siano u la cifra delle unità e d quella delle decine, del numero cercato. Si ha, per ipotesi:

$$du\,du\,1 = y^2 \quad \text{ossia} \quad du \times 1000 + du \times 10 + 1 = y^2$$

Si deduce da tale equazione:

$$du \times 1010 + 1 = y^2$$
$$du \times 101 \times 10 = y^2 - 1 = (y + 1)(y - 1)$$

Il fattore primo 101 deve dividere uno dei fattori del secondo membro, cioè:

$$y + 1 = 101\,\alpha \qquad \text{da cui} \qquad y = 101\,\alpha - 1$$

Siccome y^2 ha cinque cifre, si ha:

$$100 \leqq y < 317$$

e quindi α non può avere altri valori che 1, 2, 3.

Abbiamo poi che y^2 termina con la cifra 1, perciò y deve terminare con 1 o con 9 e non sono ammissibili le ipotesi di $\alpha = 1$ o 3. Rimane $\alpha = 2$ che dà $y = 201$ il cui quadrato è 40401.

$$du = 40 \qquad u = 0 \qquad d = 4$$

È facile vedere che nessun valore di α soddisfa al problema quando si suppone $y - 1 = 101\,\alpha$.

V. — *Trovare quattro numeri interi, tali, che la loro somma sia uguale alla somma ottenuta aggiungendo al prodotto del maggiore per il minore, il prodotto degli altri due.*

Siano i quattro numeri, per ordine crescente di grandezza a, $a + x$, $a + y$ ed $a + z$ sarà:

$$4a + x + y + z = a(a + z) + (a + x)(a + y)$$

ossia:

$$2a(a - 2) + (a - 1)(x + y + z) + xy = 0$$

Per $a \geqq 2$ il primo membro è > 0.

Dunque $a = 1$ e l'equazione si riduce ad $xy = 2$ d'onde $x = 1$ ed $y = 2$.

L'equazione essendo indipendente da z, ne segue che il valore di z può essere scelto ad arbitrio. I numeri cercati sono dunque 1, 2, 3 ed 1 più un numero indeterminato.

VI. — *Determinare un numero di 10 cifre tale, che il suo quadrato termini con le stesse 10 cifre, nello stesso ordine.*

Indicando con N il numero cercato si dovrà avere:

$$N^2 - N = p \cdot 10^{10} \qquad \text{ossia} \qquad N(N-1) = p \cdot 10^{10}$$

Qualora p sia un numero primo non si può fare che l'ipotesi:

$$N = p \qquad \text{con} \qquad N - 1 = 10^{10}$$

da cui:

$$N = 10000000001$$

che costituisce una prima soluzione.

Quando p non sia primo, esso potrà sempre essere scomposto in due fattori m ed n, nel qual caso si ha:

$$N(N-1) = m\, n\, 5^{10} \cdot 2^{10}$$

da cui:

$$N = m \cdot 5^{10} \qquad \text{con} \qquad N - 1 = n \cdot 2^{10}$$

ossia:

$$N = m \cdot 2^{10} \qquad \text{con} \qquad N - 1 = n \cdot 5^{10}$$

Nella prima ipotesi abbiamo:

$$m \cdot 5^{10} - n \cdot 2^{10} = 1$$

da cui:

$$n \cdot 2^{10} = m \cdot 5^{10} - 1 \qquad \text{ed} \qquad m = 841$$

allora:

$$N = 841 \cdot 5^{10} = 841 \times 9765625 = 8212890625$$

Nella seconda ipotesi:

$$m \cdot 2^{10} - n \cdot 5^{10} = 1 \qquad \text{ed} \qquad m = 1745224$$

da cui:

$$N = 1745224 \times 1024 = 1787109376$$

Nota. — Siccome tutte le potenze dei numeri che terminano con N sono di questa forma:

$$(10^{10}x + N)^p$$

e siccome si ha:

$$(10^{10}x + N)^p \equiv N^p \pmod{10^{10}}$$

se ne deduce questo teorema generale:

Tutte le potenze dei numeri terminanti coll'uno o coll'altro dei gruppi di 10 cifre 8212890625 - 1787109376, *terminano con queste medesime cifre disposte nello stesso ordine.*

VII. — *Qual'è il più piccolo numero intero che sia uguale a quattro volte il prodotto delle proprie cifre?*

Saranno almeno due le cifre del numero cercato, e rappresentandole con d ed u si avrà:

$$10\,d + u = 4\,du \qquad \text{da cui} \qquad d = \frac{u}{4\,u - 10}$$

Il minor valore di u sarà dunque 3. Si ha poi:

$$u \geqq 4\,u - 10 \qquad \text{da cui} \qquad 3\,u \leqq 10$$

ossia il maggior valore di u è 3, epperò si ha necessariamente $u = 3$ e se ne deduce per d il valore $\frac{3}{2}$ che non è ammissibile. Segue da ciò che il numero cercato ha più di due cifre.

Avremo dunque:

$$100\,c + 10\,d + u = 4\,c\,d\,u \qquad \text{da cui} \qquad c = \frac{10\,d + u}{4\,du - 100}$$

Il numeratore sarà, al massimo, 100; si ha perciò:

$$4\,du - 100 \leqq 10\,d + u < 100 \qquad \text{da cui} \qquad d\,u < 50$$

Ma essendo $4\,du > 100$ si ha pure $du > 25$; per conseguenza du è compreso fra 25 e 50. Si ha poi che $10\,d + u$ è divisibile per $4\,du - 100$ e quindi per 4; ne segue che i soli valori ammissibili per u sono 2, 4, 6 ed 8.

A tali valori corrispondono per d i valori superiori 24, 12, 8, 6 e quelli inferiori 13, 7, 5 e 4.

Il valore $u = 2$ è dunque da scartare e:

(A) per $u = 4$, d può assumere uno dei 3 valori 7-8-9
(B) per $u = 6$, d » » » 4 » 5-6-7-8
(C) per $u = 8$, d » » » 4 » 4-5-6

Esaminiamo tali ipotesi:

(A) $u = 4$ e $d = 7 - 8 - 9$

I numeri 74 e 94 non sono divisibili per 4; non si può avere che $d = 8$ da cui $c = 3$ e perciò $N = 384$.

(B) $u = 6$ e $d = 5 - 6 - 7 - 8$

I numeri 65 e 86 non sono divisibili per 4; non può essere che $d = 5$ o 7 per cui:

$$d = 5 \quad c = \frac{14}{5} \quad \text{e per} \quad d = 7 \quad c = \frac{19}{17}$$

(C) $u = 8$ e $d = 4 - 5 - 6$

Si può assumere $d = 4$ o 6 per cui:

$$d = 4 \quad c = \frac{12}{7} \quad \text{e per} \quad d = 7 \quad c = \frac{68}{92}$$

Dunque l'unica soluzione del problema è data dal numero 384.

VIII. — *Trovare tutti i numeri quadrati perfetti formati di quattro cifre pari.*

Ogni quadrato perfetto, di 4 cifre pari, è compreso in uno dei quattro intervalli:

2000 a 3000 4000 a 5000 6000 a 7000 8000 a 9000

La radice, che è un numero pari, non può trovarsi che in uno degli intervalli corrispondenti:

44 a 55 63 a 71 77 a 84 89 a 95

Osserviamo ora che moltiplicando un numero pari per sè stesso, le cifre a destra di ciascun prodotto parziale sono pari. Affinchè il quadrato sia terminato da due cifre pari bisogna dunque che la cifra delle decine del primo prodotto parziale sia pari; tale condizione non è soddisfatta che quando il riporto precedente fornito dalla cifra delle decine del quadrato delle unità è un numero pari. Risulta da ciò che sono da escludere tutti i numeri terminanti con 4 o con 6.

I numeri cercati sono dunque necessariamente compresi fra i quadrati dei 10 numeri seguenti:

48 - 50 - 52 - 68 - 70 - 78 - 80 - 82 - 90 - 92

Sperimentando si trovano le quattro soluzioni:

$$68^2 = 4624 \qquad 78^2 = 6084 \qquad 80^2 = 6400 \qquad 92^2 = 8464$$

Nota. — Con ragionamento analogo si può stabilire che non esiste alcun quadrato perfetto di 4 cifre dispari.

IX. — *Quali sono i numeri interi x, y e z, che soddisfano all'eguaglianza* $\frac{x}{y} \times z = \frac{x}{y} + z$?

Soluzione. — Da questa eguaglianza si deduce:

$$z = \frac{x}{x - y}$$

Ponendo $x = y + u$ si avrà:

$$z = \frac{y + u}{u} = \frac{y}{u} + 1$$

Poichè z deve essere intero, si deve avere $y = m\,u$ da cui

$$z = m + 1 \qquad x = (m + 1)\,u$$

Cosicchè l'eguaglianza domandata sarà:

$$\frac{(m+1)\,u}{m\,u} \times (m + 1) = \frac{(m+1)\,u}{m\,u} + (m + 1)$$

da cui le identità:

$$\frac{7}{6} \times 7 = \frac{7}{6} + 7 \qquad \frac{156}{143} \times 12 = \frac{156}{143} + 12, \text{ ecc.}$$

assai curiose, a prima vista.

PROBLEMI DIVERSI

Problemi cinesi (1).

I. — *Nel mezzo O d'uno stagno quadrato di 10 piedi di lato, cresce una canna di palude, che s'innalza dal fondo sino in B, ad un piede sopra il livello A dell'acqua. Tirando la canna verso il margine dello stagno essa ne raggiunge per la punta precisamente l'orlo in C, punto di mezzo d'un suo lato. Qual'è la profondità dell'acqua?*

Poniamo $OA = x$; abbiamo poi:

$$AB = 1 \qquad AC = 5 \qquad OB = x + 1 = OC$$
$$(x + 1)^2 = 25 + x^2 \qquad x = 12$$

La profondità dello stagno è dunque di 12 piedi.

II. — *Un bambù alto 10 piedi è rotto ad una certa altezza. Ravvicinando la parte superiore verso terra fino a toccare il suolo, il vertice del bambù si trova a tre piedi dalla base. A quale altezza si trova la rottura?*

La soluzione di questo problema, anche più ingenuo del precedente, è h = piedi 4,55.

Problemi greci.

I. — *Policrate, tiranno di Samos, domanda a Pitagora il numero dei suoi allievi. Pitagora risponde che: la metà studia le belle scienze matematiche; l'eterna Natura è*

(1) Varii problemi, che si risolvono aritmeticamente, ho nondimeno riuniti in questo §, a motivo delle comuni origini.

l'oggetto dei lavori d'una quarto; un settimo si esercita al silenzio e alla mediazione; vi sono inoltre tre donne.

Si tratta di trovare un numero di cui la metà, aumentata di un quarto, d'un settimo e di 3 formi il numero stesso, cioè:

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{7}+3=x \qquad \text{che dà} \qquad x=28$$

II. — *O tu che indichi sì bene le ore, quante ne sono trascorse da stamane, se restano due volte i due terzi delle ore trascorse?*

In latino:

Did quota nunc hora est? Superest tantum ecce diei
Quantum bis gemini exacta de luce trientes.

Essendo presso gli antichi la giornata divisa in 12 ore, le ore trascorse più le ore da trascorrere formeranno 12 ore. Quelle che restano a trascorrere valgono i $\frac{4}{3}$ di quelle trascorse. Dunque i $\frac{7}{3}$ delle ore trascorse valgono 12.

Ore trascorse:

$$12 \times \frac{3}{7} = 5^h\,\frac{1}{7}$$

Ore che restano da trascorrere:

$$6^h\,\frac{6}{7}$$

Ossia, essendo x le ore trascorse:

$$x+2\times\frac{2}{3}x=12 \qquad\qquad x=5^h\,\frac{1}{7}$$

III. — *Sono un leone di bronzo; due getti zampillano dai miei occhi, un altro dalla mia gola, un altro da una mia zampa. In due giorni il mio occhio destro riempie la vasca, il mio occhio sinistro in tre, e la mia zampa in quattro giorni. Per riempirla bastano 6 giorni allo zampillo della mia gola. Se tutti i getti, de' miei occhi, della mia gola e della zampa colano ad un tempo, in quante ore riempiranno la vasca?*

I quattro zampilli in un'ora riempiono, colando assieme:

$$\frac{1}{48}+\frac{1}{72}+\frac{1}{96}+\frac{1}{6}=\frac{61}{288}$$

della vasca. Essa sarà quindi riempita in $\frac{288}{61}$ di ore, pari a $4\frac{44}{61}$

IV. — *Le Grazie portavano dei canestri di mele; incontrarono le Muse e ne diedero loro un certo numero, uguale per ciascuna, e si trovarono ad avere ancora ognuna tante mele quante ne avevano date ad ognuna Musa. Quante mele avevano e quante ne hanno donate?*

Il numero totale delle mele possedute dalle tre Grazie è evidentemente un multiplo di 3. Tale numero è pure divisibile per 12 poichè dopo la spartizione, tanto le Grazie come le Muse hanno lo stesso numero di mele. Essendo 3 un fattore di 12 potremo considerare quest'ultimo numero come una soluzione del problema, il quale ammette tante soluzioni quanti sono i multipli di 12 . . . . . compatibilmente con la grossezza delle mele e con le forze delle Grazie che le portavano, elementi sui quali la Mitologia è muta.

L' Epitaffio di Diofanto.

Questa tomba rinchiude Diofanto. Oh, meraviglia! Essa dice matematicamente quanto egli ha vissuto. Dio gli accordò il sesto della sua vita per l'infanzia; aggiunse un dodicesimo perchè le sue guance si coprissero della peluria dell'adolescenza; inoltre per un settimo fece brillare per lui la fiamma d'Imene e dopo 5 anni di matrimonio gli diede un figlio, ahimè! unico ed infelice bambino al quale la Parca non permise di vedere che la metà della vita di suo padre. Durante quattro anni ancora consolando il suo dolore con lo studio delle cifre, Diofanto raggiunse alfine il termine della sua vita.

Ecco l'enunciato medesimo in versi latini:

Hunc Diophantus habet tumulum qui tempora vitæ
Illius, mira denotat arte tibi.
Egit sex tantem juvenic; lanugine malas
Vestire hinc cœpit parte duodecima.

Septante uxori post hæc sociatur, et anno
 Formosus quinto nascitur inde puer.
Semissem ætatis postquam attigit ille paternae,
 Infelix subita morte peremptus obit.
Quator æstater genitor lugere superstes
 Cogitur, hinc annos illius assequere.

Ed ora, in misera prosa algebrica, la soluzione, del resto semplicissima.

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+\frac{x}{2}+5+4=x \qquad x=84$$

Un verso latino.

Il Gesuita Bernardo Bauhuis, nei suoi momenti di svago, si è occupato del problema seguente: *In quanti modi la sintassi latina permette di trasportare le parole di questo verso:*

Tot tibi sunt dotes, Virgo, quot sidera cælo!

In un suo libro il Bauhuis ne indica 1222. Il problema, del quale si occuparono pure Bernouilli ed altri, ammette, *matematicamente*, 40320 permutazioni . . . . . ma la grammatica, sia pure latina, non ci permette di stabilire, *in modo preciso*, se il numero 1222 dato dal Bauhuis sia proprio da ritenersi esatto.

Ecco, ad esempio, una delle trasposizioni indicate dal celebre gesuita:

Sidera quot cælo, tot sunt, Virgo, tibi dotes.

Secondo Bernouilli si potrebbe arrivare a 3,312! Ma credo che su tale numero sarebbe difficile mettere d'accordo i Grammatici, quand'anche si volessero sottoporre al loro esame le 40,320 permutazioni, perchè avessero a scegliere quelle accettabili. Le leggi grammaticali hanno dell'elasticità, incompatibile col rigorismo matematico.

Anche la nostra lingua, del resto, permetterebbe un bel numero di trasposizioni delle parole della traduzione letterale del verso:

Tante sono le tue virtù, Vergine, quante le stelle in cielo.

Il problema delle uova.

Tre contadine, Maria, Caterina e Serafina, vanno al mercato con 50, 30 e 10 uova rispettivamente, che la loro madre vuole siano vendute allo stesso prezzo, pur imponendo alle tre figlie di ricavare dalle proprie vendite somme uguali. Come risolvettero il problema le tre contadinelle?

Esse cominciarono col vendere le proprie uova in ragione di 7 per un soldo (tempi remoti!). Maria ne vende dunque 49 ricavandone 35 centesimi e gliene resta uno; Caterina ne vende 28 per 20 centesimi e gliene rimangono due; Serafina ne vende 7 per 5 centesimi e gliene restano tre. Sulla fine del mercato le uova rincarono e le tre sorelle possono vendere le uova a 15 centesimi l'uno e ricavano perciò rispettivamente 15, 30 e 45 centesimi. Esse ricavarono dunque 50 centesimi ciascuna e la loro madre fu accontentata nel suo capriccio.

Problema.... d'altri tempi!

Due commessi ricevono, il primo 1000 lire all'anno con un aumento annuo di lire 20. Il secondo ha lo stesso stipendio del primo con un aumento semestrale di 5 lire. Sapendo che i pagamenti vengono fatti ogni anno per il primo ed ogni semestre per il secondo, si vuol sapere quale dei due guadagni di più.

Il secondo guadagna di più. Infatti.

Alla fine del primo anno il primo tocca 1000 lire, mentre il secondo ne percepisce 500 + 505 = 1005.

Alla fine del secondo anno il primo riceve 1020 lire e il secondo 510 + 515 = 1025 lire.

Alla fine del terzo anno il primo riceve 1040 lire e il secondo 520 + 525 = 1045 lire.

Insomma il secondo commesso guadagna ogni hanno 5 lire più del suo collega.

La scommessa.

Un tale scommette l'ennesima parte del proprio avere sopra un avvenimento a probabilità pari, come per es. il cadere di testa o di croce d'una moneta lanciata in aria. Egli ricomincia sempre così, scommettendo ogni volta l'ennesima parte di ciò che possiede. Supponendo che egli abbia avuto un ugual numero di volte la sorte favorevole o contraria, avrà avuto perdita o guadagno?

La risposta è facile: avrà perduto.

Il problema delle tre classi.

Le tre classi sono composte rispettivamente di a, b *e* c *allievi. Se nella prima vi fossero 11 volte tanti allievi e 3 d'altri, nella seconda 9 volte tanti e 7 d'altri, e nella terza 5 volte tanti e 2 d'altri, ne avrebbero tutte lo stesso numero. Qual'è il numero degli allievi di ciascuna classe?*

Dall'equazione di condizione del problema:

$$11a + 3 = 9b + 7 = 5c + 2$$

si ricavano i valori di a espressi per b e c:

$$a = \frac{9b + 4}{11} \qquad\qquad a = \frac{5c - 1}{11}$$

I valori interi di b e c che danno valori interi di a sono:

b	a
2	2
13	11
24	20
35	29
..	..
..	..
..	..

c	a
9	4
20	9
31	14
42	19
53	24
64	29
..	..

I valori di b costituiscono una progressione aritmetica di ragione 11, come pure quelli di c; i corrispondenti valori di a costituiscono due progressioni aritmetiche di ragione 9 e 5 rispettivamente. Il primo valore di a costituente una soluzione del problema è 29, comune a queste due progressioni, e ad esso corrispondono:

$$b = 35 \qquad \text{e} \qquad c = 64$$

Ma il problema ammette *infinite* altre soluzioni che sono date per a dalla progressione aritmetica avente il 29 come primo termine e per ragione 45, prodotto delle ragioni 9 e 5 delle due progressioni anzidette.

$$\div\, 29 \cdot 74 \cdot 119 \cdot 164 \cdot 209 \cdot 254 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Per b dalla progressione:

$$\div\, 35 \cdot 90 \cdot 145 \cdot 200 \cdot 255 \cdot 310 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

la cui ragione è 5×11.

Per c dalla progressione:

$$\div\, 64 \cdot 163 \cdot 262 \cdot 361 \cdot 460 \cdot 559 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

la cui ragione è 9×11.

Le ragioni 5, 9, 11 sono appunto i *moltiplicatori* stabiliti nel problema.

Il salario del servitore.

Un padrone promette al suo servitore di dargli 10 monete da 20 lire all'anno ed un mantello. Ma dopo soli 7 mesi lo licenzia dandogli il mantello e 2 monete da 20 lire. Qual'è il valore del mantello?

Il padrone deve, dopo i 7 mesi, i $\frac{7}{12}$ delle 10 monete e i $\frac{7}{12}$ del valore del mantello.

Avendo il servitore ricevuto il mantello e due monete, ne segue che i $\frac{5}{12}$ del valore del mantello corrispondono alla differenza fra i $\frac{7}{12}$ delle 10 monete e 2 di tali monete. Quindi il valore del mantello è di 9 pezze da 20 lire ed $\frac{1}{5}$.

I barili di vino e le gabelle.

Due negozianti di vino entrano in città, uno con 64 barili e l'altro con 20, dello stesso prezzo. Siccome non hanno moneta a sufficienza per pagare la gabella, il primo paga con 5 barili e aggiunge 40 lire, l'altro con due barili e riceve 40 lire di resto. Qual'è il prezzo del barile e quanto paga di gabella?

È facile mettere il problema in equazione; indicando con x il prezzo del barile e con y il dazio, si ha:

$$59\,y = 5\,x + 40 \qquad\qquad 18\,y = 2\,x - 40$$

da cui:

$$x = 110 \text{ lire} \qquad \text{e} \qquad y = 10 \text{ lire}$$

Il mercante alla fiera.

Un mercante va ad una fiera e riesce a raddoppiarvi il proprio capitale e vi spende 5; ad una seconda fiera triplica il suo avere e spende 9; ad una terza poi quadruplica il suo denaro e spende 12. Dopo ciò gli è rimasto 8. Quante unità aveva in principio il nostro mercante?

Soluzione. Aveva 4 unità e $\frac{5}{6}$.

Il muratore pigro.

Un muratore ha pattuito di fare un certo lavoro a condizione di ricevere 5 lire al giorno quando lavora e di perderne 7 quando non lavora. Dopo 48 giorni il lavoro era finito ma il muratore poco laborioso non percepì alcuna mercede. Quanti giorni di riposo si è egli concesso?

La soluzione è facilissima:

$$x + y = 48 \qquad 5\,x = 7\,y \qquad x = 28 \qquad y = 20$$

Le giornate di riposo furono dunque 20.

Gli operai negligenti.

Una squadra di operai ha preso impegno di eseguire un lavoro che richiederebbe p *ore se tutti gli operai cominciassero a lavorare alla medesima ora. Ma essi giungono alla officina uno dopo l'altro e ad intervalli uguali. Il lavoro viene in tal maniera compiuto. Sapendo che la mercede di ciascun operaio è stata proporzionale al tempo durante il quale egli ha lavorato, e che quello che ha cominciato per primo ha riceveuto* m *volte quanto l'ultimo arrivato, si domanda quanto tempo fu necessario per eseguire quel lavoro.*

Se x è il numero degli operai, y quello delle ore di lavoro dell'ultimo di essi, e z l'intervallo di tempo, in ore, trascorso tra l'arrivo del primo e del secondo operaio all'officina, si ha:

$$y + (x - 1) z = my \tag{1}$$

Se t rappresenta il lavoro fatto in un'ora, il lavoro totale sarà espresso da:

$$\{y + (y + z) + (y + 2z) + \cdots + [y + (x - 1) z]\} t$$

ma questo stesso lavoro è uguale a $p\,t\,x$; dunque:

$$y + (y + x) + (y + 2z) + \cdots + [y + (x - 1) z] = p\,x$$

ossia:

$$[2y + (x - 1) z] \frac{x}{2} = p\,x \qquad 2y + (x - 1) z = 2p$$

Confrontando con (1) se ne deduce:

$$y = \frac{2p}{m + 1}$$

e il tempo totale cercato risulta espresso da:

$$\frac{2pm}{m + 1}$$

I tacchini e il grano.

Una certa quantità di grano deve servire a nutrire n *tacchini, ed è calcolata in modo da durare un certo tempo determinato, se ogni tacchino ne mangia una misura per setti-*

mana. Facendo la distribuzione si trova che lo sciame diminuisce d'un tacchino per settimana e che per conseguenza il grano dura il doppio. Quante misure di grano erano state preparate e quanto tempo ha durato?

Sia x il numero delle misure cercate ed y il numero delle settimane che deve durare il grano. Si ha:

$$\frac{x}{y} = n \qquad \text{ossia} \qquad x = n\,y$$

Ma il numero di misure distribuite nella 1^a, 2^a, 3^a, ... p^{ma} settimana è rappresentato da:

$$n \qquad n-1 \qquad n-2 \cdots\cdot \qquad n-p+1 \cdots\cdot$$

e così fino alla $2\,y^{ma}$ settimana. Ne segue che:

$$n+(n-1)+(n-2)+\cdots+(n-p+1)+\cdots+(n-2y+1)=x$$

$$(2\,n+1-2\,y)\,\frac{2\,y}{2}=x \qquad 2\,n-2\,y+1=\frac{x}{y}=n$$

da cui:

$$y=\frac{n+1}{2} \quad \text{sicché} \quad x=\frac{n\,(n+1)}{2} \quad \text{e} \quad 2\,y=n+1$$

L'aranceto.

Un uomo penetrò in un orto nel quale erano tre giardini e vi fece provvista di arance. Ma per uscirne dovette darne al primo guardiano la metà più due, al secondo la metà di quelle che gli rimanevano più due e poi al terzo pure la metà di quelle rimastegli più due. In tal modo non riuscì a conservare per sè che una sola melarancia. Quante ne aveva egli colte?

Essendo x il numero delle arance richiesto, il primo guardiano ne riceve $\frac{x}{2}+2$ e il primo resto è quindi $\frac{x}{2}-2$; il secondo ne riceve $\frac{x}{4}-1+2=\frac{x}{4}+1$ epperò il secondo resto è $\frac{x}{2}-2-\frac{x}{4}-1=\frac{x}{4}-3$; e così si trova che il terzo resto è $\frac{x}{8}-\frac{7}{2}$; da ciò $\frac{x}{8}-\frac{7}{2}=1$ donde $x=36$.

Il costo dell'anello.

Un anello d'oro pesa 5 grammi con un granato incastrato. Il valore dell'oro è di 4 lire per gramma e quello del granato di 10 lire per gramma. Il costo dell'anello con la gemma è di 24 lire. Determirare il peso dell'oro e del granato.

La soluzione, facilissima, dà $4\frac{1}{3}$ per l'oro e $\frac{2}{3}$ pel granato.

I quattro peculii.

Quattro persone possiedono rispettivamente x, y, z e u lire. Se la prima e la seconda avessero 100 lire delle altre due, avrebbero il triplo dei denari rimasti a queste ultime. Così se y e z avessero 106 lire di quelle possedute da x ed u avrebbero il quadruplo di ciò che ad essi rimane. Se z ed u avessero 145 del denaro di x ed y avrebbero il quintuplo del loro resto. Se x ed u avessero 170 lire di y e z avrebbero il sestuplo del loro resto. Quanto possiede ciascuno?

Il problema messo in equazione dà:

$$x + y + 100 = 3\,(z + u - 100)$$

ossia:

$$x + y - 3z - 3u = -400 \qquad (1)$$

$$y + z + 106 = 4\,(u + x - 106)$$

ossia:

$$y + z - 4u - 4x = -530 \qquad (2)$$

$$y + u + 145 = 5\,(x + y - 145)$$

ossia:

$$z + u - 5x - 5y = -870 \qquad (3)$$

$$u + x + 170 = 6\,(y + z - 170)$$

ossia:

$$u + x - 6y - 6z = -1190 \qquad (4)$$

L'indeterminatezza del sistema non è assoluta, ossia si possono determinare tre qualunque delle incognite in funzione della quarta.

Infatti, moltiplicando la (1) per 5 ed aggiungendo la (3), si ha:

$$z + u = 205$$

Moltiplicando i due membri della (2) per 6 ed aggiungendovi la (4), si ha:

$$u + x = 190$$

Moltiplicando i due membri della (3) per 3 ed aggiungendovi la (1), si ottiene:

$$x + y = 215 \qquad \text{ed infine} \qquad y + z = 230$$

Addizionando membro a membro queste quattro ultime equazioni risulta:

$$x + y + z + u = 420$$

$$y = 230 - z \qquad u = 205 - z \qquad x = z - 15 \qquad z = \frac{0}{0}$$

I tre soci.

Tre individui hanno in comune una somma incognita s; *la parte del primo è* $\frac{1}{2}$ s, *quella del secondo* $\frac{1}{3}$ s, *e quindi quella del terzo è* $\frac{1}{6}$ s. *Volendo depositare questa somma in luogo più sicuro ne prelevano, a caso, ciascuno una parte e cioè: il primo* x *e ne deposita* $\frac{1}{2}$ x; *il secondo* y *e ne deposita* $\frac{1}{3}$ y *e il terzo* z *e ne deposita* $\frac{1}{6}$ z; *cosicchè la somma che rimane depositata è* $\frac{1}{2}$ x + $\frac{1}{3}$ y + $\frac{1}{6}$ z; *quando poi i tre soci vanno a ritirare questo deposito non hanno che a prenderne ciascuno la terza parte per ricevere ciascuno quello che gli spetta. Si tratta di trovare i numeri* x, y, *e* z.

Indichiamo con u la terza parte della somma depositata, cioè:

$$u = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z\right). \qquad (1)$$

Per il primo avremo:

$$\frac{1}{2} x = \frac{1}{2} s - u \qquad (2)$$

pel secondo:

$$\frac{2}{3} y = \frac{1}{3} s - u \qquad (3)$$

e pel terzo:

$$\frac{5}{6} z = \frac{1}{6} s - u \qquad (4)$$

da cui si ricava:

$$x = s - 2 u \qquad y = \frac{1}{2} s - \frac{3}{2} u \qquad z = \frac{1}{5} s - \frac{6}{5} u$$

e addizionando:

$$x + y + z = \frac{17}{10} s - \frac{47}{10} u = s \quad \text{da cui} \quad 7 s = 47 u$$

Questo problema, indeterminato, è il terzo di quelli proposti da Giovanni da Palermo a Leonardo da Pisa (1). Leonardo ponendo $u = 7$ ottenne:

$$s = 47 \qquad x = 33 \qquad y = 13 \qquad z = 1$$

Essendo $s = \frac{47}{7} u$ basta dare ad u valori uguali a 7 moltiplicato per 6 (o per un suo multiplo) per avere nella soluzione *tutti* numeri interi, come vedesi nel seguente prospetto:

u	s	x	y	z	$\frac{1}{2} s$	$\frac{1}{3} s$	$\frac{1}{6} s$	$\frac{1}{2} x$	$\frac{1}{3} y$	$\frac{1}{6} z$
7	47	33	13	1	$23 \frac{1}{2}$	$15 \frac{2}{3}$	$7 \frac{5}{6}$	$16 \frac{1}{2}$	$4 \frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
42	282	198	78	6	141	94	47	99	26	1
126	846	594	234	18	423	272	141	297	78	3
...	...	...	..	...	...	...	...	...	...	...

(1) Vedi pagina 189.

L'acqua e il vino.

Due recipienti A *e* B *contengono rispettivamente* a *litri di vino e* b *d'acqua. Si prelevano* c *litri dal vaso* A *e si sostituiscono con acqua. Si prelevano parimenti da* B, c *litri e si sostituiscono con i* c *litri tolti da* A. *Si ripete* n *volte tale operazione. Si vuol sapere quanto vino contiene il secondo vaso* B *dopo queste* n *operazioni.*

Siano $q_1, q_2, q_3 \cdots q_n$ le quantità di vino contenute nel vaso B dopo 1, 2, 3 .... n operazioni. Se si pone:

$$\left(1 - \frac{c}{a}\right) = p \qquad \text{e} \qquad \left(1 - \frac{c}{b}\right) = q$$

si trova:

$$q_1 = c\,\frac{p-q}{p-q} \qquad q_2 = c\,\frac{p^2-q^2}{p-q} \qquad q_3 = c\,\frac{p^3-q^3}{p-q}$$

$$q_n = c\,\frac{p^n-q^n}{p-q} = \frac{b\left[\left(1-\frac{c}{a}\right)^n - \left(1-\frac{c}{b}\right)^n\right]}{1-\frac{b}{a}}$$

Se $a = b$:

$$q_n = n\,c\left(1-\frac{c}{a}\right)^{n-1}$$

I battimazza.

Due fabbri A *e* B *cominciano nello stesso istante a battere il pezzo sull'incudine;* A *batte 12 colpi in 7 minuti e* B *17 in 9 minuti. Quali saranno i colpi che più si avvicineranno alla coincidenza nella prima mezz'ora di lavoro?*

I tempi trascorsi, per l'uno e per l'altro fabbro, dall'inizio fino ad un colpo x di A che supponiamo coincidente con uno y di B, saranno uguali a:

$$x \times \frac{12}{7} = y \times \frac{17}{9} \qquad \text{ossia} \qquad \frac{x}{y} = \frac{119}{108}$$

Ora:

$$\frac{119}{108} = 1 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}}$$

Le frazioni convergenti $\frac{1}{1}, \frac{10}{9}, \frac{11}{10}, \frac{54}{49}, \frac{119}{108}$ da sinistra a destra si approssimano ognor più all'ultima $\frac{119}{108}$ e la $\frac{54}{49}$ ne è la più prossima. Ma A non può battere che 51 colpi in mezz'ora, quindi la frazione da assumere come valore di $\frac{x}{y}$ è $\frac{11}{10}$ vale a dire che durante la prima mezz'ora di lavoro l'undicesimo colpo di A e il decimo di B sono i più prossimi alla coincidenza.

I rintocchi delle campane.

Tre campane cominciarono a suonare nello stesso tempo; i loro rintocchi si ripetono ad intervalli uguali rispettivamente di 25'' per la prima, 29'' per la seconda e 33'' per la terza. La prima cessa di suonare dopo meno di mezz'ora; la seconda e la terza continuano a suonare rispettivamente per 18 e 21 secondi, poi cessano. Si vuol sapere per quanto tempo ha suonato ciascuna campana.

Se $25\,t$ è il numero dei secondi durante i quali la prima campana ha suonato essa avrà dato $(t + 1)$ rintocchi, La seconda ne avrà dati:

$$1 + \frac{25\,t + 18}{29} = 1 + x \qquad (1)$$

e la terza:

$$1 + \frac{25\,t + 21}{33} = 1 + y \qquad (2)$$

La (1) e la (2) si possono scrivere:

$$29\,x - 18 = 25\,t \qquad 33\,y - 21 = 25\,t$$

d'onde si ricava l'equazione indeterminata:

$$33\,y - 29\,x = 3$$

Da essa si deduce:

$$x = 33\,m - 24 \qquad\qquad y = 29\,m - 21$$

Poichè $25\,t < 1800''$, si ha $x < 62$ e per conseguenza $m < 3$ dunque non si possono fare altre ipotesi, che $m = 1$ od $m = 2$ Per:

$$m = 1 \qquad x = 9 \qquad y = 8$$
$$m = 2 \qquad x = 42 \qquad y = 37$$

Si ha pure:

$$29\,x - 18 = 25\,t$$

Per $x = 9$ il valore di t non è intero, e per $x = 42$ si ha $t = 48$; dunque i tre valori:

$$t = 48 \qquad x = 42 \qquad y = 37$$

soddisfano alle condizioni proposte. Sicchè la prima campana cessa di suonare dopo $48 \times 25 = 1200''$ e le tre campane hanno suonato rispettivamente 49, 43 a 38 rintocchi.

Le tre mogli.

Tizio, Caio e Sempronio vanno al mercato con le loro mogli, i cui nomi sono Aida, Medea ed Ebe. Ognuna delle 6 persone compra un certo numero di oggetti che paga un numero di lire uguale al numero degli oggetti che ha acquistato. — Tizio ha comprato 23 oggetti di più di Medea, e Caio 11 di più di Aida. Ciascun marito ha speso 63 lire di più della propria moglie. Qual'è la moglie di Tizio e quale è quella di Caio e di Sempronio?

Il numero degli oggetti acquistati da uno degli uomini sia x, ed y quello degli oggetti acquistati da sua moglie:

$$x^2 - y^2 = 63 = (x + y)(x - y) = 63 \cdot 1 = 21 \cdot 3 = 9 \cdot 7$$

Si può dunque porre:

$$x + y = 63 \quad \text{od} \quad x + y = 21 \quad \text{o} \quad x + y = 9$$
$$x - y = 1 \quad \text{od} \quad x - y = 3 \quad \text{o} \quad x - y = 7$$

da cui si deducono queste soluzioni:

$$x = 32 \quad \text{o} \quad x = 12 \quad \text{o} \quad x = 8$$
$$y = 31 \quad \text{o} \quad y = 9 \quad \text{o} \quad y = 1$$

Ma Tizio ha comprato 23 oggetti di più di Medea e Caio 11 di più di Aida dunque essi hanno comprato questo numero di oggetti: Tizio 32, Medea 9, Caio 12 ed Aida 1. Segue da ciò che la soluzione $x = 32$, $y = 31$ concerne Tizio ed Ebe; l'altra $x = 12$, $y = 9$ concerne Caio e Medea; e l'ultima $x = 8$, $x = 1$ riguarda Sempronio e Aida, e tali sono le tre coppie di cui nel problema.

Il cuoco cortese.

Riproduco questo problema in versi francesi come Nesser li ha inseriti nella sua *Rabdologie*:

Un jour le cuisinier d'un puissant personnage,
Afin de contenter trois filles du village,
Qui demandaient des œufs, leur dit en les voyant:
Je vais donner tous ceux que j' ai dans le moment.
Il donne la moitié d'abord à la première
Et la moitié d'un œuf, par faveur singulière;
À la seconde il offre aussi du meilleur cœur,
La moitié qui lui reste, avec même faveur
De la moitié d'un œuf dont la fille s'empare:
Enfin, continuant son partage bizarre,
Il donne à la troisième avec même amitié,
De son troisième reste encore l'humble moitié,
Plus la moitié d'un œuf: il eut donc l'avantage
De tout distribuer. Dans cet heureux partage,
Qui parait singulier, combien en avait-il?
Et comment a-t-il eu l'esprit assez subtil,
Pour donner des moitiés a chaque jeune fille
Sans en casser un seul, ni s'échauffer la bile?

Il cuoco dà alla terza ragazza la metà di ciò che gli rimane e mezzo uovo in più, e non gli resta più nulla; dunque questo mezzo uovo rappresenta ciò che gli resta dopo aver distribuito alla terza ragazza. Ma a questa egli ha dato la metà del suo secondo resto il quale è dunque necessariamente di un uovo; e questo gli rimane dopo aver dato alla seconda ragazza la metà del suo primo resto, più mezzo uovo. Dunque, se egli non avesse dato questo mezzo uovo in più, gli sarebbe rimasto un uovo e mezzo, il che rappresenta la metà del primo resto, il quale è dunque di 3 uova. Con ragionamento analogo si trova he il cuoco possedeva in origine 7 uova.

Problemi sull'orologio.

I. — *Un orologio ha tre sfere montate sul medesimo asse, per le ore, i minuti e i secondi. È possibile che a un dato istante queste tre sfere abbiano la loro estremità ai vertici d'un triangolo equilatero?*

Se le tre sfere potessero avere la posizione indicata sarebbero distanti l'una dall'altra di 20 divisioni del quadrante. Dunque, se in tale istante la sfera H (ore) segna φ divisione a partire dal XII, l'estremità della sfera M (minuti) sarà sulla divisione $\varphi + 20$ e quella s (secondi) sulla divisione $\varphi + 40$; o, inversamente, s sarà sulla divisione $\varphi + 20$ ed M sulla $\varphi + 40$.

È facile vedere l'impossibilità di questi due casi. Si avrebbe infatti nel primo caso:

$$60n + \varphi + 20 = 12\varphi \qquad \text{e} \qquad 60n' + \varphi + 40 = 720\varphi$$

ossia:

$$\frac{6n+2}{6n'+4} = \frac{11}{719} = \frac{3n+1}{3n'+2} \qquad 11(3n' + 2) = 719(3n + 1)$$

ma essendo:

$$11 = 3q + 2 \qquad \text{e} \qquad 719 = 3q' + 2$$

la relazione precedente condurrebbe a quest'altra:

$$(3q + 2)(3n' + 2) = (3q' + 2)(3n + 1) \tag{1}$$

Ora:

$$(3q + 2)(3n' + 2) = \text{Mult. di } 3 + 1$$

e

$$(3q' + 2)(3n + 1) = \text{Mult. di } 3 + 2$$

Dunque la relazione (1) è impossibile. Si avrebbe del pari nel secondo caso:

$$60n' + \varphi + 20 = 720\varphi \qquad \text{da cui} \qquad 60n' + 20 = 719\varphi$$

e

$$60n' + \varphi + 40 = 12\varphi \qquad \text{da cui} \qquad 68n + 40 = 11\varphi$$

Si ha dunque la relazione impossibile:

$$\frac{3n+2}{3n'+1} = \frac{11}{719}$$

11. — *Quali sono le ore alle quali si possono scambiare tra loro le sfere delle ore e dei minuti in modo che la nuova posizione possa prodursi per il movimento proprio dell'orologio?*

Indichiamo con x una delle ore cercate. Partiamo dalla posizione delle sfere a mezzogiorno e prendiamo l'ora come unità cosicchè il giro completo del quadrante sarà misurato da 12.

La posizione della sfera-ore è indicata con x; se il numero y indica la posizione della sfera-minuti, avremo:

$$12\,x = y + k \cdot 12 \qquad (1)$$

Affinchè la posizione risultante dallo scambio delle sfere corrisponda ad un'ora possibile, devesi dunque avere:

$$12\,y = x + k \cdot 12 \qquad (2)$$

Eliminando y fra (1) e (2) si trova:

$$144\,x = x + k \cdot 12 \qquad \text{ossia} \qquad 143\,x = k \cdot 12$$

da cui:

$$x = \frac{12\,k}{142} \qquad (3)$$

Volendo ottenere tutte le ore richieste dal problema bisogna dare successivamente a k i valori 0, 1, 2, 3 . . . . . . 142, dopo di che si ricadrà sulle soluzioni già ottenute.

Questa soluzione comprende, in particolare, le ore di *sovrapposizione* delle sfere, ottenute attribuendo a k gli undici valori:

0 - 13 - 26 - 39 - 52 - 65 - 78 - 91 - 104 - 117 - 130

Quanto agli altri 132 risultati, essi si corrispondono due a due e i valori *associati* di k che chiameremo k' e k'' sono tali che si ha:

$$k' = 12\,k'' \ (\text{mod. } 143)$$

d'onde reciprocamente:

$$k'' = 12\,k' \ (\text{mod. } 143)$$

Per esempio a $k' = 34$ corrisponderà $k'' = 122$. Questi due valori danno rispettivamente per x, facendo la conversione delle ore in minuti:

$$2^h\,51^m\,\frac{27}{143} \qquad \text{e} \qquad 10^h\,14^m\,\frac{38}{143}$$

Quindi se un orologio segna le $2^h\,51^m\,\frac{27}{143}$ e se in tale istante s'immaginano scambiate le sfere; esso segnerà le $10^h\,14^m\,\frac{38}{143}$.

La soluzione del problema dipende dalla relazione (3) la quale evidentemente e quella che farebbe conoscere le ore che corrisponderebbero sul quadrante all'incontro della sfera delle ore con un'altra sfera moventesi con velocità 144 volte maggiore corrispondente a 12 volte quella della sfera dei minuti.

III. — *Viene osservata l'ora indicata da una pendola, fra le 4 e le 5, poi fra le 7 e le 8; si constata che nell'intervallo tra le due osservazioni, le due sfere hanno scambiato le rispettive posizioni. Dimostrare che a ciascuna osservazione le sfere erano ugualmente inclinate rispetto alla verticale.*

Siano a e b le distanze in minuti, contate sulla circonferenza graduata, dalle estremità delle sfere alla verticale. Alla prima osservazione sono $(30 + a)$ minuti dopo le 4. La sfera delle ore percorre $\frac{1}{12}$ di tale distanza e:

$$b = 10 - \frac{30 + a}{12} \qquad \text{da cui} \qquad 12\,b + a = 90$$

Alla seconda osservazione sono $(30 - b)$ minuti dopo le 7; la sfera delle ore ha percorso $\frac{30 - b}{12}$ divisioni:

$$a = 5 + \frac{30 - b}{12} \qquad\qquad 12\,a + b = 90$$

dunque $a = b$.

IV. — *Che ora è quando la sfera delle ore si trova tra le II e le III e fa con quella dei minuti angolo di 60?*

Lo spazio angolare tra due *ore* del quadrante è di 30° e quello corrispondente ad un minuto, di 6° Alle II l'angolo delle sfere è di 60°. Si avrà l'ora cercata quando la sfera dei minuti, dopo raggiunta quella delle ore, l'avrà oltrepassata di 10 divisioni di 6°. Sia x il numero di tali divisioni che sarà percorso dalla sfera piccola, tra le II e l'istante cercato. Il percorso fatto nello stesso tempo dalla sfera grande sarà $12\,x$, che può anche essere espresso con $10 + x + 10$ ossia $20 + x$, per cui si ha l'equazione:

$$12\,x = 20 + x \qquad \text{da cui} \qquad 11\,x = 20$$

$$x = \frac{20}{11} = 1^9/_{11}$$

La sfera dei minuti avrà percorso $21\,^9/_{11}$; l'ora richiesta sarà dunque 2^h, $21'\,^9/_{11}$.

La bilancia del droghiere.

Un droghiere si serve d'una bilancia falsata in modo che quando acquista o vende merce guadagna l'11 % in più del guadagno legittimo che dovrebbe fare con una bilancia esatta. Invertendo l'ordine dei piatti della bilancia il beneficio si ridurrebbe a zero Quale è il guadagno legittimo del droghiere per 100 lire?

Siano p e p_1 i pesi apparenti di una certa quantità di merce prima acquistata, poi venduta; p è più piccolo e p_1 più grande del peso reale. Siano ancora q il prezzo d'acquisto dell'unità di peso ed x il guadagno legittimo su 100 lire.

Una merce acquistata per $p \cdot q$ è venduta per $p_1 \left(q + \frac{xq}{100}\right)$; si ha quindi:

$$p_1 \left(q + \frac{q\,x}{100}\right) - p\,q = \frac{x + 11}{100}\,p\,q$$

ossia:

$$p\,q \left(1 + \frac{x + 11}{100}\right) = p_1\,q \left(1 + \frac{x}{100}\right) \qquad (1)$$

Invertendo l'ordine dei piatti, la stessa merce che costa $p_1\,q$ è venduta $p\,q \left(1 + \frac{x}{100}\right)$, da cui:

$$p_1\,q = p\,q \left(1 + \frac{x}{100}\right) \qquad (2)$$

Da (1) e (2) si deduce:

$$1 + \frac{x + 11}{100} = \left(1 + \frac{x}{100}\right)^2 \qquad x = 10$$

Ecco ora un'altra soluzione del problema e il calcolo del rapporto dei bracci del giogo della bilancia falsata.

Sia p il prezzo che il droghiere dovrebbe pagare per una certa quantità di merce se si servisse d'una bilancia esatta, e q il prezzo alla quale egli la rivenderebbe nelle stesse condizioni; sia poi f il rapporto fra il minore ed il maggiore dei due bracci della bilancia falsata.

Il beneficio legittimo % è $\frac{q-p}{p}$ e con la bilancia alterata diventa:

$$\frac{\frac{q}{f} - p\,f}{p\,f}$$

Si ha dunque:

$$\frac{\frac{q}{f} - p\,f}{p\,f} = \frac{q-p}{p} + \frac{11}{100}$$

e ponendo $\frac{p}{q} = z$:

$$\frac{\frac{1}{f} - z\,f}{z\,f} = \frac{1-z}{z} + \frac{11}{100}$$

ossia:

$$100 = 100\,f^2 + 11\,z f^2 \qquad (1)$$

Ma quando il droghiere si serve della bilancia alterata nel senso inverso, il suo beneficio diventa:

$$\frac{q\,f - \frac{p}{f}}{\frac{p}{f}} = 0$$

per cui si ha:

$$q\,f^2 = p \qquad\qquad f^2 = z = \frac{p}{q}$$

Sostituendo nella (1) f^2 con z si ha l'equazione:

$$11\,z^2 + 100\,z - 100 = 0 \qquad \text{dalla quale} \qquad z = \frac{10}{11}$$

Se si ha:

$$\frac{p}{q} = \frac{10}{11} \qquad \text{se ne deduce} \qquad \frac{q-p}{p} = \frac{1}{10}$$

Si ha poi:

$$f = \sqrt{\frac{10}{11}} \qquad \text{ossia circa} \qquad 0{,}95 \text{ o } \frac{19}{20}$$

Cosicchè il droghiere, servendosi d'una bilancia coi bracci nel rapporto di 19 a 20 accresce il proprio beneficio dell' 11 %.

I quattro mobili.

Quattro mobili A, B, C, D *si spostano, in modo uniforme e con velocità che sono in progressione geometrica, su quattro rette parallele equidistanti, le cui estremità sono situate su altre due rette parallele. Essi partono nello stesso tempo dalle estremità situate su una stessa retta o, giunti*

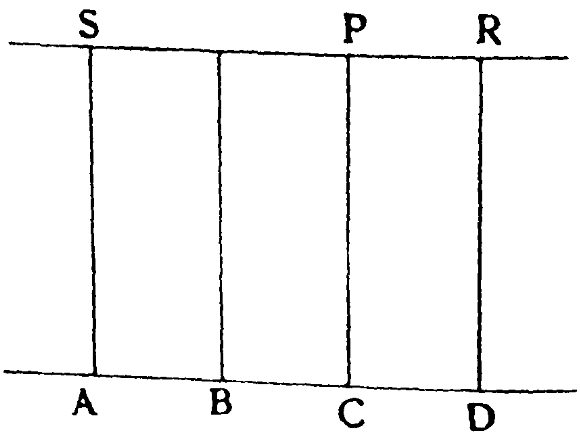


Fig. 128.

all'altra estremità, ritornano; e così di seguito. Dopo un certo tempo i tre mobili B, C, D *sono in linea retta per la prima volta; dopo un tempo doppio* A, B, C *sono in linea retta per la prima volta; 36 secondi dopo* B, C, D *sono in linea retta per la seconda volta e lo spazio percorso da* B *sorpassa di 14 centimetri quello percorso da* A, *quando i quattro mobili si ritrovano in linea retta. Determinare la velocità dei quattro mobili.*

Sia y la lunghezza comune delle 4 rette ed x, $r\,x$, $r^2\,x$, $r^3\,x$ le velocità di A, B, C, D in centimetri per secondo.

Il fatto che B, C, D si trovano in linea retta prima dei 3 mobili A, B, C dimostra che le velocità di A, B, C, D vanno decrescendo, ed è chiaro che B, C, D saranno in linea retta per la prima volta quando B e C si spostano ancora nel senso $A\,M$, mentre D è al suo primo ritorno.

Indicando con t il tempo (secondi) trascorso dalla partenza all'istante in cui B, C, D sono in linea retta. Le distanze dei tre mobili dai punti di partenza sono rispettivamente:

$$t\,r\,x \qquad tr^2\,x \qquad 2\,y - tr^3\,x$$

e si ha:

$$tr^2\,x - t\,r\,x = (2\,y - tr^3\,x) - tr^2\,x$$

ossia:

$$tr\,x\,(r^2 + 2\,r - 1) = 2\,y \tag{1}$$

Si troverà quando A, B, C sono in linea retta, cambiando x in $\frac{x}{r}$, ottendosi così:

$$2\,tx\,(r^2 + 2\,r - 1) = 2\,y \tag{2}$$

Dalle (1) e (2) si ricava $r = 2$, ossia che le velocità di A, B, C e D sono rispettivamente:

$$x \qquad 2\,x \qquad 4\,x \qquad 8\,x$$

Si vede che A, C, D avendo velocità proporzionali ad 1, 4, 8, essi si trovano una seconda volta in linea retta quando C è sul suo primo ritorno da P, e D si dirige una seconda volta verso R.

Indichiamo ora con θ il tempo (secondi) trascorso dalla partenza fino a tale posizione di A, C, D. Le distanze di questi tre mobili dai punti di partenza sono:

$$\theta \cdot x \qquad 2\,y - \theta \cdot 4\,x \qquad \theta \cdot 8\,x - 2\,y$$

Si ha:

$$(2\,y - \theta \cdot 4\,x) - \theta\,x = 2\,[(\theta \cdot 8\,x - 2\,y) - (2\,y - \theta \cdot 4\,x)]$$

da cui:

$$\theta = \frac{10\,y}{29\,x} \qquad \text{ma} \qquad \theta = 2\,t + 36$$

Dalla (1) abbiamo:

$$t = \frac{y}{7x} \qquad \text{dunque} \qquad \frac{10y}{29x} = \frac{2y}{7x} + 36$$

Si vede poi, dal rapporto delle velocità di A, B, C, D che questi 4 mobili saranno nuovamente in linea retta quando A avrà percorso $\frac{2y}{3}$ Quindi:

$$\frac{2y}{3} + 14 = \frac{10y}{29x} 2x \qquad y = 609 \qquad x = 1$$

e le velocità sono rispettivamente 1, 2, 4 e 8.

I due mobili.

Un mobile P percorre in modo continuo il perimetro d'un quadrato nel senso A, B, C, D con velocità uniforme e sempre nello stesso. Un altro mobile Q si sposta con la stessa velocità uniforme seguendo la diagonale del quadrato e ritornando indietro ogni volta che ne raggiunge una delle estremità. Dimostrare che, secondo le posizioni iniziali dei due mobili, si possono avere due soli casi:

1.° Essi non s'incontreranno mai.

2.° Essi s'incontreranno 1 volta, ma 1 volta solamente.

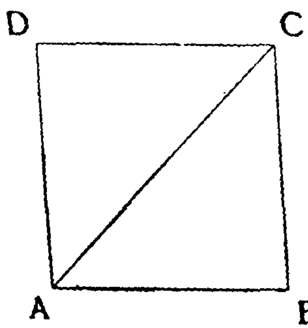


Fig. 129.

I due mobili s'incontreranno sul vertice A se Q si sposta verso A, e se, nello stesso momento, P si trova, sia alla stessa distanza da A che Q, sia alla stessa distanza aumentata di $2AC$. O, più generalmente, se nello stesso momento, la distanza di Q da A aumentata di $2m\ AC$ è uguale alla distanza, di P dal vertice A aumentata di $4n$ volte il lato del quadrato.

I due mobili s'incontreranno in A anche quando Q si sposta verso C e se allo stesso momento, la distanza di P dal vertice A è uguale alla diagonale più la distanza di Q da C. O, più generalmente, quando, nello stesso momento, la distanza di Q

dal vertice C aumentata di $(2m + 1)$ volte la diagonale, è uguale alla distanza di P dal vertice A, aumentata di $4n$ volte il lato del quadrato, m ed n essendo numeri intieri.

Nello stesso modo i due mobili s'incontrerebbero nel vertice C, ma quando si sono incontrati una prima volta, un secondo incontro è impossibile poichè essi descrivono spazi uguali in tempi uguali, e il lato e la diagonale del quadrato sono lunghezze incommensurabili.

Parimente, i due mobili non s'incontrano mai se le loro posizioni alla partenza sono due qualunque di quelle nelle quali si troverebbero simultaneamente secondo l'ipotesi d'un primo incontro in A o in C.

Bacco e Sileno.

Bacchus, ayant vu Silène
Auprès de sa cuve endormi,
Se mit à boire sans gène
Aux dépens de son ami.
Ce jeu dura pendant le triple du cinquième
Du temps qu'à boire seul Silène eût employé:
Il s'éveille bientôt, et son chagrin extrème
Dans le reste du vin est aussitôt noyé.
S'il eût bu prés de Bacchus même,
Ils auraient, suivant le problème,
Achevé six heures plus tôt:
Alors Bacchus eût eu, pour son écot,
Deux tiers de ce qu'à l'autre il laisse.
Ce qui maintenant m'intéresse
Est de savoir exactement,
Le temps qu'à chaque drôle il faut séparément
Pour vider la cuve entière,
Sans le secours de son digne confrère.

Indichiamo con x ed y i tempi rispettivamente impiegati da Bacco e da Sileno per vuotare la botte. Bevendo insieme, essi la vuoteranno in un tempo:

$$\frac{xy}{x+y}$$

Bacco beve da solo durante il tempo $\frac{3}{5}y$ e in tale intervallo beve la frazione $\frac{3}{5} \cdot \frac{y}{x}$ della botte. Egli lascia a Sileno

$$1 - \frac{3y}{5x} = \frac{5x - 3y}{5x}$$

il quale ha impiegato per bere questo vino il tempo indicato da:

$$\frac{5x - 3y}{5x} : \frac{1}{y} = \frac{(5x - 3y)\, y}{5x}$$

Secondo l'enunciato:

$$\frac{3}{5}y + \frac{(5x - 3y)\, y}{5x} - \frac{xy}{x+y} = 6$$

ossia:

$$3y^3 - 5xy^2 - 3x^2y + 30xy + 30x^2 = 0 \qquad (1)$$

Bacco beve con Sileno, durante $\frac{x+y}{xy}$ ore una frazione della botte uguale a $\frac{y}{x+y}$. Si ha dunque la seconda equazione:

$$\frac{y}{x+y} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5x - 3y}{5x}$$

ossia:

$$6y^2 + 11xy - 10x^2 = 0 \qquad (2)$$

Risolvendo le due equazioni (1) e (2) si trova:

$$x = 15 \qquad \text{ed} \qquad y = 10$$

Questa risposta fu data anche in versi, così:

Dans cette occasion Silène eut tout l'honneur.
En quinze heures Bacchus acheva la besogne;
Il n'en fallut que dix au digne précepteur:
J'en conclus qu'il était de moitié plus ivrogne!

Le scimmie.

Des singes s'amusaient: de la troupe bruyante
Un huitième au carré gambadait dans les bois;
Douze criaient tout à la fois
Au haut de la colline verdoyante.
Combien d'êtres comptait la caste remuante?

Indicando con x il numero delle scimmie, si ha l'equazione

$$x - \frac{x^2}{64} = 12$$

ossia:

$$x^2 - 64\,x + 768 = 0 \qquad \text{da cui} \qquad x' = 48 \quad x'' = 16$$

Le api.

Voici cet essaim de mouches à miel.
De la moitié prends la racine:
Dans un champ de jasmins cette troupe butine.
Huit neuvièmes du tout voltigent dans le ciel.
Une abeille solitaire
Entend dans un lotus un frelon bourdonner:
Attiré par l'odeur pendant la nuit dernière,
Il s'était fait prisonnier.
Dis moi: quel chiffre atteint la troupe buissonnière?

Sia $2\,x^2$ il numero delle api:

$$x + \frac{16\,x^2}{9} + 2 = 2\,x^2$$

da cui $x = 6$ trascurando l'altra radice che è negativa. Dunque le api sono 72.

L'eredità.

Un padre divide la propria eredità fra i suoi figli nel modo seguente: Il primo avrà una somma a *e la* n^{ma} *parte del resto; il secondo una somma* 2 a *e la* n^{ma} *parte del resto;*

il terzo una somma 3 a *e la* n^{ma} *parte del resto, e così di seguito. L'eredità è in tal modo interamente divisa e si trova che ciascuno figlio ha avuto la medesima somma. Si domanda l'ammontare dell'eredità, il numero dei figli e la parte di ciascuno di essi.*

I. *Soluzione.* — Sia x il montante dell'eredità e z il valore di ciascuna parte. Se si esprime che la parte del primo figlio è uguale a z, si ha l'equazione:

$$z = p\,a + \frac{x - (p-1)\,z - p\,a}{u}$$

ossia:

$$p\,[z - (n-1)\,a] = x - (n-1)\,z$$

Questa equazione dovendo essere indipendente dal valore di p, si ha:

$$z = (n-1)\,a \qquad x = (n-1)\,z = (n-1)^2\,a$$

II. *Soluzione.* — Esprimendo che le parti del p^{mo} e del $(p+1)^{mo}$ figlio sono uguali, si ha l'equazione:

$$p\,a + \frac{x - (p-1)\,z - p\,a}{n} = (p+1)\,a + \frac{x - p\,z - (p+1)\,a}{n}$$

ossia:

$$\frac{z}{n} = a - \frac{a}{n}$$

Questa equazione è indipendente da p e dà:

$$z = (n-1)\,a$$

Si ha poi, uguagliando la parte del primo figli ad $(n-1)\,a$

$$a + \frac{x-a}{n} = (n-1)\,a \qquad \text{da cui} \qquad x = (n-1)^2\,a$$

III. *Soluzione.* — Indicando con y il numero dei figli ed uguagliando le parti dei due primi avremo:

$$a + \frac{x-a}{n} = 2\,a + \frac{x - \left(a + \frac{x-a}{n}\right) - 2\,a}{n}$$

da cui:

$$x = (n-1)^2\,a$$

Si ha poi:

$$z = a + \frac{x - a}{n} = (n - 1)\,a. \qquad y = \frac{x}{z} = n - 1$$

Siccome, per mettere il problema in equazione, non ci siamo serviti che della uguaglianza delle prime due parti, è necessario verificare che le altri parti sono uguali ad $(n - 1)\,a$. Si trova infatti per la parte z' del primo figlio:

$$z' = p\,a + \frac{(n-1)^2\,a - (p-1)(n-1)\,a - p\,a}{n} = (n-1)\,a$$

IV. *Soluzione.* — La parte del primo figlio sarà ay, e, poichè tutte le parti sono uguali, il valore dell'eredità è ay^2. Uguagliando le parti del primo e dell'ultimo figlio, si trova:

$$d + \frac{ay^2 - a}{n} = ay \qquad \text{ossia} \qquad \frac{y^2 - 1}{n} = y - 1$$

da cui $y = 1$ od $n - 1$ ecc.

Questo modo di trattare il problema fornisce due soluzioni.

Anche in questa soluzione, come nelle precedenti, occorre verificare che tutte le parti sono uguali.

V. *Soluzione.* — Questa soluzione, di Mister, tiene conto di *tutte le soluzioni* dell'enunciato epperò non richiede alcuna verifica.

Quando un figlio ritira la propria parte, prende una certa somma e poi la n^{ma} parte d'un certo resto R_p e lascia.

$$\left(\frac{n-1}{n}\right) R_p$$

Il secondo figlio lascia:

$$\left(\frac{n-1}{n}\right) R_{p+1}$$

Affinchè due figli *consecutivi* abbiano parti uguali, occorre evidentemente che i resti R_p e R_{p+1} soddisfino all'equazione:

$$\frac{1}{n} R_p - R_{p+1} = a$$

ossia:

$$R_p - R_{p+1} = n\,a \tag{1}$$

La differenza tra le somme lasciate da due figli consecutivi costituisce necessariamente la parte d'un figlio; e, per quello che precede, questa parte avrà per valore

$$\frac{n-1}{n} R_p - \frac{n-1}{n} R_{p+1} \qquad \text{ossia} \qquad (n-1)\,a$$

Il capitale x lasciato dal padre si ricava dell'equazione:

$$a + \frac{x-a}{n} = (n-1)\,a \qquad \text{che dà} \qquad x = (n-1)^2\,a$$

e da essa si deduce il numero dei figli.

Un problema antico.

Trovare un rettangolo avente lo stesso perimetro di un altro, e la cui area sia un multiplo dell'area di questo.

L'elegante soluzione che Massimo Planude matematico di Bisanzio, indica, e che non pare sia sua (1) è la seguente:

Posto che λ sia il rapporto delle due aree, per uno dei rettangoli i lati saranno $(\lambda^3 - \lambda)$ e $(\lambda - 1)$ e per l'altro $(\lambda^3 - \lambda^2)$ e $(\lambda^2 - 1)$.

Pile di proiettili.

Quale è il limite verso il quale tende il rapporto del vuoto al pieno in una pila di proiettili sferici, quando il numero dei proiettili aumenta indefinitamente?

Nella pila triangolare un proiettile poggia su altri tre, e su quattro in quella quadrangolare; si potrebbe quindi credere che il rapporto cercato non debba essere lo stesso nei due casi; ma occorre notare come in entrambi ciascun proiettile dell'interno della pila sia in contatto con altri dodici i cui centri sono i vertici d'un poliedro che ha per facce sei quadrati ed otto triangoli equilateri. Il rapporto del vuoto al pieno in uno di tali poliedri non dà il risultato cercato perchè non si può sovrapporli senza lasciare degli spazi vuoti fra essi, mentre la sovrapposizione può farsi senza intervalli coi cubi formati prolungando fino al loro incontro le sei facce quadrate di ciascuno poliedro. È dunque in questi cubi che bisogna determinare il rapporto tra vuoto e pieno.

Assumendo come unità il raggio d'un proiettile, la costola del cubo sarà $\sqrt{2}$ e il suo volume $2\sqrt{2}$. Il pieno di questo

(1) V. *Gino Loria* « Le scienze esatte nell'antica Grecia » 2ª ediz. pag. 943. Manuali Hoepli.

cubo è costituito dal proiettile interno e dalla quarta parte di ciascuno dei dodici proiettili a contatto con esso; infatti, due facce del cubo passano pel centro di ciascuno dei dodici proiettili; la prima ne separa la metà e la seconda la *metà dell'altra* metà, dimodochè non resta nel cubo che il quarto dei dodici proiettili. Bisogna dunque aggiungere *tre* proiettili a quello centrale, e il volume del pieno risulterà $\frac{2\pi}{3}$. Il rapporto del cubo a questo volume sarà $\frac{3\sqrt{2}}{\pi}$, e quello del vuoto al pieno $\frac{3\sqrt{2}}{\pi} - 1$ ossia un poco più di $\frac{1}{3}$, e tale sarà il limite cercato.
Esso non potrebbe essere modificato che dalla parte superficiale della pila che è infinitamente piccola rispetto al volume totale dei cubi, quando il numero dei proiettili diventa infinito.

La piramide triangolare o quadrangolare formata unendo il centro d'un proiettile che poggia su tre o quattro altri, coi centri di questi, è regolare ed ha tutte le sue costole uguali al diametro del proiettile. Il vuoto contenuto in ciascuna di queste piramidi potrà venire calcolato togliendo dal volume della piramide quello della parte di essa occupata dai proiettili. Si osserverà poi che il numero dei vani di ciascuna di tali due specie di piramidi è doppio del numero dei proiettili, considerazione che condurrà al risultato che si cerca senza dover ricorrere alle tavole trigonometriche, osservando che nella piramide regolare a base quadrata e a costole uguali, gli angoli diedri maggiori sono doppi dei minori e supplementi di quelli del tetraedro regolare.

Si può, con metodo indiretto ma più speditivo, risolvere la quistione calcolando (nell'ipotesi d'un numero infinito di proiettili) il rapporto del volume d'una pila al volume dei proiettili che essa contiene.

Prendendo sempre come unità il diametro d'un proiettile e indicando con n la costola d'una pila triangolare, $\frac{n^3\sqrt{2}}{12}$ ne rappresenta il volume e $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ il numero di proiettili che contiene.

L'ipotesi di n infinito riduce quest'ultima espressione a $\frac{n^3}{6}$ per l'omissione dei termini che scompaiono rispetto ad n^3.

Il volume delle bombe essendo allora $\frac{\pi n^3}{36}$, il rapporto di quello della pila a quest'ultimo sarà $\frac{3\sqrt{2}}{\pi}$, come abbiamo trovato sopra.

Sulle probabilità.

1. — Un'urna contiene N biglie delle quali b bianche, n nere ed r rosse. La probabilità di estrarre al primo tratto una biglia bianca è $\frac{b}{N}$, e quella di estrarne una rossa o nera è $\frac{n+r}{N}$.

2. — Se k urne contengono ciascuna b biglie bianche ed r nere, la probabilità di non estrarre che biglie bianche estraendone una da ciascuna urna è data da:

$$\left(\frac{b}{b+r}\right)^k.$$

3. — Paradosso di d'Alembert. — La probabilità di far *testa* almeno una volta in due getti d'una moneta è $\frac{3}{4}$; in generale essa è $\frac{2^n-1}{2^n}$.

4. — Le probabilità di ottenere i punti 12, 11, 10, 9, 8, 7 gettando due dadi sono rispettivamente:

$$\frac{1}{36},\ \frac{1}{18},\ \frac{1}{12},\ \frac{1}{9},\ \frac{5}{36},\ \frac{1}{6}.$$

5. — Con sei dadi, a probabilità di ottenere con un sol tratto il colpo 1, 2, 3, 4, 5, 6 è data da $\frac{6^5}{5\,!}$.

6. — La probabilità d'ottenere con un dado n volte di seguito uno stesso punto è $\left(\frac{1}{6}\right)^n$ come pure quella di ottenere con due dadi n volte di seguito il punto 7, o con tre dadi n volte di seguito il punto 5, o con 6 dadi n volte di seguito il punto 7.

7. — Gettando n dadi a caso, si hanno tante probabilità di ottenere un totale di punti superiore a $7n+3$ quante se ne hanno di ottenerne uno che sia inferiore.

8. — La probabilità d'un avvenimento è α. In p prove, la probabilità che esso si produca q volte, in un determinato ordine è:

$$a = \alpha^q (1 - \alpha)^{p-q}$$

quella che si produca q volte in un ordine qualsiasi è:

$$A = C_{p,\, p-q}\, a$$

quella che si produca almeno q volte è:

$$\sum_{q=q}^{q=p} A$$

e quella che si produca almeno una volta è:

$$1 - (1 - \alpha)^p$$

9. — La probabilità di ottenere una unica volta un punto dato con n getti di un dado è:

$$\frac{5^{n-1} n}{6^n}$$

10. — Si hanno k biglietti d'una lotteria che ne comprende p; ciascuna estrazione è di q biglietti. La probabilità che ne sortano r è:

$$\frac{C_{p-k,\, q-r}\, C_{k,\, r}}{C_{p,\, q}}$$

Semplificazioni.

Certe espressioni algebriche o aritmetiche si riducono talora a forma semplicissima; la complicazione delle formole nelle quali figurano non è quindi che apparente. Non è però sempre facile vedere la possibilità della semplificazione. Così ad esempio per queste espressioni:

$$\sqrt{6 - \sqrt{6 - \sqrt{15 - 6\sqrt{6}}}}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}\left[11 - \sqrt{21} + \sqrt{6\left(5 - \sqrt{21}\right)}\right]}$$

che entrambe si riducono a $\sqrt{3}$.

Paradossi algebrici, aritmetici, ecc.

Si perviene al *paradossale*, all'*assurdo*, quando nel ragionamento si omette di tener calcolo di qualche elemento, condizione, particolare, ecc. che nasconde la propria importanza, sotto l'aspetto di cosa trascurabile.

L'algebra si presta assai bene a tranelli del genere. Ne indicheremo alcuni, anche in altro campo che non sia l'algebrico, rimandando al Capitolo Geometria per quelli geometrici.

1. — Siano due numeri uguali x ed y. Si avrà:

$$xy = x^2 \qquad \text{da cui} \qquad xy^2 - y^2 = x^2 - y^2$$

ossia:

$$y\,(x - y) = (x + y)\,(x - y)$$

da cui:

$$y = x + y \qquad \text{ossia} \qquad y = 2\,y \qquad \text{cioè} \qquad 1 = 2$$

Il *lato debole* è tanto evidente che si potrebbe risparmiare di accennarlo; esso consiste nel fattore $x - y$ che, per essere $x = y$, è uguale a zero.

Lasceremo in seguito al Lettore di trovare tali *lati deboli*.

2. — Siano due numeri differenti a e b e sia c la loro media aritmetica. Si avrà:

$$a + b = 2\,c \qquad \text{ed} \qquad (a + b)\,(a - b) = 2\,c\,(a - b)$$

ossia:

$$(a^2 - b^2) = 2\,ac - 2\,bc \qquad a^2 - 2\,ac = b^2 - 2\,bc$$

da cui:

$$a^2 - 2\,ac + c^2 = b^2 - 2\,bc + c^2$$

ossia:

$$(a - c)^2 = (b - c)^2 \qquad \text{d'onde} \qquad a = b$$

Dunque *tutti i numeri sono uguali!*

3. — Abbiasi l'identità $4 - 10 = 9 - 15$ che si può mettere sotto questa forma:

$$\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2$$

Estraendo la radice quadrata dai due membri dell'uguaglianza si ha:

$$2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2} \qquad \text{ossia} \qquad 2 = 3$$

Risultato assurdo, al quale si perviene per avere ommesso il doppio segno nella estrazione della radice quadrata.

4. — Siano a, b, e d, e i lati omologhi di due triangoli simili. Si ha:

$$a : d = b : e \qquad\qquad a\,e = b\,d$$

Moltiplicando ambi i membri per $(a - d)$ e sviluppando:

$$a^2 e - a\,e\,d = a\,b\,d - b\,d^2$$

$$a^2 e - a\,b\,d = a\,e\,d - b\,d^2$$

$$a\,(a\,e - b\,d) = d\,(a\,e - b\,d) \qquad\qquad a = d\,!$$

La spiegazione dell'assurdo cui si perviene è facile. Essendo $a\,e = b\,d$, si ha:

$$a\,e - b\,d = 0 \qquad \text{e quindi} \qquad a \cdot 0 = d \cdot 0$$

5. — Sia $a = \dfrac{3}{2}\,b$; moltiplichiamo ambo i termini dell'equazione per 4: avremo $4\,a = 6\,b$ che possiamo mettere sotto altra forma, per esempio:

$$14\,a - 10\,a = 21\,b - 15\,b \qquad \text{da cui} \qquad 5\,(3\,b - 2\,a) = 7\,(3\,b - 2\,a)$$

e dividendo tutto per $3\,b - 2\,a$ si ha infine $5 = 7 \ldots\ldots$

6. — Dimostrare che $9 = 5$. La differenza 56 fra 9^2 e 5^2 si può esprimere sotto questa forma:

$$9^2 - 5^2 = 2 \cdot 7 \cdot 9 - 2 \cdot 7 \cdot 5$$

che può scriversi così:

$$9^2 - 2 \cdot 9 \cdot 7 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7$$

Aggiungiamo ad ambi i membri 7^2:

$$9^2 - 2 \cdot 9 \cdot 7 + 7^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 + 7^2$$

ossia:

$$(9 - 7)^2 = (5 - 7)^2 \qquad \text{da cui} \qquad 9 - 7 = 5 - 7$$

Dunque $9 = 5 \ldots\ldots$ *C. D. D!*

7. — Se a è diverso da b, $x - a$ è pure diverso da $x - b$ e $(x - a)^2$ diverso da $(x - b)^2$, per cui l'equazione:

$$(x - a)^2 = (x - b)^2 \tag{1}$$

sembra impossibile. *Ciononondimeno*, effettuando i quadrati si ha:

$$x^2 - 2\,ax + a^2 = x^2 - 2\,bx + b^2$$

da cui:

$$x = \frac{1}{2}\,(a + b)$$

Spiegazione. — Sostituendo nell'equazione (1), per x il valore trovato $\frac{a+b}{2}$ si ottiene:

$$(b-a)^2 = (a-b)^2 \quad \text{ossia} \quad [-(a-b)]^2 = (a-b)^2$$

8. — Sia l'equazione:

$$\frac{3x-b}{3x-5b} = \frac{3a-4b}{3a-8b}$$

Queste frazioni sono evidentemente diverse dall'unità. Nondimeno sottraendole termine a termine si trova che ciascuna di esse è uguale a:

$$\frac{3x-3a+3b}{3x-3a+3b} = 1$$

Basta rilevare che questa identità è solo apparente, poichè risolvendo l'equazione proposta si trova $x = a - b$ e quindi:

$$\frac{3x-3a+3b}{3x-3a+3b} = \frac{0}{0} \text{ e non } = 1$$

9. — Si ha evidentemente $(-1)^2 = 1$; da cui, prendendo i logaritmi:

$$2 \log. (-1) = \log. 1 = 0 \qquad \log. (-1) = 0$$

$$-1 = e \quad \text{dunque} \quad -1 = 1 \ldots . !$$

Si può pervenire allo stesso risultato in quest'altro modo. Sia x una quantità che soddisfi all'equazione $e^x = -1$. Innalziamo a quadrato:

$$e^{2x} = 1 \quad \text{da cui} \quad 2x = 0 \quad \text{e} \quad x = 0$$

ed

$$e^x = e^0 \quad \text{ma} \quad e^x = -1$$

ed

$$e^0 = 1 \quad \text{dunque} \quad -1 = 1$$

10. — Siano a e b due numeri e c la loro differenza;

$$a - b = c$$

Moltiplicando ambi i membri dell'uguaglianza per $(a-b)$, avremo:

$$a^2 - 2ab + b^2 = ca - cb$$

che può scriversi:

$$a(a-b-c) = b(a-b-c)$$

da cui $a = b$. Dunque *tutti i numeri sono uguali!*

11. — Abbiamo che:

$$\log.(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots$$

Se $x = 1$ la serie risultante è convergente ed allora abbiamo:

$$\log. 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots$$

da cui:

$$2 \log. 2 = 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \dots$$

Raggruppiamo i termini dello stesso denominatore e semplifichiamo:

$$2 \log. 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots = \log. 2$$

dunque $2 = 1$.

12. — L'identità $\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$ si può mettere sotto la forma:

$$\sqrt{\frac{-1}{1}} = \sqrt{\frac{1}{-1}}$$

da cui:

$$\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$$

e $(\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{1})^2$ vale a dire $-1 = 1$.

13. — Abbiamo l'uguaglianza $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, analogamente:

$$\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)}$$

ossia:

$$(\sqrt{-1})^2 = \sqrt{1} \qquad \text{dunque} \qquad -1 = 1$$

14. — Un'identità algebrica è vera qualunque siano i simboli che vi figurano. Ora noi abbiamo un'identità:

$$\sqrt{x-y} = i\sqrt{y-x} \tag{1}$$

nella quale i rappresenta $+\sqrt{-1}$ oppure $-\sqrt{-1}$. Ma una identità in x ed y è vera qualunque siano i numeri rappresentati da x e da y. Poniamo:

$$x = a \qquad y = b; \qquad \sqrt{a-b} = i\sqrt{b-a} \tag{2}$$

Facciamo ora:

$$x = b \qquad y = a; \qquad \sqrt{b-a} = i\sqrt{a-b} \tag{3}$$

Poichè la (1) è un'identità ne segue che nelle (2) e (3) il simbolo i deve essere lo stesso, ossia, che esso rappresenta nei due casi:

$$+\sqrt{-1} \qquad \text{o} \qquad -\sqrt{-1}$$

Per conseguenza dalle (2) e (3) deduciamo:

$$\sqrt{a-b} \times \sqrt{b-a} = i^2 \sqrt{b-a} \times \sqrt{a-b}$$

ossia:

$$1 = i^2 \qquad 1 = -1$$

15. — Quando il prodotto di due numeri è uguale al prodotto di altri due numeri, i quattro numeri costituiscono una proporzione e se il primo termine di essa è maggiore del secondo, il terzo termine sarà parimente maggiore del quarto.

Così da $a\,d = b\,c$ si deduce:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

e se si ha $a > b$ si avrà pure $c > d$. Poniamo ora:

$$a = d = 1 \qquad \text{e} \qquad b = c = -1$$

avremo pure quattro numeri che soddisfano alla relazione $a\,d = b\,c$ e tali che $a > b$; si dovrebbe dunque avere $c > d$ ossia $-1 > 1$, il che è assurdo.

16. — Consideriamo la ben nota formola trigonometrica:

$$\text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1$$

dalla quale

$$\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2\, x$$

Innalziamo alla potenza $\frac{3}{2}$:

$$(\cos^2 x)^{3/2} = (1\ \text{sen}^2\, x)^{3/2}$$

ossia

$$[(\cos^2 x)^{1/2}]^3 = \cos^3 x = (1 - \text{sen}^2\, x)^{3/2}$$

Aggiungiamo 3 ad ambi i membri:

$$\cos^3 x + 3 = (1 - \text{sen}^2\, x)^{3/2} + 3$$

Moltiplichiamo per 2:

$$2\,(\cos^3 x + 3) = 2\,[\,(1 - \text{sen}^2\, x)^{3/2} + 3\,] \tag{A}$$

Se supponiamo $x = \pi$, si avrà:

$$2(\cos^3 \pi + 3) = 2\left[(1 - \operatorname{sen}^2 \pi)^{3/2} + 3\right] \qquad (B)$$

Ora, $\cos \pi = -1$; $\cos^3 \pi = -1$; $\operatorname{sen} \pi = o$; $\operatorname{sen}^2 \pi = o$, quindi l'equazione (B) diventa:

$$2.(-1 + 3) = 2\left[(1 - o)^{3/2} + 3\right]$$

ossia $$2 \times 2 = 2(1 + 3)$$

cioè $$4 = 8 \ldots\ldots$$

Se diamo ad x, nella formola (A), i valori $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ si perviene a risultati esatti.

Dove sta dunque l'errore? In questo, che nell'equazione (B):

$$(1 - \operatorname{sen}^2 \pi)^{3/2} = \sqrt{(1 \operatorname{sen}^2 \pi)^3} = \pm 1$$

per cui la (B) diviene:

$$2(-1 + 3) = 2(\pm 1 + 3)$$

ossia si hanno due soluzioni, una falsa, da scartarsi ($4 = 8$) e l'altra esatta cioè $2 \times 2 = 2 \times 2$.

Come si vede il *neo* del calcolo algebrico era anche qui abbastanza visibile.

17. — Lanciando in aria tre monete la probabilità che esse cadano tutte e tre di *testa* è evidentemente $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$; come pure che esse cadano tutte e tre dal lato *croce*.

Quindi la probabilità che le tre monete cadano tutte *nella stessa maniera*, cioè tutte e tre *testa* o tutte e tre *croce* è $\frac{1}{4}$.
Ma fra le tre monete così lanciate, due almeno cadono nella stessa maniera. Ora la probabilità che la terza cada di testa è $\frac{1}{2}$, ed $\frac{1}{2}$ è pure la probabilità che essa cada di croce. Quindi la probabilità di vederla cadere come le due prime è rappresentata da $\frac{1}{2}$. Parrebbe quindi risultare da ciò che la probabilità che le tre monete cadano tutte in una stessa maniera sia data da $\frac{1}{2}$ e non da $\frac{1}{4}$.

18. — Dividendo 1 per $1 + x$ si trova la serie:

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots\cdots$$

Ponendo $x = 1$ si ha:

$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots\cdots$$

ma aggruppando per due i termini del secondo membro si ha zero per risultato; dunque ...... $\frac{1}{2} = 0$.

Daniele Bernouilli ha cercato di provare con un ragionamento metafisico basato sulla natura stessa della serie di cui si tratta, che il suo valore è $\frac{1}{2}$. Eccolo in sunto: la somma dei termini della serie $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots\cdots$ è uguale a zero o all'unità secondo che il numero dei termini considerati è pari o dispari; ora, l'infinito non essendo pari nè dispari ne segue che non v'è maggior ragione perchè la somma della serie infinita sia zero od 1 e quindi, secondo le regole del calcolo delle probabilità dovrà essere:

$$\frac{1+0}{2} \quad \text{ossia} \quad \frac{1}{2}.$$

19. — Dall'equazione esatta:

$$e^{2\pi\sqrt{-1}} = e^{4\pi\sqrt{-1}} \tag{A}$$

innalzando alla potenza $\sqrt{-1}$ si deduce l'equazione assurda:

$$e^{-2\pi} = e^{-4\pi} \tag{B}$$

Ma occorre osservare quanto segue. Per definizione:

$$e^{2\pi\sqrt{-1}} = \cos 2k\pi + \sqrt{-1}\,\text{sen}\, 2k\pi = 1$$

Abbiamo dunque digià che ciascuno dei due nembri della equazione (A) rappresenta l'unità (1).

(1) *M. Vallès*. Des formes imaginaires; leur interprétation en abstrait et en concret. Paris - Gauthier - Villars, 1869.

D'altro lato l'espressione $\left(\textit{potenza}\sqrt{-1}\right)$ non avendo alcun senso *a priori*, ammetteremo che:

$$\left(e^{2k\pi\sqrt{-1}}\right)^{\sqrt{-1}} = 1^{\sqrt{-1}}$$

e ci basterà definire quest'ultimo simbolo. Ora, se si pone:

$$1^{\sqrt{-1}} = y$$

si ha in generale (1):

$$l\,y = \sqrt{-1}\,l(1) = \sqrt{-1}\cdot 2\,k'\,\pi\sqrt{-1} = -2\,k'\,\pi$$

dunque:

$$y = e^{-2\,k'\,\pi}$$

o in altri termini. La potenza $\sqrt{-1}$ dell'espressione:

$$e^{2\,k\pi\sqrt{-1}}$$

ha un'infinità di valori reali, disuguali e costituenti una progressione per quoziente. In particolare innalzando alla potenza indicata con $\sqrt{-1}$ le due espressioni (A) uguali ciascuna alla unità, si riproduce due volte tale progressione. Ma dall'essere:

$$e^{2\,k\sqrt{-1}} = e^{4\,\pi\sqrt{-1}}$$

non si può concludere che sia:

$$e^{-2\pi} = e^{-4\pi}$$

20. — Se si elimina θ fra le due equazioni:

$$y = (x - a)\,\text{tang}\,\theta \qquad\qquad y = -(x - a)\cot\theta \tag{1}$$

moltiplicandole membro a membro, si trova:

$$y^2 + (x - a)^2 = 0 \tag{2}$$

---

(1) V. «*Cours d'Analyse*» di Sturm.

Ma se si scrivono le equazioni (1) così:

$$x \operatorname{sen} \theta - y \cos \theta = a \operatorname{sen} \theta \qquad x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta = a \operatorname{sos} \theta \tag{3}$$

e si fa la somma dei quadrati si ottiene:

$$x^2 + y^2 = a^2 \tag{4}$$

Spiegazione. — Le equazioni (1) rappresentano, quando θ varia, due rette rettangolari mobili intorno al punto $(a, 0)$. Se si resta nel campo del reale il luogo dell'intersezione di queste due rette si riduce al punto $(a, 0)$. Ma ciascuna delle rette isotrope (di coefficiente angolare $\pm \sqrt{-1}$) condotte pel punto $(a, 0)$ essendo perpendicolare a sè medesima, si può anche dire che il luogo considerato si compone dell'insieme di queste rette rappresentato dall'equazione (2).

Se si innalzano a quadrato le equazioni (3) e le si addizionano membro a membro, si combinano due rette parallele m ed n condotte per i punti $(a, 0)$ e $(-a, 0)$ con due rette m' e n' condotte per gli stessi punti in direzioni rispettivamente perpendicolari alle rette m ed n. Le rette m', n', come pure le rette n ed m' si segano sul cerchio (4).

21. — *Cercare il luogo del punto medio* P *d'una corda* MN *d'un'ellisse, che sia veduta dal centro* O *sotto angolo retto.*

Le equazioni della corda MN e del diametro coniugato OP essendo:

$$y = m x + n \qquad y = -\frac{b^2}{a^2 m} x \tag{1}$$

e la condizione che l'angolo MON sia retto esprimendosi con l'uguaglianza:

$$n^2 (a^2 + b^2) = a^2 b^2 (1 + m^2) \tag{2}$$

l'equazione del luogo P si ottiene eliminando m ed n fra le relazioni (1) e (2). Si trova:

$$(a^2 + b^2 (a^2 y^2 + b^2 x^2) = a^2 b^2 (a^4 y^2 + b^4 x^2) \tag{3}$$

Il luogo passerebbe dunque per l'origine delle coordinate, oppure l'equazione (3) conterrebbe un fattore estraneo.

Spiegazione. — L'origine è un *punto isolato* della curva. Infatti, la condizione di perpendicolarità $1 + m m' = 0$ è verificata per:

$$m = m' = +\sqrt{-1} \qquad \text{e per} \qquad m = m' = -\sqrt{-1}$$

Risulta da ciò che le rette MN, OM, ON possono confondersi in una sola avente per equazione:

$$y = x\sqrt{-1} \qquad \text{o} \qquad y = -x\sqrt{-1}$$

O è il punto medio d'una tale corda.

La stessa difficoltà si presenta quando si cerca la pedale del centro O d'un'ellisse. Questo punto è un *punto isolato* della podaria; esso corrisponde agli assintoli immaginarii uscenti dal centro.

Una dimostrazione teologica.

È del P. Gratry. Egli pretendeva dimostrare matematicamente che Dio, ossia l'*infinito*, può creare qualche cosa dal nulla, ossia dallo zero Infatti, egli diceva, $\frac{A}{0}$ è il simbolo matematico dell'infinito; moltiplicandolo per zero si ha $\frac{0}{0}$ che è il simbolo dell'intederminazione, ossia che rappresenta un valore qualunque.

Senonchè il P. Enfantin, pur trovando *ingegnosa assai* la dimostrazione faceva rilevare come il P. Gratry concludesse con essa appunto al contrario di quanto si era proposto di dimostrare, poichè ammetteva che per creare qualche cosa $\left(\text{ossia } \frac{0}{0}\right)$ con *zero*, Dio dovesse già essere in possesso di A ossia d'una quantità determinata.

L'equazione di 2° grado risolta aritmeticamente.

Un numero N è una somma che può essere divisa, in $\frac{N}{2}$ modi, in due numeri il cui prodotto varia da $N-1$ ad $\left(\frac{N}{2}\right)^2$. Cosicchè si ha:

$$\begin{array}{lll} & & \textbf{differenza} \\ 1 + (N-1) = N & 1 \times (N-1) = 1\,N - 1 & \\ & & N-3 \\ 2 + (N-2) = N & 2 \times (N-2) = 2\,N - 4 & \\ & & N-5 \\ 3 + (N-3) = N & 3 \times (N-3) = 3\,N - 9 & \\ & & N-7 \\ \dots\dots & \dots\dots\dots & \end{array}$$

$$\left(\frac{N}{2}-1\right)+\left(\frac{N}{2}+1\right)=N\left(\frac{N}{2}-1\right)+\left(\frac{N}{2}+1\right)=\left(\frac{N}{2}\right)^2-1 \quad \Big\} \; 3$$

$$\frac{N}{2}+\frac{N}{2}=N \qquad \frac{N}{2}\times\frac{N}{2}=\left(\frac{N}{2}\right)^2 \quad \Big| \; 1$$

In questo prospetto possiamo notare due cose:

1.° La colonna delle differenze dei diversi prodotti successivi è una progressione aritmetica di ragione 2; dimodochè i diversi prodotti derivano dalla quantità $N-1$ alla quale si aggiungono successivamente i termini d'una progressione aritmetica decrescente, di ragione 2, che comincia con $N-3$ e termina coll'unità.

2.° Ciascuno dei termini di tale progressione rappresenta la differenza $+1$ dei fattori che compongono i prodotti corrispondenti. Così:

$$N-3=(N-2)-2\,,+1$$
$$N-5=(N-3)-3\,,+1$$
$$N-7=(N-4)-4\,,+1$$

Passiamo ora a risolvere il problema seguente:

Problema. — *Trovare due numeri la cui somma sia 100 e il prodotto 2211.*

Con l'algebra noi abbiamo subito l'equazione:

$$x^2-100\,x+2211=0 \qquad x'=33 \qquad x''=67$$

Aritmeticamente, invece, cominciamo col costruire lo specchietto di cui sopra:

		differenze
$1+99=100$	$1\times 99=99$	
$2+98=100$	$2\times 98=196$	97
$3+97=100$	$3\times 97=291$	95
. . . . . .	. . . . . .	93

Il prodotto 2211 sarà nella colonna dei prodotti e la differenza cercata si trova al livello corrispondente nelle differenze. Secondo la prima osservazione, fatta sopra, si ha:

$$2211=99+97+95+\ldots\ldots$$

Il quoziente 2211 per 99 sarà un limite inferiore del numero di termini della progressione decrescente che, nel loro insieme, costituiscono il numero 2211:

$$\frac{2211}{99} = 22 \times 99 + 33 \text{ di resto}$$

Ma, eccettuato il primo termine 99 che è esatto, ciascuno degli altri 21 termini è rispettivamente minore di 2, 4, 6 .... 42 unità, che aggiunte le une alle altre, e a 33 di resto, dànno:

$$33 + \frac{2+42}{2} \times 21 = 495$$

Queste 495 unità ci forniscono un certo numero di altri termini della serie a partire dal 23^{mo}, che è 55.

Dividiamo parimente 495 per 55:

$$\frac{495}{55} = 9$$

Il primo termine 55 essendo il solo esatto rimangono:

$$2 + 4 + 6 + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + 16$$

unità da sottrarre sugli altri 8 termini:

$$\frac{2+16}{2} \times 8 = 72$$

Queste 72 unità ci forniranno altri termini della serie a partire dal 32^{mo} che è 37. Ora 72 ci fornisce appunto i due ultimi termini 37 e 35, poichè $37 + 35 = 72$. Il termine cercato è dunque -35, cioè secondo la 2^a osservazione fatta sopra, la differenza dei due numeri, $+1$. La differenza dei due numeri essendo 34 e la loro somma 100, 134 è due volte maggiore e 66 è due volte minore. Due radici cercate sono dunque 33 e 67.

Altra soluzione. — Se i due numeri fossero uguali a 50, la loro somma sarebbe 100 e il loro prodotto 2500. Il prodotto dato essendo 2211, la differenza 289 rappresenta il quadrato della differenza in più od in meno fra il numero 50 e quelli cercati.

La soluzione sarà quindi:

$$50 \pm \sqrt{289} = 50 \pm 17 = \left| \begin{array}{l} 67 \\ 33 \end{array} \right.$$

Soluzione questa assai più breve della precedente.

Soluzione grafica delle equazioni.

Sia $f(x) = 0$ un'equazione algebrica. Siano:

$$\varphi(x, y) = 0 \qquad \psi(x, y) = 0$$

due equazioni tali che l'equazione alle ascisse dei punti comuni alle curve che esse definiscono sia precisamente $f(x) = 0$; quando ciò sia possibile, ad ogni punto reale comune alle due curve φ e ψ corrisponderà una radice reale dell'equazione $f(x) = 0$. La reciproca non è necessariamente vera. Può infatti accadere che (indicando con α una radice reale dell'equazione precedente) le radici comuni alle equazioni:

$$\varphi(\alpha, y) = 0 \qquad \psi(\alpha, y) = 0$$

non siano tutte reali, dimodochè ad una radice reale dell'equazione $f(x) = 0$ può corrispondere un punto immaginario (avente ascissa reale) comune alle due curve φ, ψ.

Supponiamo scelte in modo queste due curve che ogni punto ad esse comune e avente ascissa reale, sia necessariamente reale; il calcolo delle radici reali dell'equazione proposta $f(x) = 0$ si riduce in tal caso alla costruzione dei punti comuni alle due curve φ, ψ.

Supponendo verificate le condizioni accennate, e costrutte le due curve φ, ψ (prendendo per unità una lunghezza determinata) si misureranno con tale unità le ascisse dei punti reali comuni alle due curve e si avranno così i valori numerici delle radici dell'equazione proposta; il che si dice *risolvere graficamente* questa equazione.

Passiamo ora ad alcuni esempii.

Equazione di secondo grado.

1. — Se nell'equazione:

$$x^2 + px + q = 0$$

poniamo:

$$y = x^2 \quad \text{si ha} \quad y + px + q = 0$$

Non si ha dunque che da trovare i punti comuni ad una parabola di secondo grado e ad una retta.

Esempio. — Sia l'equazione data:

$$x^2 + \frac{1}{2}\,x - \frac{3}{2} = 0$$

Costrutta la parabola $y = x^2$ (con $OH = 1$) e tracciata la retta

$$y + p\,x + q = 0$$

ossia:

$$y + \frac{1}{2}\,x - \frac{3}{2} = 0 \qquad \left(OP = 3 \qquad OR = \frac{3}{2}\right)$$

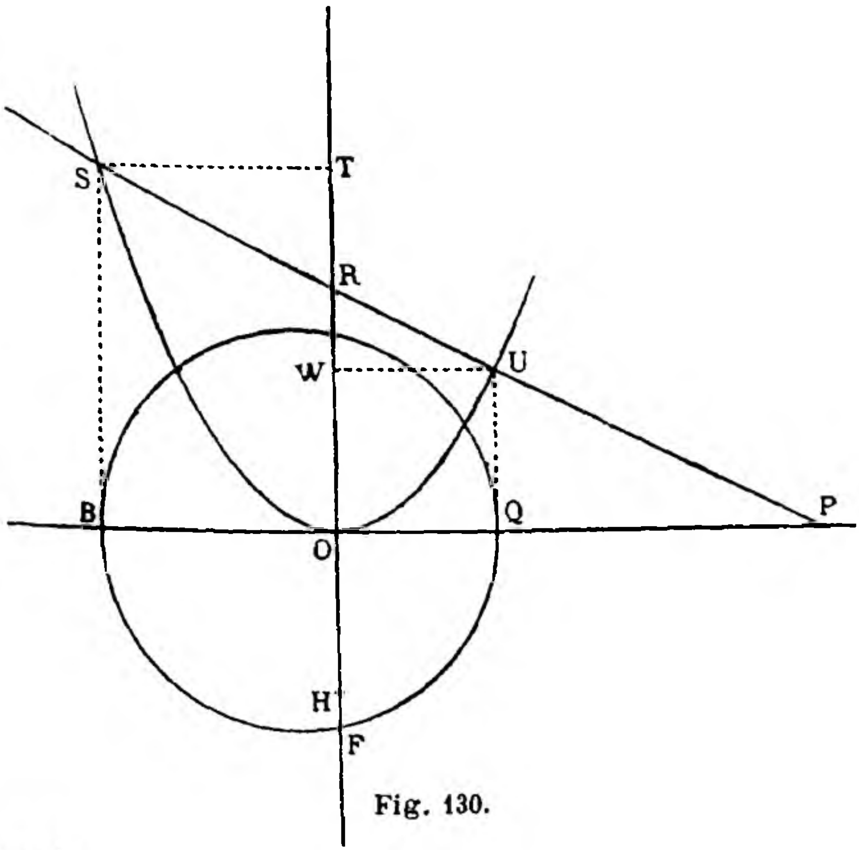


Fig. 130.

si avrà:

$$VU = x_1 = 1 \qquad\qquad TS = x_2 = -\frac{3}{2}$$

Come è ben noto i punti U ed S si possono ottenere *senza tracciare* la conica.

2. — Le radici dell'equazione data sono le ascisse dei punti d'intersezione (fig. 130) dell'asse x col cerchio $B\ F\ Q$ avente per equazione:

$$x^2 + y^2 + p\,x + q = 0$$

circolo che si può sempre costruire (fig. 130); quindi il problema è ridotto a trovare le intersezioni d'una retta con un circolo.

3. — Rendiamo omogenea l'equazione generale, introducendovi la linea r considerata come *unità:*

$$x^2 + p\,x = q\,r^2$$

E, mettendo i segni in evidenza:

$$x^2 \pm p\,x = \pm\,k^2$$

indicando con k una media proporzionale fra r e il valore assoluto di q. Abbiansi ora a costruire le radici dell'equazione:

$$x^2 + p\,x = k^2$$

Prendiamo su di una retta, un segmento $E\,F = p$ e descriviamo su di esso, come diametro, un cerchio; conduciamo in

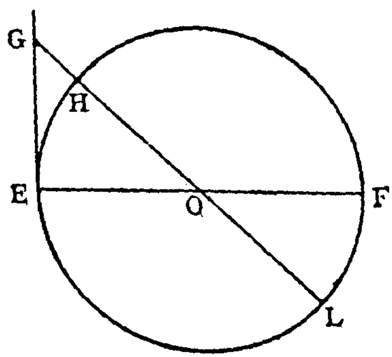


Fig. 131.

E la tangente $E\,G = k$ e conduciamo la $G\,L$ per il centro O. Le pue radici dell'equazione saranno rappresentate da $G\,H$ e da $-\,G\,L$. Siccome l'equazione:

$$x^2 - p\,x = k^2$$

non differisce dalla precedente che per il segno, le sue radici saranno GL e $-GH$. L'equazione:

$$x^2 - px = -k^2$$

si può mettere sotto questa forma:

$$x(p-x) = k^2$$

Descriviamo sulla retta $EF = p$ come diametro, una semi-circonferenza. Conduciamo in E la tangente $EG = k$; conduciamo GR parallela ad EF e abbassiamo, dai punti H nei

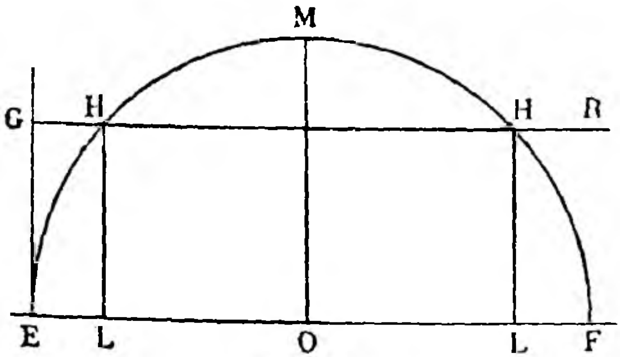


Fig. 132.

quali essa sega la semi-circonferenza, la perpendicolare sul diametro EF. Le radici cercate saranno EL ed LF.

Affinchè le radici siano reali occorre che la GR seghi la semi-circonferenza, cioè:

$$k \leqq OM \qquad \text{ossia} \qquad k \leqq \frac{p}{2}$$

come è d'altronde noto analiticamente.

4. — *Metodo di Steiner*. — Ad una circonferenza (fig. 133) di raggio $FT = 1$ si conducano due tangenti opposte in O e T. Essendo:

$$x^2 - px + q = 0$$

l'equazione proposta, si portino (tenendo conto del segno):

$$TM = \frac{4}{p} \qquad\qquad ON = \frac{q}{p}$$

La MN sega il circolo in P e Q che, proiettati da T forniscono in OR ed OS i valori delle radici dell'equazione data, col relativo segno.

La fig. 129 si riferisce al caso dell'equazione:

$$x^2 - 3x + 2 \qquad \text{quindi} \qquad \frac{4}{p} = \frac{4}{3} \qquad \frac{q}{p} = \frac{2}{3}$$

$$x_1 = OS = 2 \qquad x_2 = OR = 1$$

Quando q è negativo le due radici sono reali e di segno opposto; infatti TM ed ON risultando in questo caso di segno opposto, la MN è necessariamente segante del circolo, ecc.

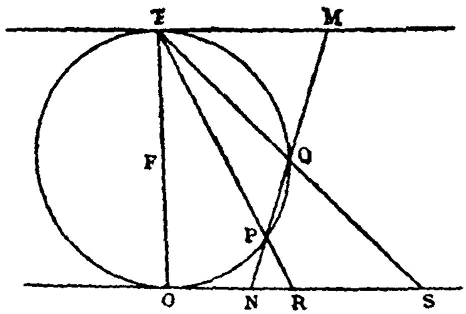


Fig. 133.

Se q è positivo, TM e ON hanno segni uguali e in tal caso la MN può riuscire *segante* del circolo (due radici reali, di ugual segno); *tangente* $\left(\text{una sola radice } \frac{p}{2}\right)$; *esterna* (nessuna radice reale) (1).

Equazioni di 2° grado.

Soluzione col regolo calcolatore. — La somma delle radici dell'equazione generale di 2° grado:

$$x^2 \pm cx \pm d = O$$

è uguale a $-c$, e il loro prodotto è uguale a d. Da ciò questa regola:

(1) Vedasi la dimostrazione geometrica di A. PADOA nel Bollettino di Matematica. Anno III (1904) n. 1, e quella analitica nelle « *Questioni riguardanti la Geometria Elementare* » di F. ENRIQUES, pag. 406.

1° *Se il terzo termine dell'equazione è positivo:*

Mettere il corsoio sulla divisione d di R (essendo R ed r le divisioni superiori del regolo e della parte scorrevole); poi spingere r sino a che la somma di y, numero letto su R di contro alla divisione 1 di r, e di z, numero letto su r di fronte al corsoio, sia uguale a c. Le radici dell'equazione sono allora y e z; tutte e due sono di egual segno, opposto al segno del secondo termine. Così nella posizione della figura, il regolo dà le soluzioni di:

$$x^2 + 9x + 20 = 0 \qquad \text{(radici: } -4 \text{ e } -5)$$

$$x^2 - 9x + 20 = 0 \qquad \text{(radici: } +4 \text{ e } +5)$$

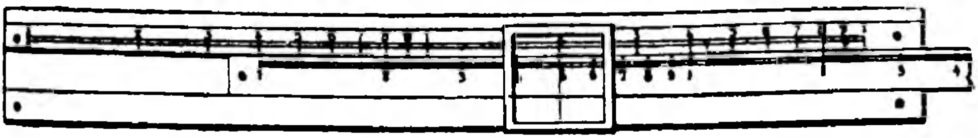


Fig. 134.

2° *Se il terzo termine è negativo:*

Mettere il corsoio sulla divisione d di R; poi spingere r fino a che la differenza tra y, numero letto su R, di contro alla divisione 1 di r, e z, numero letto su r di contro al corsoio, sia uguale a c. Le radici dell'equazione sono y e z. Esse sono di segni contrarii e la maggiore è di segno contrario a quello del secondo termine dell'equazione.

La posizione della figura corrisponde alle soluzioni di:

$$x^2 + x - 20 = 0 \qquad \text{(radici: } +4 \text{ e } -5)$$

$$x^2 - x - 20 = 0 \qquad \text{(radici: } -4 \text{ e } +5)$$

Equazione di terzo grado. — Abbiasi l'equazione:

$$x^3 + px + q = 0$$

1. — Le radici reali dell'equazione sono le ascisse dei punti reali comuni alla parabola cubica $y = x^3$ e alla retta:

$$y + px + q = 0$$

Prendiamo, per esempio, l'equazione:

$$x^3 - \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} = 0 \quad \text{avremo} \quad x^3 = y \tag{1}$$

$$y - \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} = 0 \tag{2}$$

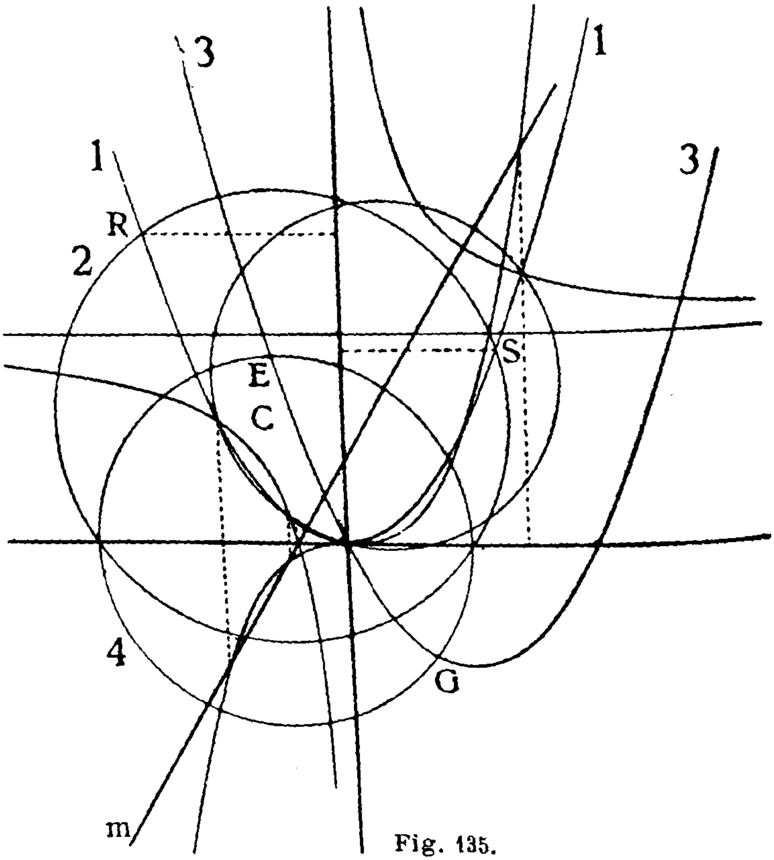


Fig. 135.

La retta (2), ossia m, sega la cubica (1) in tre punti, epperò l'equazione proposta ammette tre radici reali.

2. — Possiamo cercare i punti comuni alla parabola di secondo grado $y = x^2$ e all'iperbola equilatera:

$$x\,y + p\,x + q = 0$$

3. — Cominciamo dal considerare l'equazione:

$$x^4 + p\,x^2 + q\,x = 0$$

Ponendo $y = x^2$ si ottiene:

$$y^2 + p\,y + q\,x = 0$$

Queste equazioni sono quelle di due parabole delle quali si dovrebbero trovare i punti d'intersezione. Ma essendo i loro assi rettangolari, i loro punti comuni sono sul circolo che ha per equazione:

$$x^2 + y^2 + (p - 1)\,y + q\,x = 0$$

il che riduce il problema a trovare le intersezioni d'un circolo con una parabola, escludendo l'origine.

4. — Sia tracciata su un foglio di carta trasparente quadrellata la parabola $y^2 = x$ (ossia $o\,x$, $o\,y$); sopra un secondo foglio siasi disegnata una serie d'iperboli equilatere aventi gli stessi assintoti $o'\,x'$, $o'\,y'$ e corrispondenti a valori sufficientemente approssimati dalla potenza (equazione $x'\,y' = p$; p variabile).

Se si trasporta il primo foglio sul secondo in modo che gli assi $o'\,x'$, $o'\,y'$ siano paralleli ad $o\,x$, $o\,y$ e passino pel punto $o''\,(\alpha, \beta)$ del primo foglio, l'equazione di una delle iperboli, riferita agli assi $o\,x$, $o\,y$ sarà:

$$(x - \alpha)\,(y - \beta) = p$$

e le ordinate dei punti nei quali questa curva incontra la parabola sono radici dell'equazione:

$$(y^2 - \alpha)\,(y - \beta) = p$$

ossia:

$$y^3 - \beta\,y^2 - \alpha\,y + \alpha\,\beta - p = 0$$

Questa può essere resa identica ad una data;

$$y^3 + Ay^2 + By + C = 0$$

facendo:

$$\beta = -A \qquad \alpha = -B$$

$$p = \alpha\,\beta - C$$

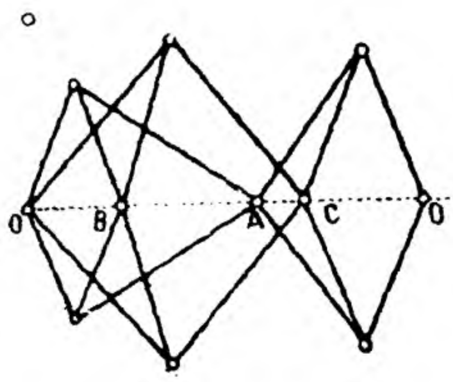


Fig. 136.

5. — Il sistema articolato rappresentato nella fig. 133, dovuto a Sylvester, fornisce le relazioni:

$$A\,B = \frac{a^2}{O\,A} \qquad B\,C = \frac{a^2}{O\,B} \qquad A\,D = \frac{b^2}{A\,C}$$

dalle quali si deduce:

$$b^2 \cdot \overline{OA}^2 + a^2\,(a^2 - b^2)\,\overline{O\,A} = a^4 \cdot \overline{O\,D}$$

Equazione di quarto grado.

1. — Sia l'equazione:

$$x^4 + p\,x^2 + q\,x + r = 0$$

Poniamo $y = x^2$, l'equazione diventa:

$$y^2 + p\,y + q\,x + r = 0$$

che si può mettere sotto questa forma:

$$x^2 + y^2 + (p - 1)\,y + q\,x + r = 0$$

che è l'equazione d'un circolo, del quale basterà trovare le intersezioni con la parabola di secondo grado $y = x^2$.

Esempio. Abbiasi l'equazione:

$$x^4 - x^2 + x - 2 = 0$$

Se ne otterranno le radici reali come accisse delle intersezioni R, S della parabola (fig. 135):

$$y = x^2 \tag{1}$$

col circolo:

$$x^2 + y^2 - 2\,y + x - 2 = 0 \tag{2}$$

2. — Nel caso generale, sia l'equazione:

$$x^4 + n\,x^3 + p\,x^2 + q\,x + r = 0$$

Ponendo $x^2 = y + a\,x$ avremo:

$$y^2 + (2\,a + n)\,x\,y + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot = 0$$

Si è così condotti a prendere $a = -\frac{n}{2}$, per cui si debbono trovare i punti comuni alla parabola:

$$x^2 = y - \frac{n}{2} x$$

e al circolo:

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{n^2}{8} - \frac{pn}{2} + \frac{n}{2} + q\right) x + \left(p - \frac{n^2}{4} - 1\right) y + r = 0$$

Esempio. Sia l'equazione data:

$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 + x - 2 = 0$$

Le radici reali saranno le ascisse dei punti d'intersezione E, G (fig. 132) della parabola:

$$x^2 = y + 2x \tag{3}$$

col circolo:

$$x^2 + y^2 + x - 2 = 0 \tag{4}$$

Equazioni numeriche ad una incognita, di qualsiasi grado.

Sia:

$$a x^m + b x^{m-1} + c x^{m-2} + \cdots\cdots + g x + k = 0$$

un'equazione di grado m nella quale le lettere a, b, c .... rappresentano coefficienti numerici (fig. 137).

Da un punto O preso ad arbitrio, prendiamo, verso sinistra ad esempio, una lunghezza $OA = a$ che servirà come unità. Perpendicolarmente ad OA portiamo da A in B una lunghezza $AB = b$ andando verso sinistra se b è dello stesso segno di a, o verso destra se è di segno contrario. Perpendicolarmente ad AB portiamo da B in C una lunghezza $BC = c$ andando verso sinistra se c è dello stesso segno di b e verso destra se è di segno contrario. Facciamo la stessa costruzione per tutti i coefficienti d, e, f ..... g, k e arriveremo infine ad un ultimo punto K dopo aver tracciato un contorno poligonale rettangolare $OABC$ .... GK i cui lati sono in numero $m + 1$, uguale a quello dei termini dell'equazione proposta.

Ciò fatto, se si può passare dal punto O al punto K seguendo un altro contorno poligonale rettangolare $OA'B'C'$ ..... G'

di m lati solamente, i cui vertici consecutivi poggino rispettivamente in A', B', C' . . . . . sui lati AB, BC, CD . . . . . del contorno primitivo, il numero che esprime la lunghezza AA' *è una radice dell'equazione.*

Quante volte differenti si potrà andare così da O in K, passando per dei punti A', A'', A''' . . . . . situati sul lato AB, altrettante volte si avranno delle radici reali dell'equazione, rappresentate dalle lunghezze AA', AA'', AA''' . . . . espresse in numeri.

Quanto ai segni di tali radici, esse saranno positive se i punti A', A'', A''' . . . . . cadono a destra di OA (andando da O verso A), e saranno negativi se tali punti si trovano a sinistra di OA.

Esempio. Sia:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

l'equazione da risolvere. Si farà nel modo indicato, la costruzione del contorno poligonale rettangolare di quattro lati $OABCK$. Si può allora andare da O in K seguendo i tre per-

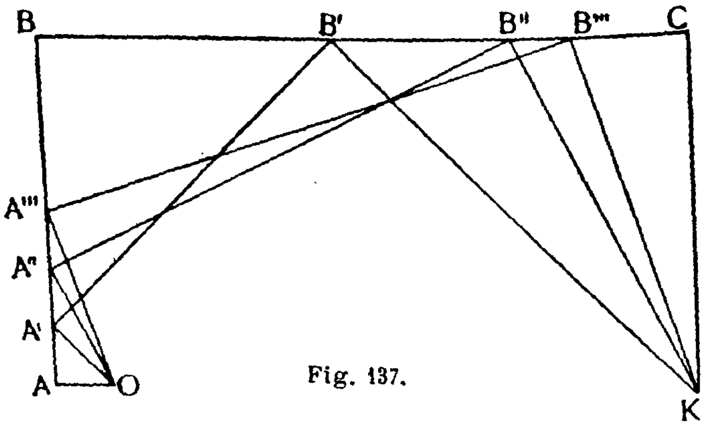


Fig. 137.

corsi rettangolari, di tre lati ciascuno, $OA'B'K$, $OA''B''K$, $OA'''B'''K$. I tre segmenti rettilinei AA', AA'', AA''' rappresentano le tre radici dell'equazione e siccome esse sono respettivamente uguali ad OA, a $2\,OA$, a $3\,OA$, e situate a destra di OA, saranno:

$$+1 \qquad +2 \qquad +3$$

Uno strumento speciale venne inventato dal Capitano austriaco Lill per supplire al tracciamento grafico della figura, ma non è qui luogo da descriverlo.

Metodi fisici per la soluzione dei sistemi di equazioni algebriche.

Metodo idrostatico di A. Demanet. — Questo metodo è adatto alla soluzione delle equazioni di terzo grado, della forma:

$$x^3 \pm x = c$$

nella quale c indica una costante positiva data. Esso è basato sull'uso di vasi comunicanti di forma convenientemente sta-

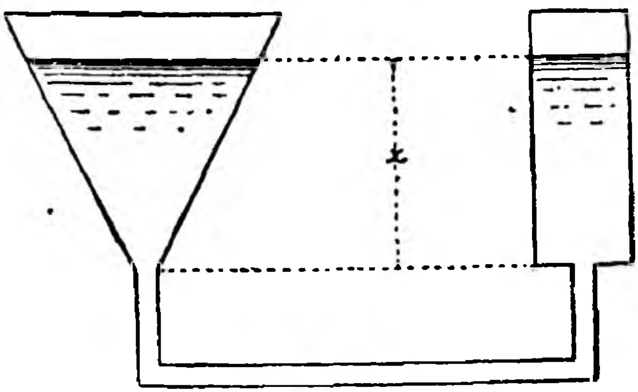


Fig. 138.

bilita. Se s'introduce un volume determinato di liquido in uno di tali vasi comunicanti, l'altezza comune del liquido nei due vasi fornisce il valore della radice cercata.

Per risolvere l'equazione:

$$x^3 + x = c$$

si prendono come vasi comunicanti un cono di rivoluzione (ad asse verticale, col vertice in basso) il cui raggio di base r e l'altezza a siano nel rapporto:

$$\frac{r}{a} = \sqrt{\frac{3}{\pi}}$$

e un cilindro di base uguale ad un centimetro quadrato. Se si versano c centimetri cubici di liquido in uno dei due vasi comunicanti il liquido s' innalza ad una medesima altezza h in ciascuno dei due vasi; il volume di liquido contenuto nel vaso conico è allora uguale ad h^3, quello contenuto nel vaso cilindrico è uguale ad h; si ha dunque:

$$h^3 + h = c$$

L'altezza h, che si può misurare, fornirà dunque una radice $x = h$ dell'equazione:

$$x^3 + x = c$$

Per risolvere l'equazione:

$$x^3 - x = c$$

s'introduce nello stesso vaso conico isolato un solido cilindrico di un centimetro quadrato di base, in modo che il volume versato c sia la differenza del volume h^3 del liquido che conterrebbe il cono se il pezzo cilindrico fosse isolato, e del volume h del cilindro. L'altezza osservata h del liquido versato fornisce dunque una radice dell'equazione:

$$x^3 - x = c$$

Questo procedimento può estendersi facilmente alle equazioni trinomie qualunque, poichè esse possono mettersi sotto la forma:

$$x^m \pm x^n = c$$

D'altronde, mediante la sostituzione:

$$y = x\sqrt{p}$$

si può ridurre qualsiasi equazione ridotta del terzo grado:

$$y^3 \pm p\,y = q$$

(nella quale p e q sono numeri positivi qualunque, dati) alla forma:

$$x^3 \pm x = c$$

Il metodo Demanet si complica però assai per le equazioni a più di un parametro.

Bilancia idrostatica di G. Meslin. — Con questo apparecchio si può risolvere qualsiasi equazione della forma:

$$p\,x^m + q\,x^n + \cdots\cdots = A$$

qualunque sia il numero finito dei termini del suo primo membro.

La bilancia di Meslin è costituita da un giogo al quale sono appesi, mediante sbarre rigide ad esso articolate, dei corpi solidi (M), (N) . . . . . ad essi verticali, dei quali la forma e le dimensioni sono tali, che i volumi immersi, quando li si immerge di x unità di lunghezza in un liquido, siano proporzionali ad x^m, x^n . . . . Si fissano questi solidi (M), (N) . . . . a distanze dell'asse di rotazione rispettivamente proporzionali ai valori assoluti (p), (q) . . . . . dei coefficienti p, q . . . . . dell'equazione data, a destra o a sinistra di tale asse di rota-

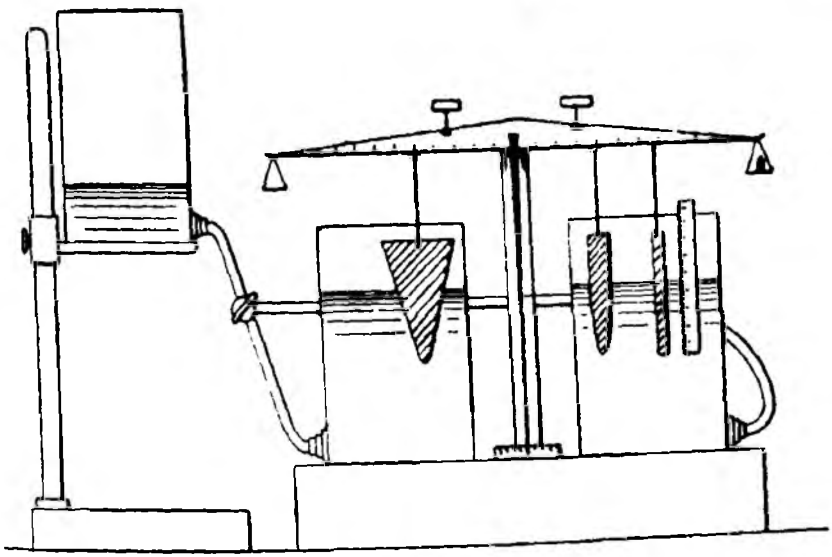


Fig. 139.

zione secondo il segno di tali coefficienti, e in modo che i punti di sospensione siano in uno stesso piano orizzontale quando il giogo è in equilibrio.

Equilibrata la bilancia, si sospende alla distanza 1 dall'asse di rotazione del giogo, un peso uguale ad (A), a destra o a sinistra di tale asse di rotazione secondo il segno di A. L'equilibrio è rotto, ma lo si ristabilisce versando del liquido entro a dei vasi comunicanti posti al disotto dei solidi (M), (N) . . . . Se h è l'altezza immersa quando l'equilibrio è ristabilito, le spinte esercitate sui solidi (M), (N) . . . . e trasmesse al giogo, sono rappresentate da h^m, h^n . . . . ; i loro momenti rispetto all'asse di rotazione del giogo, sono dunque rispettivamente uguali a $p\,h^m$, $q\,h^n$ . . . . Poichè si ha equilibrio, la somma algebrica di questi momenti è uguale al momento A del peso A rispetto allo stesso asse; si ha dunque:

$$p\,h^m + q\,h^n + \cdots\cdots = A$$

dimodochè l'altezza immersa h, che è facile misurare, fornisce una radice $x = h$ dell'equazione considerata.

Se, dopo avere così trovata una soluzione dell'equazione, si versa una nuova quantità di liquido nei vasi posti al disotto dei solidi (M), (N) $\cdots$ l'equilibrio è dapprima distrutto, ma, se si continua a versare fino a che esso sia nuovamente ristabilito, l'altezza h' immersa fornisce una seconda radice dell'equazione, e così di seguito.

Perchè il volume immerso del solido (M) sia proporzionale ad x^m quando s'immerge (M) di x, basta prendere per (M) un solido di rivoluzione la cui curva meridiana abbia per equazione:

$$y^2 = c\,x^{m-1}$$

nella quale il valore di c dipende dalle unità di massa e di lunghezza scelte.

Al termine x dell'equazione considerata corrisponde così un cilindro, al termine x^2 un paraboloide, al termine x^3 un cono, e così via.

Per risolvere un'equazione ridotta qualunque del terzo grado non occorrono dunque che un cilindro e un cono.

Il paraboloide che corrisponde al termine x^2 può essere sostituito da un diedro a facce piane la cui costola sia in basso ed orizzontale. Il cilindro può essere sostituito da un prisma, e il cono da una piramide; di guisa che per risolvere un'equazione di terzo grado, ridotta o no, si può far uso solamente di solidi a facce piane.

Altri procedimenti analoghi che non descriveremo per brevità sono dovuti ad A. Emch (1) per estrarre le radici, d'ordine qualsiasi, di numeri dati; a W. Veltmann (2) per la soluzione d'un sistema di n equazioni lineari fra n incognite, ecc.

Metodo elettrico di F. Lucas. — Le radici reali od immaginarie di un'equazione algebrica di grado qualsiasi, a coefficienti reali, date numericamente, possono essere ottenute con una sola operazione grafica e senza calcoli con un procedi-

(1) The American math. Monthly 8 (1901) pag. 58.
(2) W. von Dyck. Katalog. pag. 155.

mento dedotto dalla teoria dell'elettricità ed esposto da Felix Lucas in una sua memoria all'Accademia delle Scienze di Parigi nel 1888 (1).

Sia $F(z) = 0$ l'equazione data, di grado n. Ad arbitrio, fissiamo $n + 1$ numeri reali disuguali:

$$\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3 \cdots\cdots \alpha_{n+1}$$

e poniamo:

$$f(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots\cdots (z - \alpha_{n+1})$$

Scomponendo la funzione razionale $\frac{F(z)}{f(z)}$ in frazioni semplici si può metterla sotto la forma:

$$\frac{F(z)}{f(z)} = \frac{\lambda_1}{z - \alpha_1} + \frac{\lambda_2}{z - \alpha_2} + \cdots\cdots \frac{\lambda_{n+1}}{z - \alpha_{n+1}}$$

nella quale λ_i sono tutti reali e determinati.

Seguiamo nel piano (P) delle variabili complesse z, assimilato ad una lastra conduttrice circolare di raggio sufficientemente grande, i punti:

$$\varphi_1 , \varphi_2 , \cdots\cdots \varphi_{n+1}$$

dell'asse reale avente per ascisse:

$$\alpha_1 , \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_{n+1}$$

Se si carica ciascuno di tali punti φ_i di una quantità di elettricità proporzionale al numero λ_i di medesimo indice, i punti nodali delle linee equipotenziali tracciate nel piano (P) saranno i *punti-radici* dell'equazione considerata $F(z) = 0$.

Beninteso che *caricare un punto d'una quantità negativa di elettricità*, significa, *scaricare questo punto del valore assoluto di detta quantità di elettricità*.

Per tracciare le linee equipotenziali sulla lastra conduttrice (P) basta rendere tangibile, con un procedimento qualsiasi, lo stato elettrico di tale lastra. Si può, per esempio, determinare tali linee col galvanometro applicando il metodo di Kirchhoff (2) o disegnarle elettricamente col procedimento Guébhard (3).

(1) V. Comptes rendus. Volume 107 (1888) pag. 645.
(2) V. Annalen Phys. und Chemie. Volume 64 (annata 1845) pag. 497.
(3) Journal de Physque théor. et appliquée. Volume 1 (annata 1882) pag. 205.

Lo stesso Lucas fece notare (1) essere più comodo prendere per $f(z)$ una funzione razionale intera di grado $n+2$ anzichè di grado $n+1$. Il metodo elettromagnetico che corrisponde a tale scelta riesce particolarmente semplice. Su di una lastra costituita da un foglio di carta ben teso orizzontalmente, o da una sottile lamina di vetro, si crea un campo magnetico e si spande sulla lastra una fine limatura di ferro. Le linee di forza del campo magnetico si disegnano allora da per se stesse per mezzo della limatura di ferro. I *punti-radice* cercati sono i punti neutri del campo magnetico, cioè quei punti sui quali la forza magnetica è *nulla*.

Un apparecchio elettrico immaginato da L. Kann serve alla valutazione delle sole radici reali delle equazioni.

Risoluzione elettrica delle equazioni coll'uso del ponte di Wheatstone.

Nella seduta dell'11 giugno 1909 della Società Fisica di Londra Russell e Wright presentarono un *dispositivo elettrico per valutare le formole e risolvere le equazioni.*

Il dispositivo speciale del ponte di Wheatstone rappresentato nella fig. 140 secondo l'*Electrical World*, dovuto al Wright per-

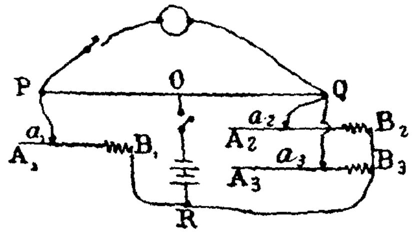


Fig. 140.

mette di determinare, con una manipolazione semplicissima tutte le radici reali d'un'equazione algebrica di grado qualunque, purchè uno dei suoi termini sia affetto dal segno negativo, il che si può sempre ottenere mediante opportuna trasformazione.

(1) C. R. de l'Academ. des Sciences de Paris, 1888. Volume 107 pag. 1072 e 1800 volume 111 pag. 965.

Questo ponte di Wheatstone si compone di un filo resistente diviso PQ, in mezzo al quale, in O, fa capo il filo proveniente da uno dei poli d'una pila. Alle estremità di questo filo PQ sono connessi, da un lato i fili d'un galvanometro G, e dall'altro, dei circuiti derivati A_1 A_2 A_3, ecc. contenenti delle resistenze B_1 B_2 B_3, ecc. e il cui numero è uguale a quello dei termini dell'equazione. Ciascuno di questi circuiti rappresenta uno di questi termini; quelli del lato A_2 A_3, ecc., i termini positivi, quelli del lato A_1, i termini negativi. Ora, si sa che se, in questo dispositivo, la corrente che attraversa il galvanometro diventa nulla, le resistenze di questi varii circuiti sono tali che la somma delle conduttanze dei circuiti dei due fasci paralleli e opposti è uguale, e che attribuendole il segno + o, secondo che essa rappresenta dei termini positivi o negativi, la somma di tutte queste conduttanze è nulla. Se dunque per-

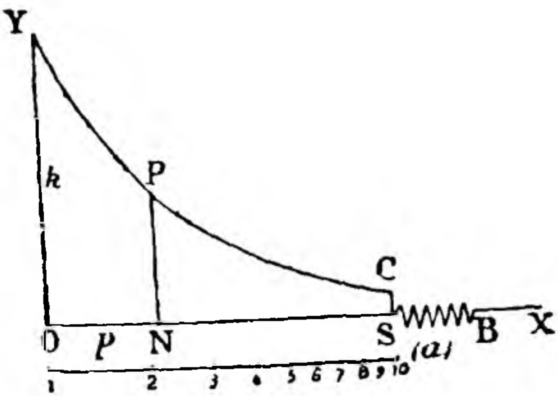


Fig. 140*bis*.

veniamo a rendere queste conduttanze uguali ciascuna ad uno dei termini dell'equazione nel momento in cui la corrente che traversa G sarà nulla, avremo ugualmente annullata la somma algebrica dei termini di questa equazione.

Per meglio far comprendere come l'inventore del dispositivo è pervenuto a rendere ciascuna di queste conduttanze uguale ad uno dei termini dell'equazione, supponiamo che si tratti di trovare le radici reali di una equazione della forma:

$$x^3 + a_2 x^2 - a_1 x + a_0 = O$$

e che si voglia dare alla conduttanza di uno dei circuiti un valore uguale ad $a_2 x^2$.

A tal uopo, intercaleremo nel circuito una resistenza B, che sarà composta d'una prima resistenza costante SB (fig. 140 *bis*) e d'una resistenza regolabile OS. Quest'ultima è costituita da un filo resistente avvolto su d'un garbo $ONSCPY$ in materia isolante, di forma tale che la conduttanza del filo compreso fra un punto N qualunque dello spigolo inferiore rettilineo di questo garbo e il punto B sia espresso dalla cifra iscritta di fronte a tal punto N sulla scala logaritmica (a) di questo garbo. La conduttanza di SB sarà dunque uguale a 10, quella di OB uguale ad 1 e quella del filo compreso fra un punto N intermedio qualunque e B sarà tale che il suo logaritmo sarà rappresentato in vera grandezza dalla lunghezza ON segnata dalla lettera p. I fili avvolti sul garbo sono messi a scudo lungo la costola OS e un corsoio mobile lungo questa serve a far variare a volontà la resistenza fra N e B.

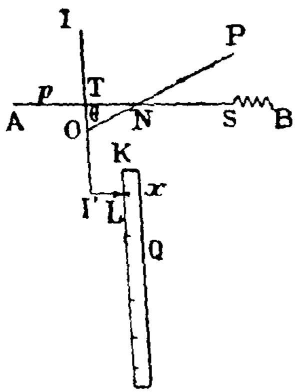


Fig. 141.

La resistenza in questione è montata sul circuito derivato del ponte di Wheatstone nel modo indicato nella fig. 141. Si rende il corsoio mobile N, della costola AS della resistenza, solidale con un regolo OP lungo il quale esso può scorrere del pari, che si fa muovere verticalmente e parallelamente a sè stesso lungo II', di lunghezze misurate, sulla scala Q, da un indice L e che indicheremo con x. La sbarretta OP fa con la verticale II' un angolo θ tale che, per il termine sul quale x è al 2° grado, si abbia: $\operatorname{tg} \theta = 2$, vale a dire che la sua tangente sia sempre uguale all'esponente di x, nel termine rappresentato.

In queste condizioni, per qualsiasi spostamento verticale della sbarretta OP uguale ad x, la lunghezza di cui si sposta il corsoio lungo AS sarà uguale ad $x \operatorname{tg} \theta$, o, nel caso attuale, a $2x$. Se, inoltre, disponiamo la resistenza AS di tale guisa che l'origine T del movimento di N sia ad una distanza p da A, la lunghezza AN sarà uguale a $p + 2x$, e siccome tale lunghezza è il logaritmo della conduttanza del circuito contenente la resistenza AB fra i punti N e B, questa conduttanza sarà essa stessa uguale a $p\,x^2$. Basterà dunque, nel ponte di Wheatstone, di fare $p = a_2$ perchè questa conduttanza rappresenti, in vera grandezza, il termine $a_2 x^2$.

Per ottenere un circuito simile a quello della fig. 140, la cui conduttanza rappresenta dei termini della forma $a_4 x^4$, $a_3 x^3$, $a_1 x^1$, ecc. basterebbe far fare alla sbarretta OP un angolo con la verticale, la cui tangente fosse uguale a 4, 3, 1, ecc. e spostare la resistenza per modo che la lunghezza AT sia uguale rispettivamente ad a_4, a_3, a_1, ecc.

Per trovare le radici reali dell'equazione di terzo grado presa come esempio, il ponte di Wheatstone è disposto come mostra la fig. 141 *bis*. I quattro circuiti posti l'uno al disopra dell' altro sono tutti simili, coll'approssimazione dell'angolo θ, al circuito della fig. 141. Nel circuito AB, che corrisponde al termine costante, questo angolo θ è nullo; negli altri, questi angoli θ sono tali che le loro tangenti sono rispettivamente uguali ad 1, nel circuito $A_1 B_1$, a 2 nel circuito $A_2 B_2$, e a 3 nel circuito $A_3 B_3$. Inoltre, le resistenze di questi quattro circuiti sono spostate verso la sinistra delle lunghezze espresse da a_0, a_1, a_2, a_3 sulle scale logaritmiche di queste resistenze. Infine, i tre circuiti AB, $A_2 B_2$ e $A_3 B_3$ sono connessi al punto P del filo $P_1 Q_1$, mentre il filo del circuito $A_1 B_1$ è collegato al punto Q di questo stesso filo, situato ad una distanza QO da O uguale a PO.

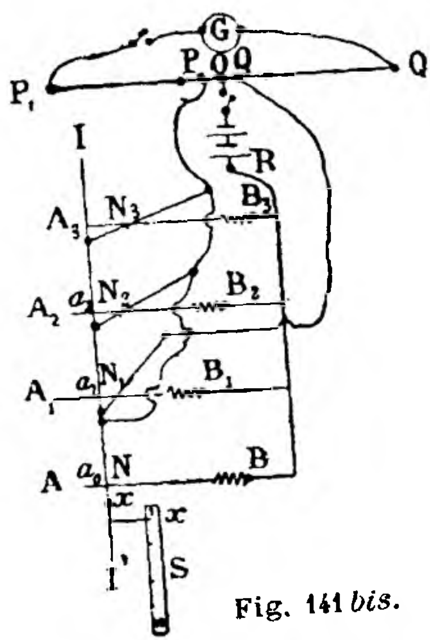


Fig. 141 *bis*.

Per trovare le radici dell'equazione data, basta spostare verticalmente la sbarretta II′ sulla quale sono fissate tutte le sbarrette oblique, fino a che la corrente che attraversa il galvanometro G sia nulla. Ogni qualvolta questa corrente si annulla, si nota il valore di x indicato dalla scala S; è una delle radici cercate.

Pare che uno sperimentatore un po' esercitato pervenga facilmente a determinare queste radici coll'approssimazione del 5‰ più che sufficiente in pratica.

QUADRATI
POLIGONI E POLIEDRI MAGICI

QUADRATI MAGICI

Abbiasi un quadrato suddiviso in un certo numero n^2 di quadrelli, come una scacchiera. Collocando in ciascuna casella un numero, senza ripetizioni, in modo da avere la medesima somma sia addizionando per colonna, dall'alto in basso, sia per *riga* cioè da sinistra a destra o viceversa, sia per *diagonale*, si avrà un quadrato detto *magico* (1).

L'origine dei quadrati magici è antichissima. Quando si attribuivano a certi numeri particolari, delle virtù cabalistiche, è naturale che se ne siano attribuite di grandissime, tali da chiamarli *magici*, a certi quadrati nei quali la disposizione dei numeri offriva caratteristiche singolari. Troviamo quadrati magici in India d'onde vennero portati in Europa probabilmente da Astrologi.

Cornelio Agrippa (1486-1535) costruì quelli di ordine 3, 4 . . . . fino al 9, i quali secondo lui rappresentavano simbolicamente i sette *pianeti* d'allora; Saturno Giove, Marte, il Sole, Venere, Mercurio e la Luna. Egli deduceva l'imperfezione dei quattro *elementi* (aria, terra, fuoco e acqua) dal fatto che non è possibile costruire il quadrato magico di 4 caselle, cioè d'ordine 2. E tale quadrato fu da altri adottato come simbolo del peccato originale!

Un buon preservativo dalla peste era un quadrato magico inciso su di una lastrina d'argento. Amuleti di tal genere sono ancora in uso in alcune regioni d'Oriente. Il quadrato magico

---

(1) Per estesi particolari sulla teoria dei quadrati magici si possono consultare: G. Arnoux «Les espaces hypermagiques» e A. Margossian «De l'ordonnance des nombres dans les carrés magiques impairs» Parigi 1908, Editore Hermann; da quest'ultimo volume ho ricavato gran parte del capitolo sui quadrati magici dispari.

seguente si trova su di un quadro di Alberto Dürer rappresentante la Melanconia (1500).

Per lo più i numeri sono scelti in progressione aritmetica, ma ciò non è *necessario*, come vedremo. Si potrebbero anche usare n progressioni aritmetiche differenti. Per semplicità useremo in principio solamente la progressione costituita dalla serie dei numeri interi naturali a cominciare dall'unità.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Fig. 142.

La somma costante per colonne, righe o diagonali è detta la *costante* del quadrato.

La somma dei primi n^2 numeri naturali è $\frac{n^2+1}{2} n^2$. La costante di un quadrato sarà $\frac{n^2+1}{2} n$ poichè vi sono n righe o colonne. Dicesi *base*, *modulo* o *radice* del quadrato il numero n delle caselle del suo lato. Cominceremo coll'occuparci dei quadrati il cui modulo dispari è un numero primo, maggiore di due, e vedremo poi seguendo quali norme si possa passare da tali quadrati a quelli i cui moduli non sono numeri primi.

Quadrati magici i cui moduli sono numeri primi.

Osservando il gruppo fondamentale, ossia la serie dei primi 25 numeri naturali disposti di seguito per righe di 5, notiamo subito che la *costante* 65 è uguale al prodotto del modulo pel numero centrale 13, e che le somme per diagonali e nella riga e colonna *mediane* danno appunto la costante.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Fig. 143.

Si possono dividere i quadrati magici in due grandi classi; una comprende quelli nei quali i numeri hanno una disposizione ordinata, ben determinata, l'altra comprende quelli nei quali i numeri non seguono in apparenza un ordine determinato. Cominceremo coll'occuparci dei primi, dai quali d'altronde molti dei secondi derivano. Si possono poi suddividere tali quadrati in due tipi dei quali ci occuperemo partitamente.

Tipo di quadrati magici a disposizione obliqua.

Per costruire un quadrato magico di modulo 5, per esempio, cominciamo coll'adottare la notazione usata dagli scacchisti, indichiamo cioè con *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, le caselle della prima, seconda, terza . . . . . colonna, e con 1, 2, 3, 4, 5 le caselle della prima, seconda, terza . . . . . riga. Cosicchè *a* 4 indicherà la

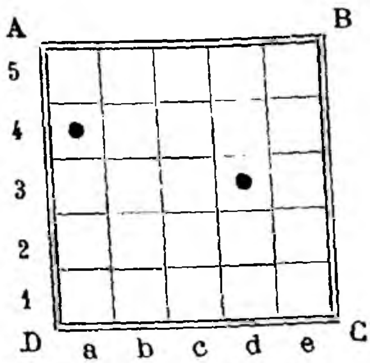


Fig. 144.

quarta casella della prima colonna, *d* 3 la *terza casella* della quarta colonna, che sono segnate in figura con un punto. Chiameremo poi diagonale *ascendente* la *D B* e diagonale *discendente* la *A C*.

Immaginiamo ora, attorno alla scacchiera principale, tracciate altre quattro scacchiere uguali *A*, *B*, *C*, *D*, disposte come nella figura 145. Collochiamo poi il primo gruppo (1 a 5) della progressione, partendo da un punto qualunque (per ora; vedremo fra poco quali posizioni siano da eccettuarsi); siansi in tal modo occupate le caselle che diremo regolari *a* 3, *b* 4, *c* 5, coi numeri 1, 2, 3, e le due caselle *d* 1, *e* 2 della scacchiera *A* col 4 e il 5. Riporteremo il 4 e il 5 nelle medesime posizioni, ma nella scacchiera *principale*. Al disotto del 5 collocheremo il 6 e successivamente, sempre seguendo la diagonale ascendente il 7, l'8, il 9 e il 10. Questi quattro ultimi occupano quattro caselle della scacchiera *C*, dovremo quindi riportarli nelle corrispondenti caselle *a* 2, *b* 3, *c* 4, *d* 5 della scacchiera principale. Sotto al 10 collocheremo l'11 e sulla diagonale relativa 12, 13, 14 e 15, riportando il 13, 14 e 15 dalla scacchiera *B* alla scacchiera principale, nelle caselle corrispondenti; e così via sino al 25. Il quadrato ottenuto sarà magico, a condizione però che

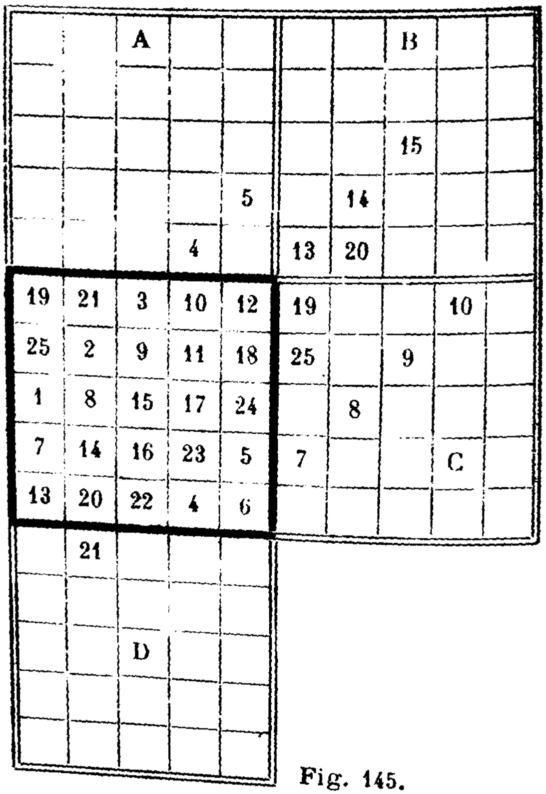


Fig. 145.

la diagonale ascendente risulti occupata dal gruppo *mediano* (11, 12, 13, 14, 15) della progressione aritmetica usata, il che dipende naturalmente dalla casella scelta come punto di partenza per collocarvi l'1. In altri termini, occorre che l'11 cada su una casella della diagonale ascendente, ossia che il 10 cada su una casella della diagonale superiore a quella ascendente, ecc. Per ottenere ciò basterà collocare il primo numero in una parallela alla diagonale ascendente, il cui posto a partire da quest'ultima, sia precisamente quello della *linea magica* nel *gruppo fondamentale.*

Alle linee e colonne di questo *gruppo fondamentale* si può far subire qualsiasi permutazione; tutte le disposizioni così ottenute potranno venir considerate come altrettanti *gruppi fondamentali* sui quali si potrà operare come già si è veduto per il gruppo fondamentale *naturale*. Si avranno sempre dei quadrati magici, purchè sia soddisfatta la condizione di collocare sulla diagonale ascendente la *linea magica* o *mediana* del gruppo fondamentale considerato.

Esempii. In seguito a diverse permutazioni siasi trasformato il gruppo fondamentale naturale in quest'altro.

23	25	21	22	24
3	5	1	2	4
13	15	11	12	14
8	10	6	7	9
18	20	16	17	19

Fig. 146.

6	19	25	2	13
17	23	1	14	10
24	5	12	8	16
3	11	9	20	22
15	8	18	21	4

Fig. 147.

Cominciamo col collocare su di una diagonale parallela, alla diagonale ascendente, la seconda riga 3, 5, 1, 2, 4; poi al disotto del 4 il 13 e successivamente 15, 11, 12, 14, della riga *magica*, sempre secondo la regola sopra stabilita; sotto al 14 collocheremo poi l'8 della riga successiva, ecc.

Si potranno così ottenere un grandissimo numero di quadrati magici differenti, nei quali si potrà far occupare ad un dato numero, non appartenente alla *riga magica*, una casella determinata, purchè non appartenente alla diagonale ascendente. Tali caselle sono in numero di $n^2 - n$ ossia $n\,(n-1)$.

Finora si è detto di collocare il primo numero della seconda riga del gruppo fondamentale, immediatamente al disotto dell'ultimo numero della riga precedente; ma si può invece collocarlo 2, 3, ecc., fino a $(n-2)$ caselle più in basso e procedere poi come al solito, pur ottenendo sempre dei quadrati magici, come nel seguente esempio, nel quale lo spostamento è appunto di $n-2=3$ caselle. In questo caso il quadrato ottenuto presenta la particolarità di avere la diagonale discendente occupata dai numeri della *colonna mediana* del gruppo fondamentale. Basterà scegliere la casella di partenza in modo tale che il numero centrale del gruppo fondamentale (13 nel nostro caso) corrisponda al centro del quadrato.

23	6	19	2	15
10	18	1	14	22
17	5	13	21	9
4	12	25	8	16
11	24	7	20	3

Fig. 148.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Fig. 149.

Il quadro di modulo 2 è *unico* poichè è un quadrato *limite*, essendo nel suo caso $(n-2)=1$.

Diamo alcuni esempii di quadrati magici del tipo finora studiato, cioè a disposizione obliqua, di modulo 7 e di diverso grado (figg. 150, 151, 152).

6	32	9	42	19	45	22
31	8	41	18	44	28	5
14	40	17	43	27	4	30
39	16	49	26	3	29	13
15	48	25	2	35	12	38
47	24	1	34	11	37	21
23	7	33	10	36	20	46

Fig. 150. - Grado 2.

37	15	4	49	34	12	24
18	7	48	33	10	23	36
6	47	31	9	22	39	21
45	30	8	25	42	20	5
29	11	28.	41	19	3	44
14	27	40	17	2	43	32
26	38	16	1	46	35	13

Fig. 151. - Grado 3.

Si otterrebbero ugualmente dei quadrati magici iscrivendo il primo numero della seconda riga del gruppo fondamentale, 1, 2, ... $(n-2)$ casella più in alto anzichè più in basso dell'ultimo numero della prima riga; lo stesso dicasi se invece di collocare i successivi numeri da sinistra a destra venissero disposti da destra a sinistra (vedi fig. 153).

Un quadrato magico del tipo obliquo finora considerato, eccettuati quelli di grado $(n-2)$, si trasforma in un altro pure

18	47	8	41	2	35	24
45	11	40	1	34	23	21
14	38	4	33	22	20	44
37	7	31	25	19	43	13
6	30	28	17	46	12	36
29	27	16	49	10	39	5
26	15	48	9	42	3	32

Fig. 152. - Grado $(n-2)=5$.

magico dello stesso tipo, se si trasportano un numero qualsiasi di linee della parte *superiore-inferiore* alla parte *inferiore-superiore*, a condizione di trasportare poi uno stesso numero di colonne da *destra-sinistra* a *sinistra-destra* del quadrato.

9	2	25	18	11
3	21	19	12	10
22	20	13	6	4
16	14	7	5	23
15	8	1	24	17

Fig. 153.

6	4	22	20	13
5	23	16	14	7
24	17	15	8	1
18	11	9	2	25
12	10	3	21	19

Fig. 154.

Così, per esempio, nel quadrato della fig. 153 trasportando al disotto le due righe superiori e poi a sinistra le due colonne di destra, si ottiene il quadrato magico della fig. 154.

Si possono far subire altre numerose modificazioni ai quadrati di questo tipo Così, per esempio, abbiasi un quadrato magico diviso in due parti secondo una diagonale; si trasporti il triangolo che forma la parte di destra facendolo scorrere secondo le sue *colonne* fino a collocarsi al disotto dell'altro triangolo; si potrà formare un quadrato con le nuove colonne ottenute, che non sarà più del tipo obliquo ma di quello che descriviamo nel paragrafo seguente.

9	2	25	18	11
3	21	19	12	10
22	20	13	6	4
16	14	7	5	23
15	8	1	24	17
	2	25	18	11
		19	12	10
			6	4
				23

Fig. 155.

9	21	13	5	17
3	20	7	24	11
22	14	1	18	10
16	8	25	12	4
15	2	19	6	23

Fig. 156.

Quadrati magici del tipo a salto di cavallo.

In questo tipo di quadrati magici la disposizione dei numeri d'una stessa riga di un gruppo fondamentale viene fatta in modo che per andare dall'uno al successivo si debba seguire lo spostamento del cavallo nel gioco degli scacchi; cioè, la diagonale d'un rettangolo di due caselle in un senso e tre nell'altro; senonchè nel nostro caso la diagonale da seguire sarebbe soltanto una di quelle d'un rettangolo di due caselle nel senso *orizzontale* e tre nel senso a questo perpendicolare come vedesi nella fig. 157.

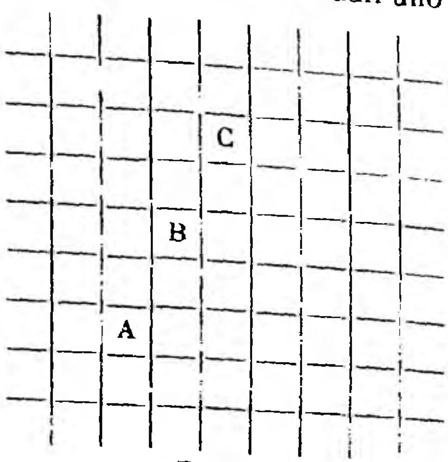


Fig. 157.

Indicando con x lo spostamento di una casella in senso orizzontale e con $2y$ quello di due caselle nel senso verticale (semplici *notazioni di posizione*) potremo indicare con $(x+2y)$ le coordinate d'un numero qualunque rispetto a quello che lo precede mentre $2(x+2y)$ indicherà la posizione d'un numero rispetto a quello che lo precede di due posti; cosicchè $(kx+py)$ indicherà, in generale, che per passare da un certo numero ad un certo altro, occorrono k spostamenti d'una casella nel senso orizzontale e p nel senso verticale. Converremo di assumere come *origine* delle coordinate la casella d'angolo a sinistra, in basso.

Quanto ai coefficienti di x ed y essi non potranno avere che valori interi inferiori ad $(n-1)$.

Per costruire un quadrato magico con questa regola si comincia col collocare il primo numero della prima riga d'un gruppo fondamentale, in una casella qualunque; si colloca il successivo a salto di cavallo nel modo indicato e verso destra in alto. Quando tale salto conduce ad una casella esterna al quadrato in costruzione, si colloca il numero nella casella di uguale posizione nel quadrato in costruzione, come già si è veduto per i quadrati obliqui.

Ecco un esempio (fig. 158).

Quanto all'ordine delle righe e colonne del gruppo fondamentale esso può essere qualunque, e il primo numero si può collocarlo in una casella qualsiasi, senza restrizione.

		18	35	45	13	23	40
	9	26		4	21	31	48
7	17	34	44	12	22	39	7
8	25	42	3	20	30	47	
16	33	43	11	28	38	6	16
24	41	2	19	29	46	14	24
32	49	10	27	37	5	15	32
40	1	18	35	45	13	23	
48	9	26	36	4	21	31	
					22		

Fig. 158.

Se in un quadrato magico del tipo a salto di cavallo si opera una permutazione circolare delle righe e delle colonne, il quadrato non viene alterato nella sua *magicità*, *neppure nelle diagonali*; e questo carattere è proprio dei quadrati cosidetti *diabolici*. Così, per esempio, dal quadrato fig. 158 si deduce quello fig. 159 per il semplice spostamento della prima colonna da sinistra a destra.

Il salto di cavallo si può anche farlo secondo la diagonale d'un rettangolo di 1 per 4, 1 per 5, · · · · 1 per $(n-2)$ caselle, cioè in modo che i numeri abbiano successivamente queste ordinate $(x+3y)$ $(x+4y)$ · · · · · $[x+(n-2)y]$. Anche questi quadrati così ottenuti, salvo quelli del grado $(n-2)$, riescono diabolici ossia possono subire permutazioni circolari qualsiasi di righe o di colonne, restando magici. (V. fig. 161-162-163-164-165-166).

Anche qui, come si è già osservato nei quadrati del tipo obliquo, il quadrato della serie limite $(n-2)$ offre la particolarità di avere una diagonale costituita dalla *colonna magica* del gruppo fondamentale.

17	34	44	12	22	39	7
25	42	3	20	30	47	8
33	43	11	28	38	6	16
41	2	19	29	46	14	24
49	10	27	37	5	15	32
1	18	35	45	13	23	40
9	26	36	4	21	31	48

Fig. 159.

2	3	7	4	5	6	1
16	17	21	18	19	20	15
37	38	42	39	40	41	36
30	31	35	32	33	34	29
44	45	49	46	47	48	43
23	24	28	25	26	27	22
9	10	14	11	12	13	8

Fig. 160.

Nella fig. 163 abbiamo un quadrato di tal genere cioè di modulo 7 ad $n-2=5$ passi, derivante dal gruppo fondamentale della fig. 160 nel quale la colonna magica è la quarta (somma 175).

La fig. 162 rappresenta un altro quadrato della stessa natura, come pure le fig. 163 e 164, con modulo 5.

La fig. 165 rappresenta un quadrato di modulo 7 con passo 3, e la fig. 166 un quadrato pure di modulo 7 con passo 4.

Si possono poi ottenere altre varietà di quadrati scrivendo il primo numero di una nuova riga del gruppo fondamentale non immediatamente al disotto dell'ultimo numero della riga precedente, ma 2, 3, · · · · caselle più basso. In questi quadrati la somma del *passo* e del *grado* non eccede $n-1$; quando tale somma è uguale ad $n-1$, i numeri della colonna magica del gruppo devono occupare la diagonale discendente del quadrato.

32	21	10	44	36	6	26
47	39	7	24	30	15	13
27	33	18	14	45	37	1
8	48	40	4	28	31	16
2	22	34	19	11	49	38
17	9	43	41	5	25	35
42	3	23	29	20	12	46

Fig. 161.

25	10	44	29	21	6	40
33	18	3	37	22	14	48
41	26	11	45	30	15	7
49	34	19	4	38	23	8
1	42	27	12	46	31	16
9	43	35	20	5	39	24
17	2	36	28	13	47	32

Fig. 162.

23	5	17	11	9
19	13	10	22	1
6	24	3	20	12
2	16	14	8	25
15	7	21	4	18

Fig. 163.

8	11	20	22	4
19	23	1	10	12
2	9	13	16	25
15	17	24	3	6
21	5	7	14	18

Fig. 164.

9	34	3	28	46	15	40
17	42	11	29	5	23	48
25	43	19	37	13	31	7
33	2	27	45	21	39	8
41	10	35	4	22	47	16
49	18	36	12	30	6	24
1	26	44	20	38	14	32

Fig. 165.

9	42	19	45	22	6	32
17	43	27	4	30	14	40
25	2	35	12	38	15	48
33	10	36	20	46	23	7
41	18	44	28	5	31	8
49	26	3	29	13	39	16
1	34	11	37	21	47	24

Fig. 166.

La fig. 167 offre un esempio di tali quadrati *limiti*. Altre serie di quadrati magici si possono ottenere collocando il primo numero d'una riga del gruppo fondamentale, non al disotto oppure al disopra dell'ultimo della riga antecedente, ma bensì 1, 2, 3, ... posti a destra o a sinistra di esso. La fig. 168 fornisce un esempio d'un quadrato di modulo 7 nel quale tale spostamento è di 3 caselle ($3x$) e il passo 2, mentre nella fig. 169 abbiamo un quadrato magico di grado 1 di passo $(2x + 3y)$.

18	25	2	9	11
6	13	20	22	4
24	1	8	15	17
12	19	21	3	10
5	7	14	16	23

Fig. 167. - Quadrato limite.

4	37	28	12	45	29	20
48	32	16	7	40	24	8
36	27	11	44	35	19	3
31	15	6	39	23	14	47
26	10	43	34	18	2	42
21	5	38	22	13	46	30
9	49	33	17	1	41	25

Fig. 168.

9	46	34	15	3	40	28
17	5	42	23	11	48	29
25	13	43	31	19	7	37
33	21	2	39	27	8	45
41	22	10	47	35	16	4
49	30	18	6	36	24	12
1	38	26	14	44	32	20

Fig. 169.

La fig. 170 rappresenta un quadrato di spostamento 2 e di passo $(x + 2y)$.

Il quadrato della fig. 171, di modulo 7, corrisponde pure allo spostamento 2 e al passo $(x + 2y)$.

Consideriamo il gruppo fondamentale, per esempio del modulo $n = 5$, ripetuto riga per riga e colonna per colonna nel piano un certo numero di volte (fig. 172). Se passiamo da un numero X ad un

9	22	15	3	16
5	18	6	24	12
21	14	2	20	8
17	10	23	11	4
13	1	19	7	25

Fig. 170.

37	20	45	28	4	29	12
7	32	8	40	16	48	24
19	44	27	3	35	11	36
31	14	39	15	47	23	6
43	26	2	34	10	42	18
13	38	21	46	22	5	30
25	1	33	9	41	17	49

Fig. 171.

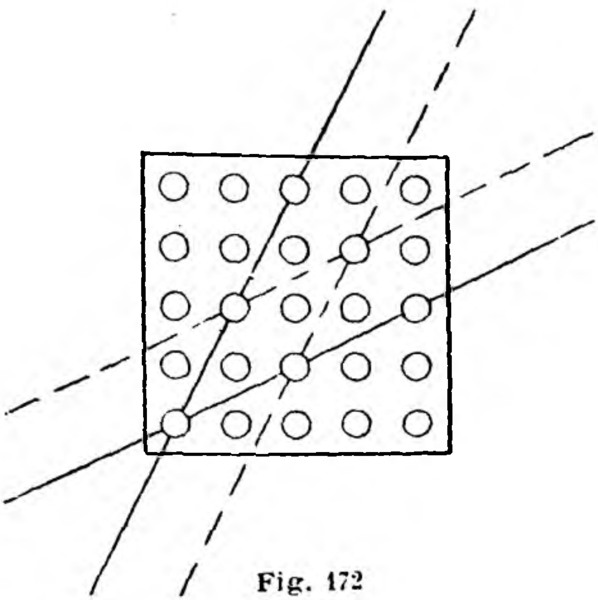


Fig. 172

altro qualunque avremo determinata una direzione seguendo la quale dovremo incontrare, sempre nel medesimo ordine, cinque dei numeri del gruppo ripetuto indefinitamente. Partendo dal medesimo numero X possiamo seguire nello stesso modo un'altra direzione qualunque, e tanto in un caso come nell'altro i cinque numeri avranno somma magica. Partendo poi dal *secondo* numero della prima direzione, per esempio, e seguendo una parallela alla seconda direzione troveremo una

21	22	23	24	25	21	22	23	24	25	21	22	23	24	25
16	17	18	19	20	16	17	18	19	20	16	17	18	19	20
11	12	13	14	15	11	12	13	14	15	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	6	7	8	9	10	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
21	22	23	24	25	21	22	23	24	25	21	22	23	24	25
16	17	18	19	20	16	17	18	19	20	16	17	18	19	20
11	12	13	14	15	11	12	13	14	15	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	6	7	8	9	10	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
21	22	23	24	25	21	22	23	24	25	21	22	23	24	25
16	17	18	19	20	16	17	18	19	20	16	17	18	19	20
11	12	13	14	15	11	12	13	14	15	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	6	7	8	9	10	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5

Fig. 173.

altra serie magica di 5 numeri e così via formando un quadrato magico, come si vede nella fig. 173. La regola è generale qualunque sia il modulo n, ma fanno eccezione le due direzioni parallele alle righe e alle colonne del gruppo fondamentale, cioè parallele alle *direzioni principali di esso*.

Ricordando le notazioni precedentemente adottate si potranno definire le righe e le colonne del quadrato così ottenuto, con:

$$\alpha = 2x + y \qquad \beta = x + 2y$$

La diagonale ascendente sarà:

$$\alpha + \beta = 3x + 3y$$

e quella discendente:

$$\alpha - \beta = x - y$$

esse pure magiche perchè non parallele alle direzioni principali del gruppo.

Il quadrato è dunque magico e il suo spostamento è $4\alpha + 3\beta$ e il suo grado $2\alpha + 2\beta$. La sua diagonale ascendente è costituita dai numeri della diagonale ascendente del gruppo presi 3 a 3. L'esatta soluzione del problema dipende dalla scelta giudiziosa dei parametri delle due equazioni fondamentali.

20	22	4	6	13
9	11	18	25	2
23	5	7	14	16
12	19	21	3	10
1	8	15	17	24

Fig. 174.

In generale, perchè due equazioni del genere:

$$\alpha = ax + by \qquad \text{e} \qquad \beta = a'x + b'y$$

possano dare un quadrato magico occorre che il determinante $(ab' - ba')$ dei loro parametri sia primo col modulo n del gruppo prescelto. Tali due equazioni permettono di risolvere numerosi problemi relativi ai quadrati magici, dei quali ecco alcuni esempi:

a) Determinare la casella che un dato numero del gruppo fondamentale naturale occuperà nel quadrato.

b) Quale è la posizione, nel gruppo, di un numero che nel quadrato occupa un posto noto?

c) Determinare il grado del quadrato conoscendo le due direzioni che lo determinano.

d) Dato un tipo di quadrato regolare, determinare i parametri delle due direzioni principali che corrispondono a tale tipo.

Ecco ora qualche altro esempio. Il quadrato (fig. 175) è dedotto dal gruppo naturale nel quale la *riga magica* venne trasportata in prima fila, e il quadrato fig. 176 venne dedotto dal gruppo fondamentale naturale nel quale le prime cinque righe vennero trasportate in basso.

Facciamo ora seguire alcuni esempii di quadrati a salto di cavallo (fig. 178-179-180-181-182) dedotti dal gruppo naturale nei quali l'unità è stata posta nella casella d'origine, eccetto pei quadrati limite.

79	32	117	70	12	108	50	3	99	41	60
31	116	69	22	107	49	2	98	40	59	78
115	68	21	106	48	1	97	39	58	88	30
67	20	105	47	11	96	38	57	87	29	114
19	104	46	10	95	37	56	86	28	113	77
103	45	9	94	36	66	85	27	112	76	18
55	8	93	35	65	84	26	111	75	17	102
7	92	34	64	83	25	121	74	16	101	54
91	44	63	82	24	120	73	15	100	53	6
43	62	81	23	119	72	14	110	52	5	90
61	80	33	118	71	13	109	51	4	89	42

Fig. 175.

Quadrato obliquo di Modulo 11 - Grado 8 - Costante 671

116	45	106	35	96	25	86	15	76	5	66
55	105	34	95	24	85	14	75	4	65	115
104	43	94	23	84	13	74	3	64	114	54
43	93	33	83	12	73	2	63	113	53	103
92	32	82	22	72	1	62	112	52	102	42
31	81	21	71	11	61	111	51	101	41	91
80	20	70	10	60	121	50	100	40	90	30
19	69	9	59	120	49	110	39	89	29	79
68	8	58	119	48	109	38	99	28	78	18
7	57	118	47	108	37	98	27	88	17	67
56	117	46	107	36	97	26	87	16	77	6

Fig. 176.

Quadrato obliquo di Modulo 11 - Grado $9 = n - 2$ - Costante 671

113	31	144	75	6	119	50	163	94	25	138	56	91
30	156	74	5	118	49	162	93	24	137	55	90	112
155	73	4	130	48	161	92	23	136	54	89	111	29
72	3	129	47	160	104	22	135	53	88	110	28	154
2	128	46	159	103	21	134	65	87	109	27	153	71
127	45	158	102	20	133	64	86	108	39	152	70	1
44	157	101	19	132	63	85	107	38	151	69	13	126
169	100	18	131	62	84	106	37	150	68	12	125	43
99	17	143	61	83	105	36	149	67	11	124	42	168
16	142	60	82	117	35	148	66	10	123	41	167	98
141	59	81	116	34	147	78	9	122	40	166	97	15
58	80	115	33	146	77	8	121	52	165	96	14	140
79	114	32	145	76	7	120	51	164	95	26	139	57

Fig. 177. — Quadrato obliquo di Modulo 13
Grado 5 - Costante 1105.

4	21	31	48	9	26	36
29	46	14	24	41	2	19
12	22	39	7	17	34	44
37	5	15	32	49	10	27
20	30	47	8	25	42	3
45	13	23	40	1	18	35
28	38	6	16	33	43	11

Fig. 178. — Salto di 4 passi
Grado 2

4	13	15	24	33	42	44
37	46	6	8	17	26	35
28	30	39	48	1	10	19
12	21	23	32	41	43	3
45	5	14	16	25	34	36
29	38	47	7	9	18	27
20	22	31	40	49	2	11

Fig. 179. — Salto di 3 passi
Grado 3

Modulo 7 - Costante 175

37	14	142	89	77	54	31	8	106	83	60
73	50	27	4	102	79	56	44	21	119	96
109	86	63	40	17	115	92	69	46	23	11
13	111	99	76	53	30	7	105	82	59	36
49	26	3	101	78	66	43	20	118	95	72
85	62	39	16	114	91	68	45	33	10	108
121	98	75	52	29	6	104	81	58	35	12
25	2	100	88	65	42	19	117	94	75	48
61	38	15	113	90	67	55	32	9	170	84
97	74	51	28	5	103	80	57	34	22	120
1	110	87	64	41	18	116	93	70	47	24

Fig. 180. — Modulo 11 - Salto di 3 passi - Grado 4 - Costante 671.

109	14	51	88	114	30	56	93	9	35	72
85	111	27	64	90	6	43	69	106	22	48
61	98	3	40	77	103	19	45	82	119	24
37	74	100	16	53	79	116	32	58	95	11
13	50	87	113	29	66	92	8	34	71	108
121	26	63	89	5	42	68	105	21	47	84
97	2	39	76	102	18	55	81	118	23	60
73	110	15	52	78	115	31	57	94	10	36
49	86	112	28	65	91	7	44	70	107	12
25	62	99	4	41	67	104	20	46	83	120
1	38	75	101	17	54	80	117	33	59	96

Fig. 181. — Salto di 4 passi - Grado 5.

6	80	44	118	71	24	109	62	15	89	53
42	116	69	33	107	60	13	98	51	4	78
67	31	105	58	22	96	49	2	87	40	114
103	56	20	94	47	11	85	38	112	76	29
18	92	45	9	83	36	121	74	27	101	65
54	7	81	34	119	72	25	110	63	16	90
79	43	117	70	23	108	61	14	99	52	5
115	68	32	106	59	12	97	50	3	88	41
30	104	57	21	95	48	1	86	39	113	77
66	19	93	46	10	84	37	111	75	28	102
91	55	8	82	35	120	73	26	100	64	17

Fig. 182. — Salto di 6 passi - Grado 4.

Nota. — Il seguente quadrato magico, di modulo 5, con la costante 65, di B. Portier, non risulta costrutto con alcuna delle regole indicate e non dipende nè da un diabolico nè da un quadrato a cintura.

2	23	25	11	4
8	16	9	20	12
19	5	13	21	7
14	6	17	10	18
22	15	1	3	24

Fig. 183.

Quadrati magici dispari a moduli non primi.

Dato un gruppo fondamentale di modulo dispari composto, una linea qualsiasi, inclinata sui due assi di tal gruppo *non* incontrerà *sempre* *n* numeri diversi.

Se i parametri a e b d'una direzione $z = a\,x + b$ sono primi col modulo n del gruppo, tale direzione passa per n punti distinti appartenenti ciascuno a linee e colonne differenti, e sarà magica.

Se uno solo dei parametri, a per esempio, è primo con n e l'altro no, le ordinate dei varii numeri incontrati dalla direzione considerata non sono tutte differenti, ma le loro ascisse lo saranno, dimodochè questa direzione passa pure per n punti diversi; ma non si può affermare che sarà magica; infatti alcune soltanto delle linee che essa determina offriranno la magia voluta.

Nel caso in cui a e b abbiamo un fattore comune ε col modulo n, ossia se $n = \varepsilon\,p$ la direzione $a\,x + b\,y$ non incontrerà più che p punti diversi, in modo che la formazione del quadrato magico con tale direzione diviene impossibile.

Condizione essenziale per la possibilità del quadrato si è che il determinante $(a\,b' - b\,a')$ delle due direzioni principali sia diverso da zero (se fosse nullo, le due direzioni non sarebbero distinte) e primo col modulo. È inoltre necessario che in ogni una delle due equazioni, i due parametri non siano *nello stesso tempo* non primi col modulo.

Non sempre però queste condizioni sono sufficienti.

In generale, se i quattro parametri, come pure il loro determinante, sono primi col modulo, si ottengono quadrati a linee e colonne magiche, nei quali però non è assicurata la magicità delle diagonali. Occorre che le due equazioni forniscano pure delle diagonali magiche; ora spesso avviene che le quantità $\alpha + \beta$ e $\beta - \alpha$ che le determinano abbiamo uno dei loro parametri non primi col modulo, il che, come si è veduto, può alterarne la magia.

Abbiasi, ad es., il gruppo naturale di modulo 9; la somma magica è 369. Siano:

$$\alpha = -x + 2\,y \qquad\qquad \beta = x - y$$

le equazioni delle due direzioni principali scelte per la costruzione del quadrato; i loro paramotri ed il loro determinante sono primi col modulo. Ma si ha pure:

$$\beta + \beta = y \qquad \text{e} \qquad \beta - \alpha = 2\,x - 3\,y$$

quindi la diagonale montante sarà costituita da una colonna del gruppo, necessariam ıte la mediana, poichè è la sola magica. La diagonale discendente che è funzione del parametro 3, varia secondo il numero che viene posto all'origine del quadrato.

Solamente i numeri 5, 32 e 59 (distanziati di tre in tre) rendono magica la diagonale considerata. Così la direzione $(2x - 3y)$ non è magica che per alcune delle sue linee.

Passiamo ad un altro esempio con:

$$\alpha = -x + 2y \qquad \beta = 5x - 2y$$

Il determinante $ab' - ba' = -8$ ossia uguale all'unità, potendosi aggiungere un multiplo qualunque del modulo, senza alterare le quantità. Le due diagonali saranno definite da:

$$\alpha + \beta = 4x \qquad \text{e} \qquad \beta - \alpha = 6x - 4y$$

Qui la diagonale ascendente è costituita dai numeri della linea magica del gruppo, presi con un intervallo di 4. Di tale linea i soli numeri 37, 40 e 43 posti all'origine del quadrato assicurano la magia della diagonale discendente.

Non occorre più ricorrere a tali restrizioni quando si faccia subire al gruppo fondamentale una conveniente trasformazione. In tal caso, alla sola condizione che il determinante dei parametri sia primo col modulo, le equazioni di due direzioni qualunque inclinate sugli assi del gruppo e passanti ciascuna per n punti differenti, daranno dei quadrati magici. Si dovrà verificare che le diagonali pure passino per n punti differenti, per il che è sufficiente che i due parametri delle loro direzioni non siano nello stesso tempo non primi col modulo, come già si è veduto. Così è del gruppo seguente:

64	65	66	68	69	67	72	70	71
55	56	57	59	60	58	63	61	62
73	74	75	77	78	76	81	79	80
28	29	30	32	33	31	36	34	35
46	47	48	50	51	49	54	52	53
37	38	39	41	42	40	45	43	44
19	20	21	23	24	22	27	25	26
10	11	12	14	15	13	18	16	17
1	2	3	5	6	4	9	7	8

Fig. 184.

Applicando ad esso le equazioni:

$$\alpha = 8\,x + y \qquad \beta = 5\,x + 2\,y$$

per le quali si ha:

$$a\,b' - b\,a' = 11$$

si troverà che le equazioni delle diagonali sono:

$$\alpha + \beta = 4\,x + 3\,y \qquad \beta - \alpha = -\,3\,x + y = 6\,x + y$$

e si ottiene questo quadrato magico:

60	68	3	11	19	44	52	36	76
35	79	63	67	6	14	21	38	46
41	48	29	73	62	70	9	13	24
16	27	40	51	32	75	56	64	8
66	2	10	26	43	54	31	78	59
81	58	69	5	12	20	37	53	34
47	28	80	61	72	4	15	23	39
22	42	50	30	74	55	71	7	18
1	17	25	45	49	33	77	57	65

Fig. 185.

che ha il passo $\alpha + 4\,\beta$ e il grado $3\,\alpha - \beta$. Se ne possono permutare circolarmente le linee e le colonne senza alterarne la magia. Le medesime equazioni non danno quadrati col gruppo naturale se non a condizione di porre nella casella d'origine i numeri 10, 37, 64 - 13, 40, 67 - 16, 43, 70.

Ecco ancora alcuni esempi di quadrati dedotti dal gruppo fondamentale sopra indicato.

1.° Quadrato di cavallo, semplice:

$$\alpha = 3x + 2y \qquad \beta = 8x + 8y$$

11	42	34	56	6	25	47	78	70
21	49	80	66	13	44	30	58	8
41	36	55	5	27	46	77	72	10
51	79	65	15	43	29	60	7	20
31	62	3	22	53	75	67	17	39
81	64	14	45	28	59	9	19	50
61	2	24	52	74	69	16	38	33
71	12	40	35	57	4	26	48	76
1	23	54	73	68	18	37	32	63

Fig. 186.

2.° Quadrato di cavallo di grado 1 e di passo $\alpha + 4\beta$:

$$\alpha = 5x + 4y \qquad \beta = 8x + 8y$$
$$\alpha + \beta = 4x + 3y \qquad \beta - \alpha = 3x + 4y$$

11	36	3	52	68	44	60	19	76
21	79	14	35	6	46	67	38	63
41	62	24	73	13	29	9	48	70
51	64	40	56	27	75	16	32	8
31	2	54	66	43	59	26	78	10
81	12	34	5	53	69	37	58	20
61	23	80	15	28	4	47	72	39
71	42	55	22	74	18	30	7	50
1	49	65	45	57	25	77	17	33

Fig. 187.

2.° Il quadrato di cavallo di passo $\alpha + 7\beta$, è l'ultimo della serie. Non si può collocare un numero qualsiasi del gruppo in una casella ad arbitrio. Dovendo la colonna magica occupare la diagonale discendente, rimane limitato il numero delle caselle nelle quali si può collocare il primo numero per costituire il quadrato magico. Il quadrato seguente è ottenuto disponendo il numero 68, appartenente alla colonna magica, nella casella superiore di sinistra.

68	75	47	19	8	61	36	40	15
6	59	30	38	10	71	79	54	22
13	69	77	48	20	1	62	34	45
27	4	60	32	39	11	64	80	52
43	18	67	78	50	21	2	55	35
53	25	9	58	33	41	12	65	73
28	44	16	72	76	51	23	3	56
74	46	26	7	63	31	42	14	66
57	29	37	17	70	81	49	24	5

Fig. 188.

In tutti i quadrati di cavallo, le colonne sono costituite dai medesimi numeri disposti nello stesso ordine. Le equazioni corrispondenti a quest'ultimo quadrato sono:

$$\alpha = 6x + 7y \qquad \beta = 8x + 8y$$

La diagonale discendente $\beta - \alpha = y$ è dunque appunto costituita dalla colonna magica del gruppo.

Questo gruppo trasformato fornirebbe ugualmente dei quadrati di tipo *obliquo*, di diversi gradi. Se ne possono pure dedurre, come per i moduli primi, dei quadrati di cavallo d'ordine e di grado della forma $(k\alpha + m\beta)$. Così il seguente quadrato magico ha il passo $(\alpha + 4\beta)$ e il grado $(3\alpha - \beta)$. Le equazioni corrispondenti sono:

$$\alpha = 8x + y \qquad \beta = 5x + 2y$$

da cui:

$$\alpha + \beta = 4x + 3y \qquad \beta - \alpha = -3x + y = 6x + y$$

Benché il numero dei quadrati che si possonó dedurre da un gruppo trasformato sia assai grande, non si possono però ottenere tutti i tipi che possono fornire i gruppi di moduli primi. L'ostacolo sta nella natura stessa del modulo. Non si potrà mai costruire un quadrato il cui grado non sia primo col modulo.

60	68	3	11	19	44	52	36	76
35	79	63	67	6	14	21	38	46
41	48	29	73	62	70	9	13	24
16	27	40	51	32	75	56	64	8
66	2	10	26	43	54	31	78	59
81	58	69	5	12	20	37	53	34
47	28	80	61	72	4	15	23	39
22	42	50	30	74	55	71	7	18
1	17	25	45	49	33	77	57	65

Fig. 189.

Metodo Arnoux. — Sia un modulo $n = r s$ e supponiamo r ed s primi. Si comincia col formare due quadrati di moduli r ed s; poi si sostituisce ognuno dei numeri di uno di tali qua-

31	36	29	76	81	74	13	18	11
30	32	34	75	77	79	12	14	16
35	28	33	80	73	78	17	10	15
22	27	20	40	45	38	58	63	56
21	23	25	39	41	43	57	59	61
26	19	24	44	37	42	52	55	60
67	72	65	4	9	2	49	54	47
66	68	70	3	5	7	48	50	52
71	64	69	8	1	6	53	46	51

Fig. 190.

drati, quello di modulo r, ad esempio, col suo prodotto per s^2 operazione che non altererà evidentemente punto la magia del quadrato. Si sostituirà quindi al numero contenuto in ciascuna delle caselle di questo nuovo quadrato la somma di questo numero con ciascuno dei numeri del quadrato di mo-

67	72	65	94	99	92	175	180	173	193	198	191	31	36	29
66	68	70	93	95	97	174	176	178	192	194	196	30	32	34
71	64	69	98	91	96	179	172	177	197	190	195	35	28	33
166	171	164	202	207	200	4	9	2	85	90	83	103	108	101
165	167	169	201	203	205	3	5	7	84	86	88	102	104	106
170	163	168	206	199	204	8	1	6	89	82	87	107	100	105
13	18	11	76	81	74	112	117	110	139	144	137	220	225	218
12	14	16	75	77	79	111	113	115	138	140	142	219	221	223
17	10	15	80	73	78	116	109	114	143	136	141	224	217	222
130	135	128	148	153	146	211	216	209	22	27	20	49	54	47
129	131	133	147	149	151	210	212	214	21	23	25	48	50	52
134	127	132	152	145	150	215	208	213	26	19	24	53	46	51
184	189	182	40	45	38	58	63	56	121	126	119	157	162	155
183	185	187	39	41	43	57	59	61	120	122	124	156	158	160
188	181	186	44	37	42	62	55	60	125	118	123	161	154	159

Fig. 191.

dulo s già costrutto. Con tale operazione ciascuna delle caselle del quadrato magico di modulo r conterrà s^2 numeri. Questo quadrato ne avrà dunque r^2 s^2 e sarà magico.

Esso risulterà formato dai numeri della serie naturale, il cui primo termine sarebbe $(1 + s^2)$; basterà dunque dedurre s^2 da ciascuno di tali numeri per avere un quadrato costituito dei $n^2 = r^2 s^2$ primi numeri naturali.

Il metodo è applicabile ad un modulo composto di numeri primi qualunque.

Una volta costrutto un quadrato di modulo $n = r\,s$ si costruirà, applicando la stessa regola, il quadrato di modulo $r\,s\,t$ e così di seguito per un maggior numero di fattori. Diamo esempio di due quadrati di moduli 9 e 15 costrutti con tale metodo.

Il primo (fig. 190) è costituito di due quadrati identici, di modulo 3, e il secondo (fig. 191) per mezzo dello stesso quadrato di 3 e d'un quadrato di cavallo, di modulo 5, di passo 3.

Altro metodo. — Consideriamo ad esempio un modulo $n = 3\,C$ per poter applicare il metodo basta saper costrurre un quadrato di modulo C.

Si dispongono le linee e le colonne del gruppo naturale in tre serie, senza modificarne l'ordine. Il gruppo si troverà così diviso in nove compartimenti contenenti ciascuno C linee e C colonne. Ognuno di essi costituisce un gruppo fondamentale di modulo C che può dare origine a numerosi quadrati. Le costanti di questi nove gruppi sono in progressione aritmetica in linea e in colonna, di ragione però diversa. Tali costanti formano dunque pure un gruppo fondamentale di modulo 3. Si costruisce un quadrato magico dedotto da quest'ultimo gruppo e si sostituisce poi il numero che occupa le sue singole caselle, con uno dei quadrati magici aventi tale numero come costante. Il quadrato magico di modulo $3\,C$ sarà così costituito.

Applicando la regola ai gruppi naturali di moduli 9, 15 e 21, troviamo che il primo di tali gruppi diviso in nove compartimenti dà, con le costanti relative a ciascuno di essi, il gruppo fondamentale ausiliario:

33	42	51
114	113	132
195	204	213

dal quale si deduce, con la regola già nota, il quadrato magico seguente, la cui costante è 369.

42	195	132
213	123	33
114	51	204

Fig. 192.

Sostituendo ciascuno dei termini di questo quadrato con un quadrato magico dedotto dal gruppo corrispondente, si otterrà un quadrato magico di modulo 9.

Il gruppo di modulo 15, diviso in nove compartimenti costituiti ciascuno da 25 numeri, darà con le costanti di ciascuno di essi il gruppo fondamentale:

165	190	215
540	565	590
915	940	965

da cui si dedurrà il quadrato seguente che ha per costante 1695.

540	215	940
965	565	165
190	915	590

Fig. 193.

Si sostituirà ciascuno dei termini con uno dei numerosi quadrati di modulo 5 che si è veduto come si possono costruire.

Così, per il modulo 21, si avrà il gruppo fondamentale:

469	518	567
1498	1547	1596
2527	2576	2625

da cui si deduce il seguente quadrato:

518	2527	1596
2625	1547	469
1498	567	2576

Fig. 194.

E si sostituirà ciascuno dei termini con uno dei quadrati di modulo 7 ricavati dal gruppo corrispondente. È facile estendere questo metodo al caso di moduli composti d'un numero qualsiasi di fattori

Quadrato magico di lato tre.

I primi nove numeri si possono disporre in quadrato magico in una sola maniera (fig. 195), che però si può ripetere in otto *varietà* per così dire, quando si vogliano considerare come differenti i quadrati, effettivamente uguali, che differiscono da quello indicato solo per avergli fatto subire rotazioni di 90, 180 o 270° nel senso delle sfere dell'orologio (fig. 196 a 202) o per avere seguito un ordine inverso nella distribuzione dei numeni, che dà però quadrati identici a quello della fig. 195. L'identità consiste in ciò che le *somme costanti* sono sempre ottenute coi gruppi 1, 5, 9 - 2, 6, 7 - 3, 4, 8 - 2, 4, 9 - 3, 5, 7 - 1, 6, 8 - parallelamente ai lati del quadrato e 2, 5, 8 - 4, 5, 6 diagonalmente; dovendosi considerare come quadrati magici *effettivamente* differenti quelli sui quali la magicità è ottenuta con aggruppamenti di numeri varii dall'uno all'altro.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Fig. 195.

8	3	4
1	5	9
6	7	2

a

6	1	8
7	5	3
2	9	4

b

2	7	6
9	5	1
4	3	8

c

2	9	4
7	5	3
6	1	8

A

6	7	2
1	5	9
8	3	4

B

8	1	6
3	5	7
4	9	2

C

4	3	8
9	5	1
2	7	6

D

Fig. 196 a 202.

Metodi di De la Loubère per quadrati magici d'ordine dispari.

Questo metodo è assai semplice. Si comincia col collocare il primo numero nella casella media della *prima riga* seguendo poi la diagonale fino al 5. Il 2 e il 3 che restano compresi nel quadrato ausiliario *A* si riportano nelle caselle della stessa *situazione* nel quadrato principale, come pure il 4 e il 5 che

		A					B		
						5			
					4			20	
				3	10		19		
			2	9		18	25		
17	24	1	8	15	17	24			
3	5	7	14	16	23				
4	6	13	20	22			C		
10	12	19	21	3					
11	18	25	2	9					

Fig. 203.

si trovano nell'altro quadrato ausiliario *B*. Poscia nel quadrato principale si comincia la seconda serie di cinque numeri collocando il 6 immediatamente al disotto del 5 e seguendo poi un andamento diagonale con successive trasposizioni, come si è detto sopra. Si collocherà l'11 al disotto del 10, ecc.

Se si cominciasse collocando il primo numero in una casella qualunque si avrebbero dei quadrati magici per righe e per colonne, ma *non sempre* per diagonali.

La figura seguente dà la spiegazione della magicità della disposizione ottenuta col metodo De la Loubère.

Possiamo osservare che in questa figura si possono far subire ai simboli 1, 2, 3, 4 e 5 un numero $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ di permutazioni diverse, e ai simboli 0, 5, 10, 15 e 20 se ne possono

15 + 2	20 + 4	0 + 1	5 + 3	10 + 5
20 + 3	0 + 5	5 + 2	10 + 4	15 + 1
0 + 4	5 + 1	10 + 3	15 + 5	20 + 2
5 + 5	10 + 2	15 + 4	20 + 1	0 + 3
10 + 1	15 + 3	20 + 5	0 + 2	5 + 4

Fig. 204.

far subire $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 24$; sicchè combinando le prime 120 permutazioni con queste altre si avranno in tutto $120 \times 24 = 2880$ quadrati magici, dei quali però 720 soltanto sono veramente distinti.

Quadrati magici pari.

In un quadrato di 16 caselle disponiamo nel loro ordine naturale i 16 primi numeri (fig. 205). Lasciando poi al loro posto i numeri delle diagonali, permutiamo fra loro gli altri otto nel modo indicato nella fig. 206. Il quadrato ottenuto sarà magico.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Fig. 205.

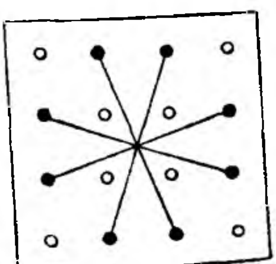


Fig. 206.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Fig. 207.

Metodo generale di De la Hire. — Per maggior chiarezza applichiamo subito il metodo al quadrato di modulo 6. Si costruiscono due quadrati ausiliarii, il primo coi numeri dall'1 ai 6 secondo queste regole:

1.° Nelle caselle della diagonale principale si scrivono i numeri 1, 2, 3, 4, 5 e 6 in modo che i numeri complementari siano in caselle complementari, cioè nell'ordine naturale oppure in quest'altro: 2, 6, 3, 4, 1, 5.

1	5	4	3	2	6
6	2	4	3	5	1
6	5	3	4	2	1
1	5	3	4	2	6
6	2	3	4	5	1
1	2	4	3	5	6

Fig. 208.

0	30	30	0	30	0
24	6	24	24	6	6
18	18	12	12	12	18
12	12	18	18	18	12
6	24	6	6	24	24
30	0	0	30	0	30

Fig. 209.

1	35	34	3	32	6
30	8	28	27	11	7
24	23	15	16	14	19
13	17	21	22	20	18
12	26	9	10	29	25
31	2	4	33	5	36

Fig. 210.

2.° Ciascuno di tali numeri viene ripetuto nella casella *associata* verticalmente ossia, nella casella che nella medesima colonna occupa un posto dello stesso ordine a partire dalla periferia.

3.° Nelle caselle libere della prima colonna si iscrivono una volta lo stesso numero già scritto in due caselle e tre volte il numero complementare (p. es., nel nostro caso, si scrive 1 e 6) senza imporsi un ordine, ma in modo da soddisfare alla condizione espressa nel N. 3 delle regole sotto indicate.

4.º I numeri complementari di quelli della prima colonna vengono riprodotti nelle caselle associate orizzontalmente con quelle della prima colonna.

5.º Le caselle libere della seconda e terza colonna sono riempite secondo la stessa regola seguita per la prima colonna e nelle caselle associate orizzontalmente a quelle di queste due colonne si iscrivono i numeri complementari. Il quadrato così costituito è necessariamente magico secondo le righe, le colonne e le diagonali.

Ecco le regole per costruire il secondo quadrato ausiliario:

1.º Nelle caselle della diagonale di sinistra si iscrivono i numeri 0, 6, 12, 18, 24 e 30 disponendoli in modo che due caselle complementari contengano numeri complementari.

2.º Le caselle associate orizzontalmente con quelle della diagonale vengono occupate dai medesimi numeri che occupano quelle della diagonale.

3.º Le caselle libere della prima riga vengono riempite col numero già scritto due volte nella medesima riga o col suo complementare (p. es., nel caso nostro con 10 o con 30). Si può seguire un ordine di iscrizione qualsiasi, imponendosi però due condizioni:

a) la riga deve contenere tre volte ciascun numero;

b) se una casella della prima riga del primo quadrato ausiliario e la casella associata verticalmente, contengono numeri complementari, la casella corrispondente della prima riga del secondo quadrato ausiliario e la casella associata orizzontalmente debbono contenere lo stesso numero.

4.º Nelle caselle associate verticalmente con quelle della prima riga si iscrivono i numeri complementari di quelli che figurano nella prima riga.

5.º Le caselle libere nella seconda e terza riga si riempiono nella stessa maniera di quelle della prima riga e nelle caselle ad esse associate verticalmente si iscrivono i numeri complementari. Anche questo secondo quadrato ausiliario riesce magico per righe, colonne e diagonali come il primo.

Resta però da dimostrare che la clausola addizionale di cui al N. 3 (*a* e *b*) può essere sempre soddisfatta.

Quando si tratti d'un quadrato doppiamente pari non si ha bisogno d'iscrivere dei numeri complementari nelle caselle associate verticalmente del primo quadrato ausiliario, a meno che ciò non torni comodo; e, se ne vengono inserite, la loro presenza non impedisce di soddisfare alla cóndizione addizionale.

Nel caso d'un quadrato semplicemente pari è impossibile soddisfare alla clausola restrittiva, se una riga qualsiasi del primo quadrato ausiliario ha tutte le sue caselle associate verticalmente (eccezione fatta per i due quadrati della diagonale) occupate da numeri complementari.

Per conseguenza, costruendo il primo quadrato ausiliario ed applicando la regola (3ª), è necessario fare in modo che in ciascuna riga, una casella almeno, non comune con la diagonale, abbia la propria casella associata verticalmente occupata dallo stesso suo numero. Tale condizione può sempre esser soddisfatta se si ha $n > 2$.

Ecco ora il modo di costruire il quadrato magico. In ciascuna sua casella si iscrive la somma dei numeri scritti nelle caselle corrispondenti dei quadrati ausiliarii, come vedesi nella fig. 210.

Altre regole si possono seguire per ottenere quadrati magici di modulo pari, ma non crediamo di dovere qui insistere di più sull'argomento

1	99	3	97	96	5	94	8	92	10
90	12	88	14	86	85	17	83	19	11
80	79	23	77	25	26	74	28	22	71
31	69	68	34	66	65	37	33	62	40
60	42	58	57	45	46	44	53	49	51
50	52	43	47	55	56	54	48	59	41
61	32	38	64	36	35	67	63	39	70
21	29	73	27	75	76	24	78	72	30
20	82	18	84	15	16	87	13	89	81
91	9	93	4	6	95	7	98	2	100

Fig. 211. — Quadrato magico di Modulo 10.

Il quadrato magico della Villa Albani a Roma.

LECTOR SI DOCTUS ADMIRATOR SI IGNARUS SCITO
QUADRATUS HIC MATHEMATICE CONSTRUCTUS
AB UNO USQUE AD OCTOGINTA UNUM 3321 UNITATES
INCLUDIT QUÆLIBET IPSIUS COLUMNÆ TAM IN LINEA
PLANA QUAM IN RECTA ET TRASVERSALI UNITATES
369 QUÆ DUCTÆ PER NOVEM CASDEM 3321 UNITATES
RESTITUUNT ET APPELLATUR MAXIMUS QUIA MAXIMAM

POSSIDET EX TENSIONEM VALE
CAETANUS GILARDONUS ROMANUS PHILOTECNOS
INVENTOR A. D. MDCCLXVI.

15	58	29	34	63	49	74	41	6
7	27	31	81	23	76	80	18	26
38	8	30	71	47	20	21	78	56
73	19	25	42	10	33	50	65	52
22	55	72	1	45	60	28	16	70
79	35	39	66	2	48	17	24	59
14	64	69	12	77	3	51	68	11
46	36	61	53	40	43	4	54	32
75	67	13	9	62	37	44	5	57

Fig. 212.

Diversi modi di generazione d'uno stesso quadrato magico.

Ciò che caratterizza un quadrato magico è l'*ordinamento* adottato per la serie dei numeri che lo costituiscono. Così, ad esempio, il quadrato seguente a ordinamento obliquo, dedotto dal gruppo fondamentale naturale nel quale la linea magica è stata trasportata al primo posto è di grado $3\,\alpha - 3\,\beta$.

45	41	30	19	8	4	28
40	39	18	14	3	27	44
35	17	13	2	26	43	39
16	12	1	25	49	38	34
11	7	24	48	37	33	15
6	23	47	36	32	21	10
22	46	42	31	20	9	5

Fig. 213.

Questo quadrato si può anche considerarlo come di grado 4 se si prendono le linee del gruppo nell'ordine

22, 15, 43, 8, 36, 1, 29.

La variazione del grado dipende, come è evidente, dalla modificazione della disposizione delle linee del gruppo naturale. Analoghe osservazioni si possono fare riguardo ai quadrati con ordinamento a salto di cavallo.

Così il quadrato della fig. 185 (pag. 286) è a salto di 4 passi e di grado 7 per il gruppo nel quale le linee siano disposte in questo ordine:

1, 46, 64, 37, 55, 19, 73, 10, 28

e così via.

Quadrati magici a scompartimenti.

Diconsi a scompartimenti quei quadrati magici che si possono scomporre in un certo numero di quadrati essi pure magici.

Proponiamoci p. es. di costruire il quadrato magico a scompartimenti, di ottavo ordine. Dividiamo i numeri dall'1 al 64 in otto serie di otto numeri consecutivi ciascuna. Componiamo 4 quadrati di 4 ciascuno con due di tali serie che siano complementari (sono complementari la 1ª e l' 8ª, la seconda e la 7ª, ecc.). Disponiamo poi i quattro quadrati nel modo indicato in figura. In questo quadrato a scompartimenti si può fare lo scambio di due dei quadrati parziali senza che esso cessi di essere magico.

1	63	62	4	9	55	54	12
60	6	7	57	52	14	15	49
8	58	59	5	16	50	51	13
61	3	18	64	53	11	10	56
17	47	46	20	25	39	38	28
44	22	23	41	36	30	31	33
24	42	43	21	32	34	35	29
45	19	18	48	37	27	26	40

Fig. 214.

Osservazioni. — Il quadrato magico di 6° ordine non si può scomporre in più quadrati magici.

Il lato d'un quadrato magico a scompartimenti deve evidentemente essere scomponibile in fattori ossia *non primo.*

Per costruire il quadrato del 9° ordine si possono scomporre i primi 81 numeri in 9 progressioni aritmetiche di 9 termini ciascuna e di ragione 9, cioè:

÷ 1 · 10 · 19 73

÷ 2 · 11 · 90 74

÷ . . . .

÷ 9 · 18 · 27 81

Coi termini di ciascuna progressione si forma un quadrato magico di 3° ordine; questi quadrati parziali avranno per somme magiche 111, 114, 117, 120, 123, 126, 129, 132, 135, che costituiscono una progressione aritmetica; si potranno quindi disporre magicamente queste *somme* come i quadrati di 3 corrispondenti. Si ottiene in tal modo il quadrato della fig. 215 nel quale non si possono però scambiare i quadrati parziali come nel quadrato di 8° ordine.

71	8	53	64	1	46	69	6	51
26	44	62	19	37	55	24	42	60
35	80	17	28	73	10	33	78	15
66	3	48	68	5	50	70	7	52
21	39	57	23	41	59	25	43	61
30	75	12	32	77	14	34	79	16
67	4	49	72	9	54	65	2	47
22	40	58	27	45	63	20	38	56
31	76	13	36	81	18	29	74	11

Fig. 215.

A zone. — Un'altra maniera di ottenere quadrati composti è dovuta a Frenicle e consiste nel cingere un quadrato magico con una fascia pure magica, cioè tale da costituire, insieme col quadrato che ricinge, un nuovo quadrato magico, come vedesi nelle figure 216 e 217.

3	24	7	6	25
22	12	17	10	4
21	11	13	15	5
18	16	9	14	8
1	2	19	20	23

Fig. 216.

In questo modo si può passare da un quadrato pari ad uno dispari e viceversa.

Volendo costruire con questo procedimento un quadrato magico contenente i primi n^2 numeri, partendo dal quadrato magico di $(n-2)^2$ numeri, il procedimento più semplice consiste nel riservare per le 4 $(n-1)$ caselle della fascia i 2 $(n-1)$ primi numeri della serie naturale ed i 2 $(n-1)$ ultimi numeri. Così, per $n=7$, i numeri riservati per la fascia saranno dall'1 al 12 e dal 38 al 49 inclusivamente.

La somma dei numeri compresi in ciascuna riga d'un quadrato magico di modulo $(n-2)$ è $\frac{1}{2}(n-2)\,[(n-2)^2+1]$, il termine medio essendo $\frac{1}{2}\,[(n-2)^2+1]$. Così pure, il termine medio in un quadrato magico d'ordine n è $\frac{1}{2}(n^2+1)$; la differenza tra i due è $2(n-1)$. Cominciando dunque col costruire

11	6	48	8	49	12	41
45	30	16	33	22	24	5
46	14	35	21	23	32	4
10	37	19	25	31	13	40
47	18	27	29	15	36	3
7	26	28	17	34	20	43
9	44	2	42	1	38	39

Fig. 217.

un quadrato magico qualunque di modulo $(n-2)$ e aggiungendo la quantità $2(n-1)$ a ciascuno dei numeri che vi si trovano iscritti, il termine medio del nuovo quadrato formato è $\frac{1}{3}(n^2+1)$.

I numeri riservati alla fascia figurano per coppie n^2 ed 1, n^2-1 e 2, n^2-2 e 3, ecc., in modo che la media di ciascuna coppia sia $\frac{1}{2}(n^2+1)$ e si devono disporre in caselle opposte della fascia, procedendo per tentativi.

Il metodo è dunque razionale rispetto al quadrato *nucleo*, ma è *empirico* rispetto alla fascia aggiunta. Applichiamolo alla costruzione di un quadrato di modulo 6.

Cominciamo col disporre i 36 numeri in due file nelle quali si corrispondano i numeri complementari, cioè quelli la cui somma vale 37; avremo:

$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$	$\dot{7}$	$\dot{8}$	$\dot{9}$	$\dot{10}$	$\dot{11}$	$\dot{12}$	$\dot{13}$	$\dot{14}$	$\dot{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$
36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19

Mediante otto qualunque dei numeri della prima fila ed i loro complementari della riga inferiore formiamo un primo quadrato di 16 numeri (4° ordine) valendoci delle regole in proposito già esposte, prendendo i numeri secondo il loro ordine crescente di grandezza, per esempio:

1	35	34	4
32	6	7	29
8	30	31	5
33	3	2	36

Fig. 218.

1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 · 7 · 8

29 · 30 · 31 · 32 · 33 · 34 · 35 · 36

in modo da ottenere la fig. 218.

Prendendo questo quadrato come nucleo centrale di quello del 6° ordine da costruire si vede che, dovendo in questo essere la somma magica 111, rimarranno da collocare in ciascuna riga, colonna e diagonale, due numeri la cui somma valga:

$$111 - 74 = 37.$$

I numeri da aggiungere saranno quindi coppie di numeri corrispondenti nelle due file indicate in principio. Scegliamone due qualunque, per es. 9 e 28, 10 e 27 e collochiamoli ai quattro angoli del quadrato in modo che i complementari formino diagonale.

9	23	25	26	18	10
20	1	35	34	4	17
15	32	6	7	29	22
16	8	30	31	5	21
24	33	3	2	36	13
27	14	12	11	19	28

Fig. 219.

Ora nell' ultima riga bisognerà collocare numeri la cui somma valga:

$$111 - (27 + 28) = 56$$

Fra i numeri (non complementari) non ancora adoperati osserviamo che:

$$11 + 12 + 14 + 19 = 56$$

Dunque disponiamo comunque questi quattro numeri nella ultima riga e nella prima, al posto corrispondente, i loro complementari.

Analogamente si vede che nella prima colonna mancano 4 numeri la cui somma deve valere:

$$111 - (9 + 27) = 75$$

Tra i numeri (non complementari) non adoperati troviamo

$$15 + 16 + 20 + 24 = 75$$

quindi disponendoli nella prima colonna e i loro complementari al posto corrispondente nell'ultima colonna, avremo il quadrato completo.

45	21	22	23	24	39	40	46
27	55	12	11	14	47	56	38
30	15	61	3	2	64	50	35
32	52	8	58	59	5	13	33
34	48	60	6	7	57	17	31
36	16	1	63	62	4	49	29
57	9	53	54	51	18	10	28
19	44	43	42	41	26	25	20

Fig. 220.

Con analogo procedimento si passerebbe dal quadrato del 6° a quello di 8° ordine (fig. 220) e così successivamente.

Per costruire il quadrato di 5° ordine si comincia col costruirne nel modo indicato, uno di 3° ordine, dal quale si passa a quello di 5°; da questo si otterrebbe quello di 7°, ecc.

40	1	2	3	42	41	46
38	31	13	14	32	35	12
39	30	26	21	28	20	11
43	33	27	25	23	17	7
6	16	22	29	24	34	44
5	15	37	36	18	19	45
4	49	48	47	8	9	10

Fig. 221.

A Croce. — La figura seguente rappresenta un quadrato magico *a croce*. Un quadrato magico a zone si può sempre trasformare in un quadrato a croce, nel seguente modo.

Consideriamo il quadrato a zone, del 6° ordine ottenuto precedentemente (fig. 219) e scomponiamo il suo quadrato interno,

1	35	16	21	34	4
32	6	20	17	7	29
25	26	9	10	23	18
12	11	27	28	14	19
8	30	24	13	31	5
33	3	15	22	2	36

Fig. 222.

di 16 caselle, in quattro quadrati uguali, disponendoli nel modo indicato nella fig. 222. Quanto agli altri numeri li collocheremo in modo che tanto le diagonali, come le righe e le colonne conservino gli stessi elementi come nel quadrato a zone.

1	16	35	34	21	4
25	9	26	23	10	18
32	20	6	7	17	29
8	24	30	31	13	5
12	27	11	14	28	19
33	15	3	2	22	36

Fig. 223.

A intelaiatura. — Se invece di disporre i numeri del quadrato interno nel modo testè indicato, si dispongono come nella fig. 223 si ottiene un quadrato magico a riquadri; nella sua composizione occorrerà tener presenti le stesse norme sopra indicate per quello a croce.

Quadrati doppiamente magici o satanici.

1. – Con questo nome vengono designati quei quadrati magici che riescono ancora tali sostituendo, rispettivamente, a ciascun numero situato nelle loro caselle, lo stesso numero innalzato ad una certa potenza x.

Così ad es. il quadrato magico di modulo 8 qui rappresentato, che ha per costante 260, è ancora magico sostituendo ai suoi numeri i rispettivi quadrati, ed ha allora per costante 11 . 180.

5	31	35	60	57	34	8	30
19	9	53	46	47	56	18	12
16	22	42	39	52	61	27	1
63	37	25	24	3	14	44	50
26	4	64	49	38	43	13	23
41	51	15	2	21	28	62	40
54	48	20	11	10	17	55	45
36	58	6	29	32	7	33	59

Fig. 224.

Il problema non è possibile per il quadrato di modulo 3 con numeri disuguali, come pure per quelli di modulo 4 con sedici numeri consecutivi.

Così, ad es., supponiamo un quadrato formato dei primi 16 numeri consecutivi; si ha in tal caso 34 come costante del quadrato di primo grado e 374 come costante di quello di secondo grado. Il numero $16^2 = 256$ dovrà appartenere almeno a due serie, ma la differenza:

$$374 - 256 = 118$$

non è componibile che in una sola maniera in una somma di tre quadrati differenti due a due, cioè 1, 36 ed 81. Sicchè è impossibile formare un quadrato magico di secondo grado con sedici numeri consecutivi.

Furono costruiti quadrati satanici di 8, 9, 10 e 14 caselle di lato.

II. — Si possono anche formare quadrati *semplicemente* magici ma di una magicità particolare, quadrati cioè non magici ma che lo diventano innalzando per es. a quadrato ciascuno dei loro numeri, come ora vedremo.

$p^2 + q^2 - r^2 - s^2$	$2\,(qr + ps)$	$2\,(qs - pr)$
$2\,(qr - ps)$	$p^2 + r^2 - q^2 - s^2$	$2\,(rs + pq)$
$2\,(qs + pr)$	$2\,(rs - pq)$	$p^2 + s^2 - q^2 - r^2$

Fig. 225.

Il quadrato che si può formare con le espressioni algebriche indicate, assegnando valori qualunque alle diverse lettere, riesce magico *per colonne* e *per righe*, innalzando a quadrato le espressioni stesse, ma *non per diagonali*. La costante è

$$p^2 + q^2 + r^2 + s^2$$

Dando ad es. i valori seguenti, alle lettere:

$$p = 2 \quad q = 6 \quad r = 3 \quad s = 4$$

Le espressioni di cui sopra daranno luogo al quadrato che segue nella fig. 226 dal quale, innalzando ciascun termine a quadrato, si ricava quello magico la cui costante è 4225.

15	52	36
20	- 39	48
60	0	- 25

Fig. 226.

225	2704	1296
400	1521	2304
3600	0	625

Fig. 227.

Quadrati diabolici.

Col nome di quadrati *magicamente magici* o *diabolici* vengono designati quei quadrati nei quali oltre ad avere una somma costante nei 2 $(n+1)$ modi soliti, la si può ottenere in molti altri modi, regolari o *geometrici*, come vedremo meglio con esempii che con lunghe spiegazioni.

Nel quadrato della fig. 228 la costante 34 si può ottenere (per quaterne) in 86 maniere; 70 di queste si trovano ad avere *disposizione geometrica, simmetrica per coppie*, come si rileva dalle unite fig. 229-230 ottenute congiungendo a forma di quadrilatero chiuso i 4 numeri di ciascuna combinazione. Sei sono *semplici*. Le altre 10 sono le solite per colonne, ecc.

15	10	3	6
4	5	16	9
14	11	2	7
1	8	13	12

Fig. 228.

Con regole analoghe a quella di De la Loubère (V. pag. 294) si possono costruire quadrati diabolici d'ordine $6n \pm 1$, con questa restrizione però, che bisogna adottare il movimento di *cavallo* anzichè quello dell'*alfiere* per determinare le caselle che debbono essere occupate dai numeri consecutivi e che, per i quadrati d'ordine superiore al cinque, è necessario stabilire delle regole speciali per passare dalla casella occupata dal numero kn a quella occupata dal $kn+1$.

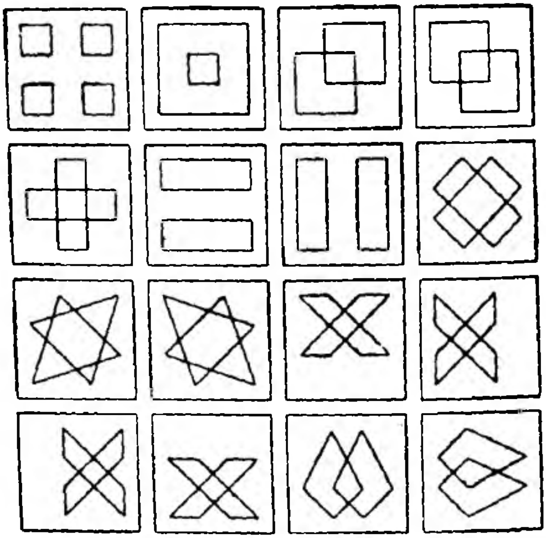


Fig. 229.

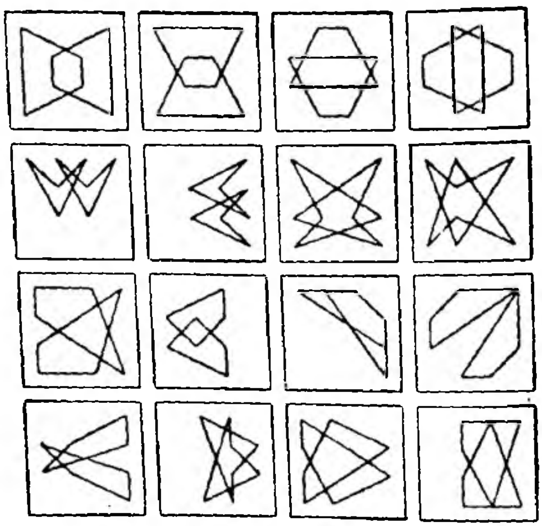


Fig. 230.

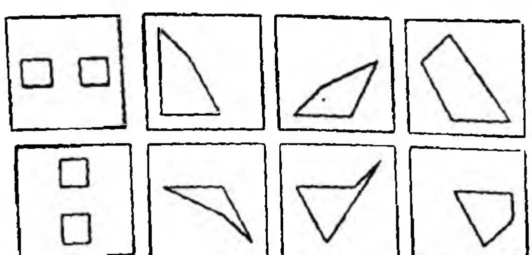


Fig. 231.

La fig. 232 fornisce un esempio di quadrato diabolico di modulo $n = 5$. Non esiste quadrato diabolico per $n = 3$. Con $n = 4$ si hanno 48 quadrati diabolici. Se $\frac{n}{2}$ è un numero naturale dispari non esiste quadrato diabolico di n. Se $\frac{n}{2}$ è un numero naturale dispari, non divisibile per 3, è possibile costruire quadrati diabolici di n.

Metodo dell'Autore. — Operando con questo mio metodo la restrizione di cui sopra non è necessaria essendo esso generale per i quadrati diabolici d'ordine *dispari*.

23	6	19	2	15
4	12	25	8	16
10	18	1	14	22
11	24	7	20	3
17	5	13	21	9

Fig. 232.

6				4
		1		
3				
			5	
	2			

Fig. 233.

Si comincia da una casella qualsiasi, col primo numero; si fa poi verso sinistra un salto di cavallo modificato nel senso di comprendere un rettangolo di 2×4 caselle, anziché di 2×3 come nel salto usuale del gioco di scacchi. Si procede così fino ad aver collocato l'*ennesimo* numero, cioè il 5 in questo esempio. Si colloca allora il numero successivo (6) al *quarto* posto

6	13	20	22	4
17	24	1	8	15
3	10	12	19	21
14	16	23	5	7
25	2	9	11	18

Fig. 234.

4	12	25	8	16
10	18	1	14	22
11	24	7	20	3
17	5	13	21	9
23	6	19	2	15

Fig. 235.

nella *diagonale ascendente di sinistra* come vedesi nella figura 233; si dispongono il 7, 8, 9 e 10 a salto di cavallo come la regola indicata p-- sopra, e l'11 si colloca in diagonale con il 6 e così via. Si ottiene in tal modo il quadrato diabolico della fig. 234.

Partendo dalla stessa casella e seguendo il metodo di Della Loubère modificato nel modo precedentemente accennato si otterrebbe il quadrato della fig. 235. In entrambi si ha la somma costante (65), oltre che per le solite diagonali, righe, colonne e diagonali spezzate, per altre molte combinazioni simmetriche quali le seguenti, fra le tante:

Fig. 234.	Fig. 235.
6 + 13 + 14 + 17 + 5	4 + 12 + 18 + 10 + 21
21 + 1 + 12 + 10 + 18	18 + 1 + 7 + 24 + 15
12 + 19 + 5 + 23 + 6	7 + 20 + 21 + 13 + 4
5 + 7 + 18 + 11 + 24	21 + 9 + 15 + 2 + 18

Stesse figure secondo l'altra diagonale

6 + 4 + 18 + 25 + 12	4 + 16 + 15 + 23 + 7
24 + 8 + 5 + 16 + 12	18 + 14 + 21 + 5 + 7
20 + 21 + 9 + 3 + 12	25 + 3 + 19 + 11 + 7
1 + 19 + 23 + 10 + 12	1 + 20 + 13 + 24 + 7
6 + 13 + 2 + 25 + 19 ecc.	4 + 12 + 6 + 23 + 20 ecc.

Le fig. 236 e 237 rappresentano quadrati diabolici di moduli 7 ed 11 ottenuti col mio metodo sopra esposto.

48	30	19	1	39	28	10
26	8	46	35	17	6	37
4	42	24	13	44	33	15
31	20	2	40	22	11	49
9	47	29	18	7	38	27
36	25	14	45	34	16	5
21	3	41	23	12	43	32

Fig. 236. — Somma costante 175,

94	66	27	120	81	53	14	107	68	40	1
85	46	18	100	72	44	5	98	59	31	113
76	37	9	91	63	24	117	78	50	22	104
56	28	121	82	54	15	108	69	41	2	95
47	19	101	73	34	6	99	60	32	114	86
38	10	92	64	25	118	79	51	12	105	77
29	111	83	55	16	109	70	42	3	96	57
20	102	74	35	7	89	61	33	115	87	48
11	93	65	26	119	80	52	13	106	67	39
112	84	45	17	110	71	43	4	97	58	30
103	75	36	8	90	62	23	116	88	49	21

Fig. 237. — Somma costante 671.

Quadrati cabalistici.

Sono quelli ad un tempo *satanici* e *diabolici*. Si può costruire un quadrato cabalistico con n tale che soddisfi a queste condizioni: Non sia primo; non sia uguale a 4; non sia un numero composto avente per fattore uno o più numeri primi alla prima potenza solamente. Si possono quindi costruire dei quadrati cabalistici con $n = 8$ e con $n = 9$.

Quadrati magici derivati.

I. — Ottenuto, coi metodi indicati, un quadrato magico, se ne possono derivare infiniti altri, sia aumentando ogni suo numero d'una medesima quantità δ cioè costituendolo con una progressione nuova, di ragione $r + \delta$, se r era la ragione della progressione primitiva, sia in altri modi. Così, per esempio.

sia il quadrato magico (fig. 238) formato con la progressione $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 19$; posso formarne uno nuovo aggiungendo al primo numero l'ultimo moltiplicato per un numero qualunque ad esempio per 10, al secondo il penultimo parimente moltiplicato per 10, e così via.

Numeri primitivi:

$$3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 19$$

Numeri nuovi:

$$3 + 190 \qquad 5 + 170 \qquad 7 + 150 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 19 + 30$$

9	19	5
7	11	15
17	3	13

Fig. 238.

139	49	175
157	121	85
67	193	103

Fig. 239.

Ottengo così il quadrato fig. 239 che necessariamente è magico e la cui costante è:

$$3 \times (11 + 110) = 363$$

II. — La serie dei numeri coi quali si può formare un quadrato magico può essere una progressione aritmetica oppure una serie di diverse progressioni aritmetiche, nel seguente modo.

n numeri:

$$a \qquad a + r \qquad a + 2r \qquad a + 3r \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot a + (n-1)r$$

oppure:

$$[a + (n-1)r + m) \qquad [a + (n-1)r - m] + r$$
$$[a + (n-1)r + m] + 2r \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot [a + (n-1)r + m] + (n-1)r$$

e così via. Si può assumere m negativo e di grandezza compatibile coll'ennesimo numero della serie ordinata in quadrato magico per evitare ripetizioni, come ad esempio, nel quadrato (fig. 240) di modulo 3 nel quale $r = 1$ $m = -6$, e che sarebbe derivato dall'altro della fig. 241. Evidentemente il quadrato magico derivato non è altro che quello *diretto* che si sarebbe ottenuto coi numeri 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13 cioè con $r = 1$ ed $m = 2$.

7	5	12
13	8	3
4	11	9

Fig. 240.

14	19	12
13	15	17
18	11	16

Fig. 241.

27	41	45	9	13
3	17	31	35	49
39	43	7	21	25
15	29	33	47	11
51	5	19	23	37

Fig. 242.

Sia, ad esempio, il quadrato magico (fig. 242) nel quale $a = 3$ ed $r = 2$. Nel nuovo quadrato possiamo lasciare tali e quali i primi cinque numeri. I successivi cinque potranno essere ad esempio:

$11 + 4 = 15$ $\quad$ $15 + 2 = 17$ $\quad$ $17 + 2 = 19$

$19 + 2 = 21$ $\quad$ $21 + 2 = 23$

e la terza serie di cinque:

$23 + 4 = 27$ $\quad$ $27 + 2 = 29$ $\quad$ $29 + 2 = 31$

$31 + 2 = 33$ $\quad$ $33 + 2 = 35$

III. — In un quadrato magico, di lato 3, ad esempio, disponiamo ordinatamente al posto dell'1, 2, 3 . . . . . dei numeri:

$$\begin{array}{ccc} a & a+x & a+2x \\ b & b+x & b+2x \\ c & c+x & c+2x \end{array}$$

costituenti cioè tre progressioni aritmetiche di ragione x, i cui primi termini siano a, b, c. Avremo, per colonne, le somme:

b	$c+2x$	$a+x$
$a+2x$	$b+x$	c
$c+x$	a	$b+2x$

Fig. 243.

$$a+b+c+3x$$

per righe:

$$a+b+c+3x$$

prima diagonale:

$$3b+3x$$

seconda diagonale:

$$a+b+c+3x$$

Affinchè il quadrato sia magico dovrà dunque essere soddisfatta questa equazione:

$$a+b+c=3b \qquad \text{ossia} \qquad a+c=2b$$

Esempio. — Facciamo:

$$x=3 \qquad a=1 \qquad b=5$$

dovremo fare:

$$c=2\times 5-1=9$$

5	15	4
7	8	9
12	1	11

Fig. 244.

In modo analogo, si possono formare quadrati di modulo qualsiasi, derivandoli da uno di qualli di cui abbiamo studiato la formazione, scegliendo i primi termini di ciascuna progressione in modo da evitare *ripetizioni* di numeri.

Esempio. — Dal quadrato a cavaliere di modulo 7 indicato nella fig. 245 si può dedurre quello della fig. 246 facendo:

$x = 3$ $a = 1$ $b = 5$ $c = 9$
$d = 25$ $e = 30$ $f = 47$ $g = 32$

48	9	26	36	4	21	31
7	17	34	44	12	22	39
8	25	42	3	20	30	47
16	33	43	11	28	38	6
24	41	1	19	29	46	14
32	49	10	27	37	5	15
40	1	18	35	45	13	23

Fig. 245.

47	8	37	47	10	27	36
19	15	45	35	17	25	56
5	34	65	7	24	33	44
12	42	32	14	43	53	16
31	62	4	21	30	41	23
39	50	11	40	50	13	9
59	1	18	48	38	20	28

Fig. 246.

IV. — Un quadrato magico lo sarà ancora modificandone i numeri coll'aggiungervi accanto lo stesso numero (1) o quello della corrispondente casella di un altro quadrato magico. La fig. 248 dà un esempio del primo caso, e la fig. 251 del secondo.

40	95	18
29	51	73
84	7	62

Fig. 247.

4040	9595	1818
2929	5151	7373
8484	707	6262

Fig. 248.

11	21	7
9	13	17
19	5	15

Fig. 249.

39	74	25
32	46	60
67	18	53

Fig. 250.

50	95	25
41	50	60
86	23	53

Fig. 251.

(1) Anche ripetute volte se si vuole.

Occorre però osservare che le unità del medesimo ordine abbiano a corrispondere; così per es. il 7 non diventerà nel nostro caso 77 ma 707; in altri termini si deve considerare il 7 come 07.

V. — Si è già veduto come si possano formare quadrati magici a *prodotto*; un caso particolare ne sono i quadrati a *potenza*, dei quali le fig. 252-253 forniscono un esempio.

Si avrà un quadrato magico di questo genere ogni qualvolta

3^4	3^9	3^2
3^3	3^5	3^7
3^8	3	3^6

Fig. 252.

81	25683	9
27	243	2187
8561	3	729

Fig. 253.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Fig. 254.

7^{10}	7^{21}	7^5
7^7	7^{12}	7^{17}
7^{19}	7^3	7^{14}

Fig. 255.

gli *esponenti* siano tali da costituire un quadrato magico; infatti nel nostro caso essi formano quello fondamentale. Sicchè sarebbe magico, ad esempio, il quadrato della fig. 255 poichè in ogni riga, colonna o diagonale si avrebbe come *prodotto* 7^{36}, ossia $7^{12 \times 3}$.

VI. — *Quadrati nei quali la costante è uguale ad un millesimo determinato.* — Questi quadrati si formano partendo da un quadrato magico del medesimo modulo e aggiungendo a ciascun numero di esso un numero che si determina col calcolo, a seconda del millesimo scelto. Consideriamo un millesimo divisibile per 3 ad es., e sia 1896; dividendolo per 3 si ha per quoziente 632; questo è il numero che dovrà occupare il centro del quadrato e, naturalmente, deducendone 4 si avrà il primo numero della serie cioè 628 (Fig. 256).

Si può anche dedurre dal millesimo la costante 15 del quadrato di modulo 3, 1896 — — 15 = 1881; dividere il resto per 3, ossia $\frac{1881}{3} = 627$ e questo sarà il numero da aggiungere a tutti i numeri del quadrato di modulo 3 fondamentale.

631	636	629
630	632	634
635	628	633

Fig. 256.

Se il millesimo è pari, ma non divisibile per 4, si comincia col sottrarre da esso la costante 34 del quadrato di modulo 4, poi si divide il resto per 4 e si ha il numero fisso da aggiungere a ciascun termine del quadrato magico di modulo 4, il quale dovrà quindi cominciare, per esempio, nel caso del millesimo 1862, con 458 e terminare con 473.

470	484	483	473
481	475	476	478
477	479	480	474
482	472	471	485

Fig. 257.

Nel caso del millesimo 1910 si avrà dunque:

$$\frac{1910 - 34}{4} = 469$$

Diagrammi geometrici dei quadrati magici.

Se in un quadrato magico si riuniscono con rette i numeri successivi per ordine di grandezza, si ottiene una linea poligonale avente per estremi il numero più basso o il più alto, che è caratteristica del quadrato stesso. Molte volte tali linee sono di disegno elegante e potrebbero servire come aiuto mnemonico per ricordare la formazione del quadrato. La linea poligonale, *unica* nel caso di $n = 3$, è rappresentata nella figura 258. È assai semplice e quindi facile a ritenere, e può essere di giovamento per la costruzione rapida di quadrati

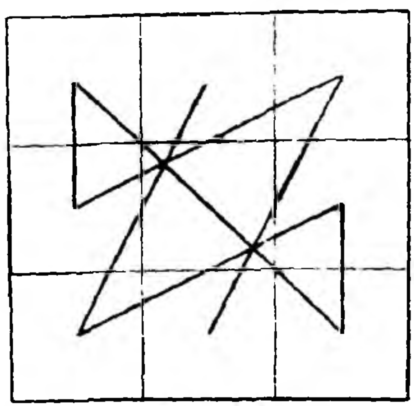


Fig. 258.

di modulo 3 a numeri elevati, come pure per quella di quadrati composti (V. pag. 290-291). Le fig. 259-260-261-262 corrispondenti

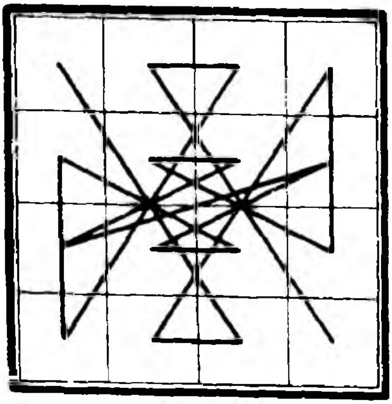


Fig. 259.

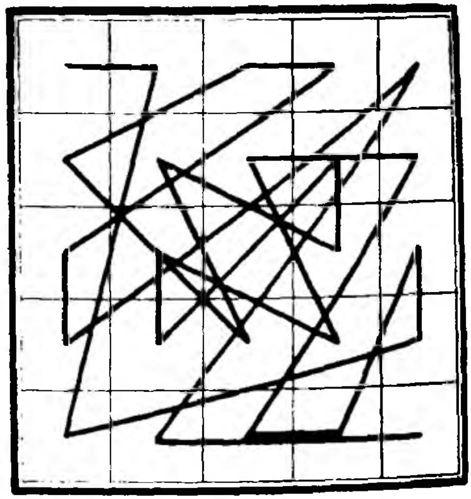


Fig. 260.

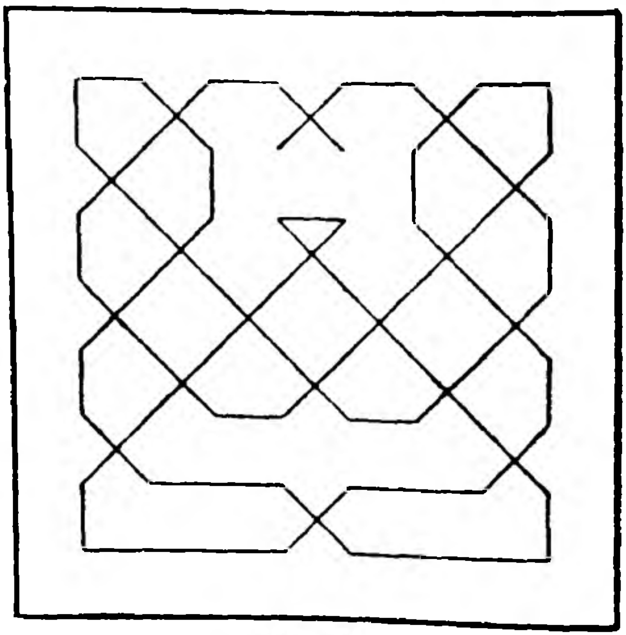


Fig. 261.

rispettivamente ai quadrati delle fig. 263-264-265-266, forniscono esempi delle linee poligonali accennate. Il quadrato della fig. 264 è a cintura.

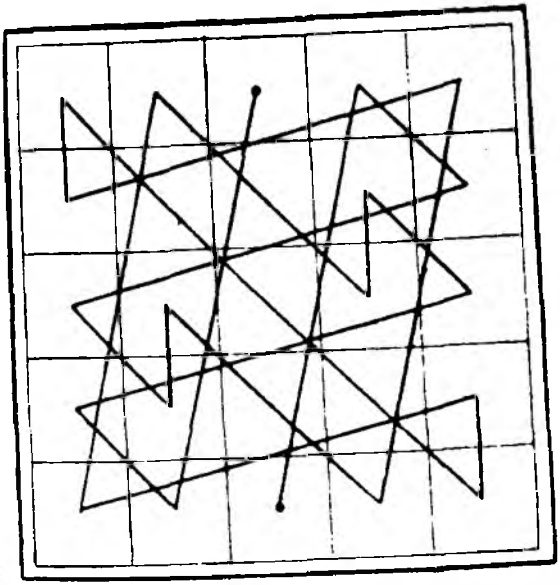


Fig. 262.

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Fig. 263.

1	2	19	20	23
18	16	9	14	8
21	11	13	15	5
22	12	17	10	4
3	24	7	6	25

Fig. 264.

14	15	62	63	2	3	50	51
13	61	16	1	64	49	4	52
60	12	17	32	33	48	53	5
59	18	11	34	31	54	47	6
19	58	35	10	55	30	7	46
20	36	57	56	9	8	29	45
37	21	22	23	42	43	44	28
38	39	40	41	24	25	26	27

Fig. 265.

15	8	1	24	17
16	14	7	5	23
22	20	13	6	4
3	21	19	12	10
9	2	18	18	11

Fig. 266.

POLIGONI MAGICI

Rettangoli.

Si possono costruire rettangoli magici, nei quali cioè le *colonne* danno una somma magica e le *righe* una somma pure magica, in generale diversa dalla prima. Queste due somme non possono essere stabilite comunque per un dato rettangolo. Così, ad es., in un rettangolo di $5 \times 3 = 15$ caselle la somma totale dei termini (serie dei numeri naturali a cominciare dall' 1) è data da:

$$\frac{15 \times 16}{2} = 15 \times 8$$

quindi la somma magica d'una riga dovrà essere $\frac{1}{3}$ di tale numero ossia $5 \times 8 = 40$, e la somma magica d'una colonna $\frac{1}{5}$ ossia $3 \times 8 = 24$.

Perchè un rettangolo possa essere magico occorre che entrambi i suoi lati siano dispari o pari.

Vogliasi costruire il rettangolo magico 2×4; si scrivono i suoi termini in due file in modo da avere le somme per colonne uguali a 9:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{matrix}$$

La somma per righe dovendo essere 18, basterà cercare 4 elementi (uno per ciascuna colonna) la cui somma valga 18; tali elementi costituiranno una riga e gli altri quattro *corrispondenti*, l'altra riga, come si vede nella fig. 267.

1	7	6	4
8	2	3	5

Fig. 267.

In modo analogo si procederebbe per costruire il rettangolo dispari di 3×5 (fig. 268).

1	13	10	4	12
15	9	3	6	7
8	2	11	14	5

Fig. 268.

Ecco ora un esempio di rettangolo magico di 4×8; le somme per colonne danno la costante 66 e per righe 132.

17	15	14	5	4	22	23	32
8	26	6	13	21	3	31	24
25	7	27	20	12	30	2	9
16	18	19	28	29	11	10	1

Fig. 269.

Triangolo.

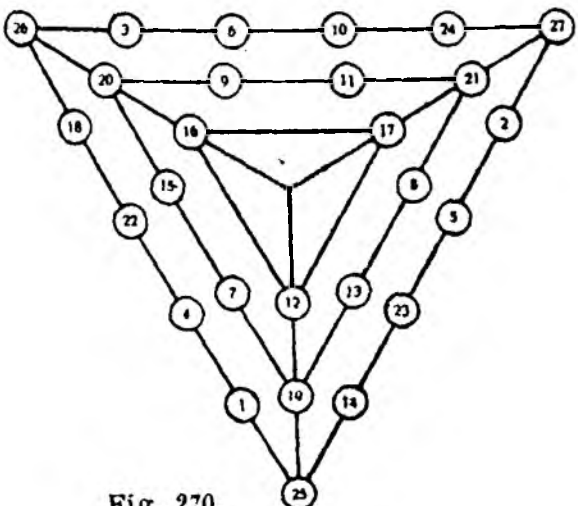


Fig. 270.

Nella fig. 270, composta di triangoli equilateri concentrici, i numeri dall'1 al 27 sono disposti in modo da avere la costante 96 come somma dei sei situati su ciascun lato esterno; e la costante 61 per i tre lati del secondo triangolo a quattro numeri ciascuno.

Nel triangolo della fig. 271 si hanno le somme costanti seguenti:

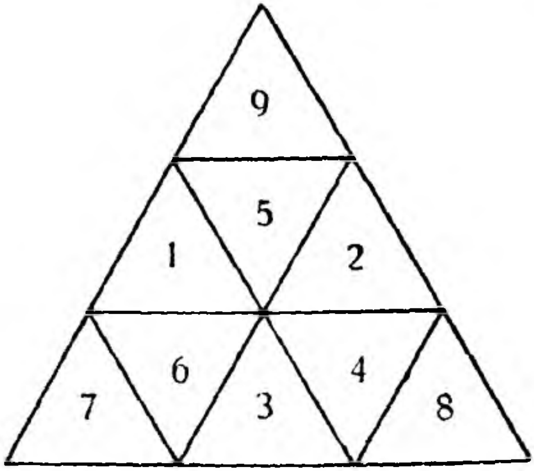


Fig. 271.

$7 + 6 + 1 + 5 + 9 = 28$
$9 + 5 + 2 + 4 + 8 = 28$
$8 + 4 + 3 + 6 + 7 = 28$

$7 + 3 + 6 + 1 = 17$
$8 + 4 + 3 + 2 = 17$
$9 + 1 + 5 + 2 = 17$

Nella fig. 272 le somme costanti sono:

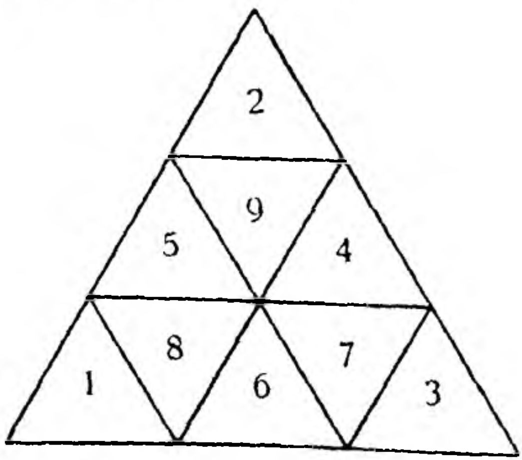


Fig. 272.

$1 + 8 + 5 + 9 + 2 = 25$
$2 + 9 + 4 + 7 + 3 = 25$
$3 + 7 + 6 + 8 + 1 = 25$

$1 + 8 + 6 + 5 = 20$
$3 + 6 + 7 + 4 = 20$
$2 + 5 + 9 + 4 = 20$

La proprietà del triangolo magico fig. 273 consiste nelle seguenti somme magiche:

$4 + 8 + 16 + 3 = 31$ $\quad$ $15 + 1 + 16 + 3 + 10 = 45$

$2 + 16 + 7 + 6 = 31$ $\quad$ $11 + 2 + 16 + 3 + 13 = 45$

$1 + 16 + 9 + 5 = 31$ $\quad$ $12 + 1 + 16 + 2 + 14 = 45$

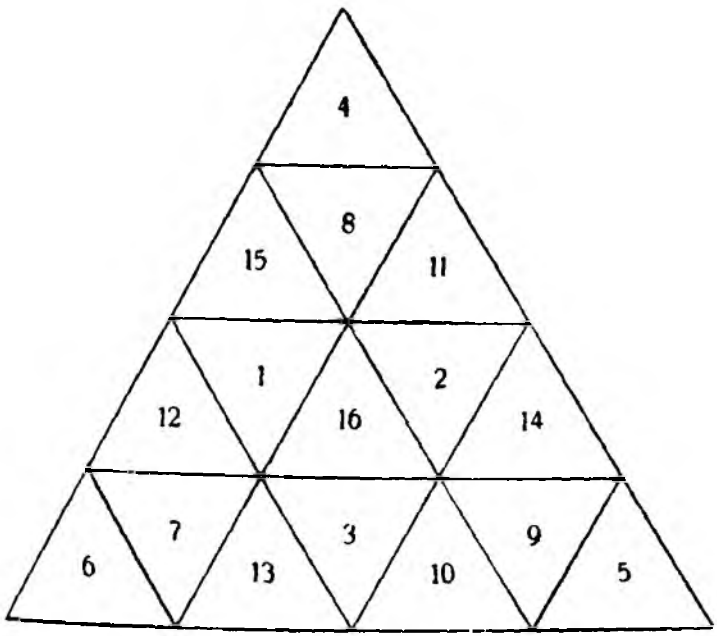


Fig. 273.

$4 + 15 + 8 + 11 = 38$

$6 + 7 + 12 + 13 = 38$

$5 + 9 + 10 + 14 = 38$

$4 + 8 + 15 + 1 + 12 + 7 + 6 = 53$

$4 + 8 + 11 + 2 + 14 + 9 + 5 = 53$

$5 + 9 + 10 + 3 + 13 + 7 + 6 = 53$

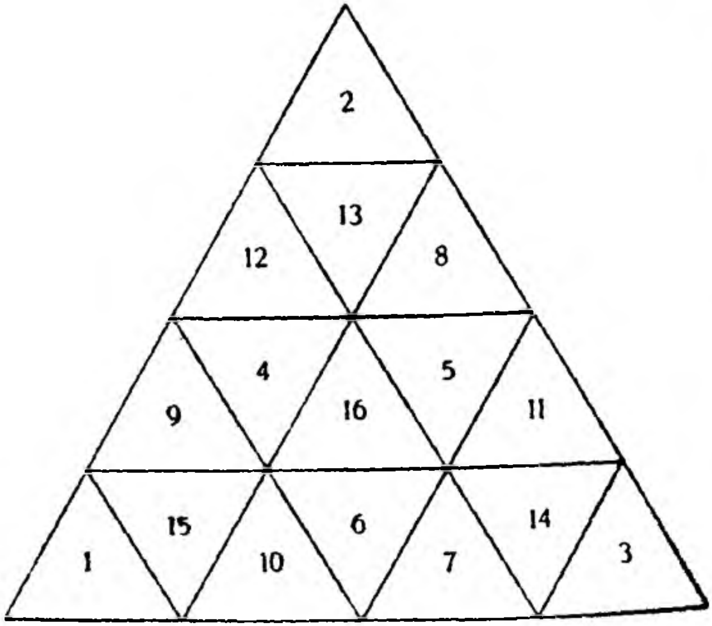


Fig. 274.

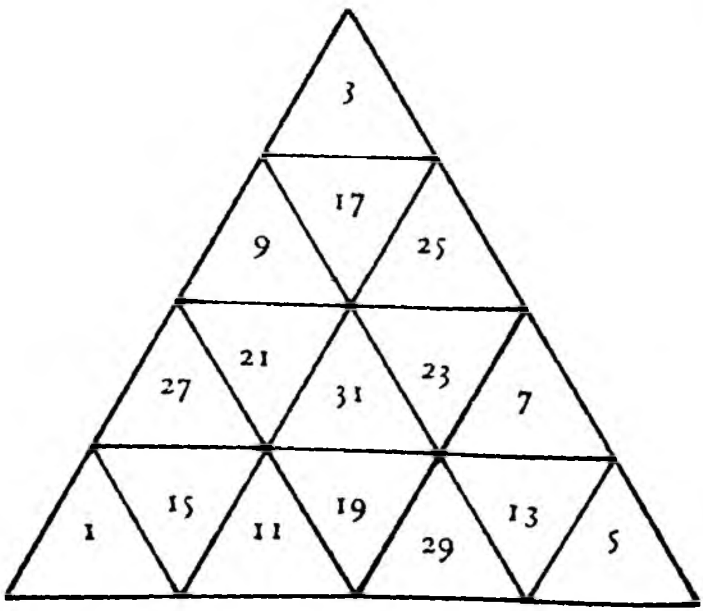


Fig. 275.

Nel triangolo della fig. 274 i gruppi del genere di quelli, indicati nella fig. 273 danno pure somme magiche, in gran parte però diverse dalle precedenti, cioè:

37	in luogo di		31
35	»	»	38
56	»	»	53

La fig. 276 offre un altro esempio di questi triangoli.

Nel triangolo di lato 3, invece delle quattro somme magiche se ne hanno soltanto due, al massimo, come negli esempii delle figg. 276-277-278.

$2 + 7 + 6 + 5 = 20$

$1 + 9 + 4 + 6 = 20$

$3 + 8 + 4 + 5 = 20$

$1 + 9 + 6 + 7 + 2 = 25$

$1 + 9 + 4 + 8 + 3 = 25$

$2 + 7 + 5 + 8 + 3 = 25$

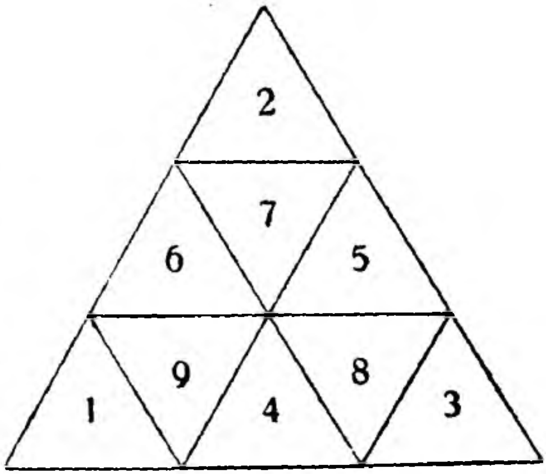


Fig. 276.

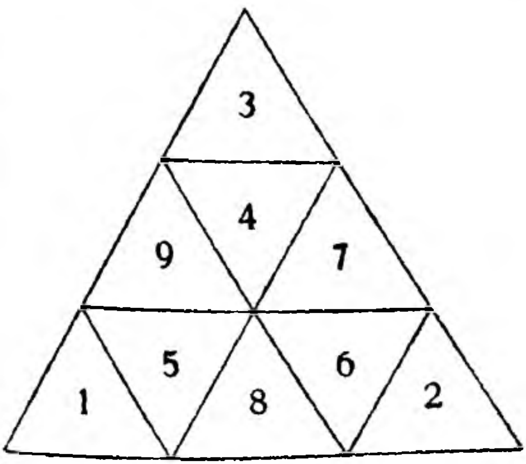


Fig. 277.

$1 + 9 + 5 + 8 = 23$

$3 + 9 + 4 + 7 = 23$

$2 + 7 + 6 + 8 = 23$

$1 + 5 + 9 + 4 + 3 = 22$

$1 + 5 + 8 + 6 + 2 = 22$

$2 + 6 + 7 + 4 + 3 = 22$

$7 + 5 + 2 + 6 = 20$ $\qquad$ $7 + 2 + 5 + 3 + 8 = 25$

$8 + 5 + 3 + 4 = 20$ $\qquad$ $7 + 2 + 6 + 1 + 9 = 25$

$9 + 4 + 1 + 6 = 20$ $\qquad$ $8 + 3 + 4 + 1 + 9 = 25$

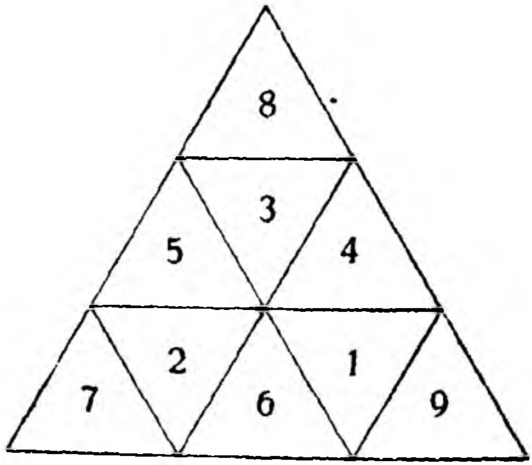


Fig. 278.

Triangoli a perimetro magico.

Sui vertici e sui lati d'un triangolo disporre i primi nove numeri interi in modo che la somma dei quadrati dei 4 numeri disposti sopra un lato sia costante, qualunque sia il lato considerato.

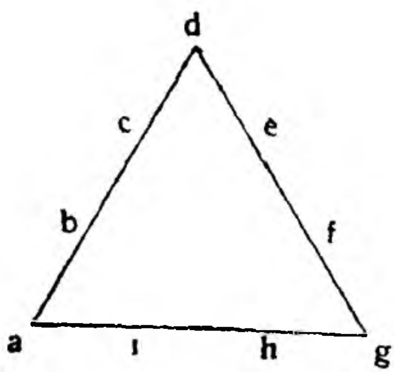


Fig. 279.

Si ha per ipotesi:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \xi \qquad d^2 + e^2 + f^2 + g^2 = \xi$$
$$g^2 + h^2 + i^2 + a^2 = \xi$$

Addizionando:

$$a^2 + d^2 + g^2 + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2 + i^2) = 3\xi$$

La quantità in parentesi è espressa da:

$$\frac{9\,(9+1)\,(2 \times 9 + 1)}{6} = 285$$

per cui:

$$a^2 + d^2 + g^2 = 3\,(\xi - 95)$$

Risulta da ciò che la somma dei quadrati dei tre numeri posti ai vertici del triangolo deve essere divisibile per 3, e per conseguenza questi quadrati sono della forma:

Mult. di 3 o Mult. di 3 + 1

Le sole ipotesi che si possono fare sui numeri a, d, g sono dunque:

$$a = 3 \qquad d = 6 \qquad g = 9$$

oppure:

$$a = 1 \qquad d = 4 \qquad g = 7$$

o infine:

$$a = 2 \qquad d = 5 \qquad g = 8$$

La prima non è ammissibile poichè se ne deduce:

$$a^2 + d^2 + g^2 = 126 = 3\,(\xi - 95) \qquad \text{da cui} \qquad \xi = 137$$

La (1) diviene allora:

$$b^2 + c^2 = \xi - (a^2 + d^2) = 92$$

da cui:

$$(b + c)^2 = 92 - 2\,bc = \text{Mult. di } 4$$

La somma $b + c$ essendo pari, b e c sarebbero della stessa parità; ora combinando in tutti i modi possibili i numeri pari 2, 4, 8, o i dispari 1, 5, 7, non si può ottenere come somma dei quadrati di due qualunque tra essi il numero 92.

Così pure è da scartare la seconda ipotesi perchè essa dà:

$$a^2 + d^2 + g^2 = 66 = 3\,(\xi - 95) \qquad \text{da cui} \qquad \xi = 117$$

La (l) diviene allora:

$$b^2 + c^2 = \xi - (a^2 + d^2) = 120$$

da cui:

$$(b + c)^2 = \text{Mult. di } 4$$

Sicchè b e c sono della stessa parità; ma la somma dei quadrati di due qualunque dei numeri interi 3, 5, 9 non può essere 120 e lo stesso vale per la somma dei quadrati di due qualunque dei numeri pari 2, 6 od 8. Restano dunque i valori

$$a = 2 \qquad d = 5 \qquad g = 8$$

Se ne deduce:

$$3\,(\xi - 95) = 93 \qquad \xi = 126$$

Per conseguenza:

$$b^2 + c^2 = 97 \qquad e^2 + f^2 = 37 \qquad h^2 + i^2 = 58$$

I 6 numeri rimanenti 1, 3, 4, 6, 7 e 9 sono tutti della forma

$$\text{Mult. di } 3 \quad \text{o} \quad \text{Mult. di } 3 + 1$$

e i loro quadrati sono quindi della forma medesima, e siccome ξ è divisibile per 3 ne segue (poichè $a^2 = 4$ e $d^2 = 25$) che uno dei quadrati b^2, c^2 è della forma Mult. di 3 + 1 e l'altro della forma Mult. di 3.

La stessa osservazione è applicabile ai quadrati e^2, f^2 ed h^2, i^2.

Inoltre la somma $b^2 + c^2$ essendo dispari, uno di tali numeri è pari e l'altro dispari. Non si può dunque avere che:

$$b = 1 \text{ oppure } 7 \qquad 3 \text{ oppure } 9 \qquad 4 \text{ oppure } 6$$

con:

$$c = 6 \text{ oppure } 4 \qquad 3 \text{ oppure } 9 \qquad 7 \text{ oppure } 1$$

e l'esame di queste varie ipotesi dimostra che si ha $b = 9$ con $c = 4$ oppure $b = 4$ con $c = 9$.

Le stesse prove fatte per e^2, f^2 con i numeri rimanenti 1, 3, 6 e 7 ci danno:

$$e = 1 \quad \text{con} \quad f = 6 \quad \text{od} \quad e = 6 \quad \text{con} \quad f = 1$$

Infine:

$$i = 3 \quad \text{con} \quad h = 7 \quad \text{od} \quad i = 7 \quad \text{con} \quad h = 3$$

Ecco dunque in figura la soluzione del problema.

Si può osservare che si ha in pari tempo:

$$a + b + c + d = 20$$

$$d + e + f + g = 20$$

$$g + h + i + a = 20$$

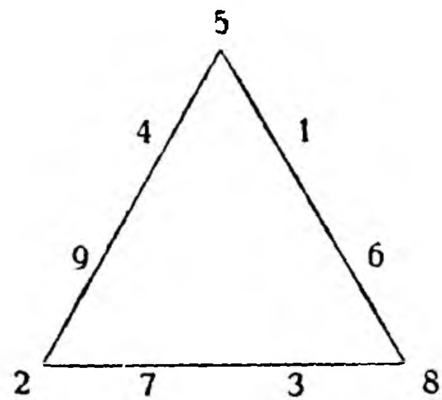


Fig. 280.

Pentagono.

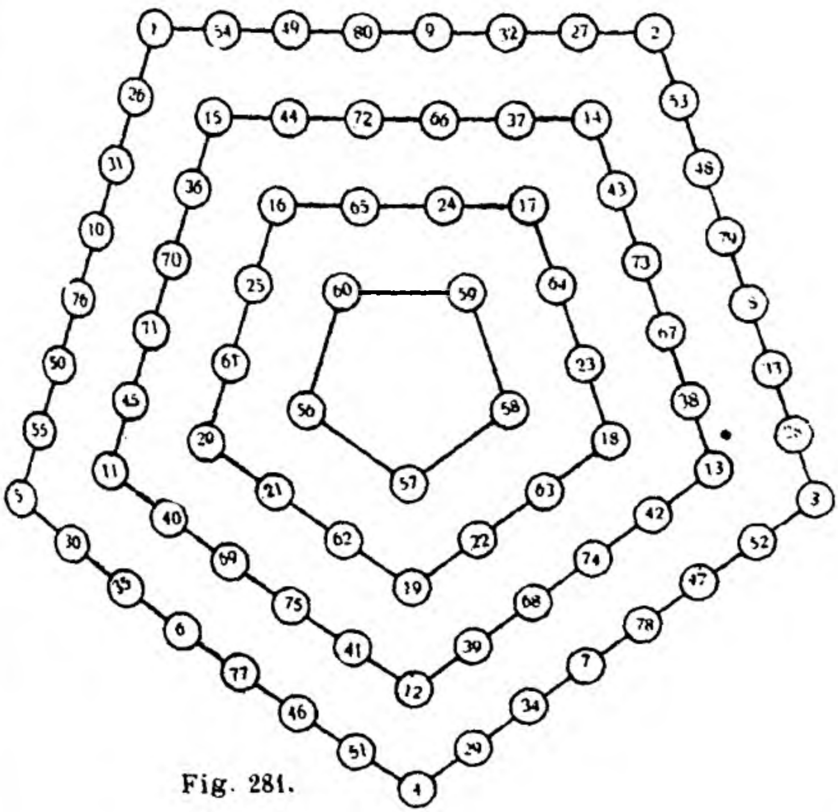


Fig. 281.

Nei pentagoni concentrici della fig. 281 i numeri dall'1 all'80 sono collegati in modo da avere per ciascun lato la somma costante 254, 248 e 122 rispettivamente nel 1° 2° e 3° pentagono a partire dell'esterno; inoltre le somme dei numeri che occupano i vertici dei *quattro* pentagoni sono uguali a 92.

Esagono.

Negli esagoni della fig. 282 abbiamo i numeri dall'1 al 73 disposti in modo che ciascun lato ne contenga rispettivamente 7, 5 e 3 e tali che:

1.° Nell'esagono esterno la somma di 7 numeri di ciascun lato è 259, nel medio 185 e nel centrale 111.

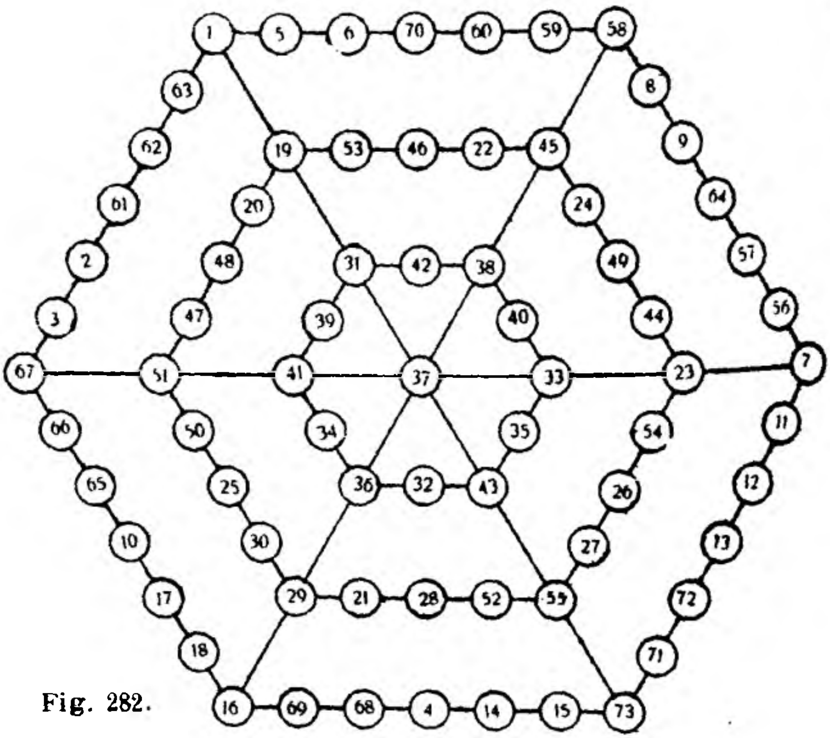


Fig. 282.

2.° In ciascuno dei tre esagoni la somma dei numeri occupanti i vertici è uguale a 222, come pure quella dei punti medii di ciascun lato.

3.° Le diagonali dell'esagono hanno per costante 259 come i lati dell'esagono esterno.

4.° Le congiungenti i punti medii dei lati opposti hanno pure per costante 259.

Stelle magiche.

I. — Nella stella esagonale della fig. 283 abbiamo queste somme costanti:

$$10 + 2 + 12 + 3 + 11 + 1 = 39$$
$$5 + 9 + 4 + 7 + 6 + 8 = 39$$

$$10 + 5 + 8 + 6 + 11 = 40 \qquad 2 + 9 + 5 + 8 + 1 = 25$$
$$10 + 5 + 9 + 4 + 12 = 40 \qquad 2 + 9 + 4 + 7 + 3 = 25$$
$$11 + 6 + 7 + 4 + 12 = 40 \qquad 3 + 7 + 6 + 8 + 1 = 25$$

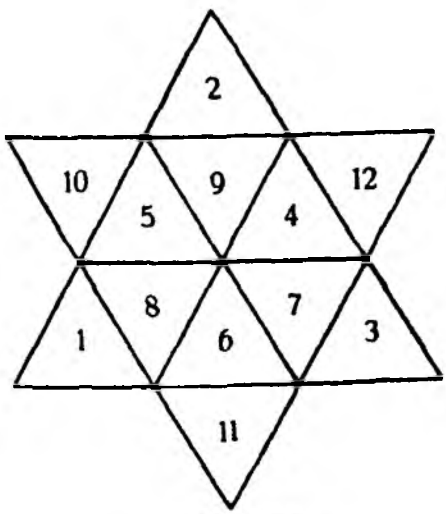


Fig. 283.

II. — La fig. 284 rappresenta una stella di cinque punte numerate coi numeri progressivi dall'1 al 15 in modo da avere le seguenti somme costanti:

$$8 + 6 + 9 + 14 = 37$$
$$9 + 7 + 10 + 11 = 37$$
$$10 + 8 + 6 + 13 = 37$$
$$6 + 9 + 7 + 15 = 37$$
$$7 + 10 + 8 + 12 = 37$$

$1 + 2 + 4 + 15 = 22$

$2 + 3 + 5 + 12 = 22$

$3 + 4 + 1 + 14 = 22$

$4 + 5 + 2 + 11 = 22$

$5 + 1 + 3 + 13 = 22$

$1 + 8 + 5 + 13 = 27$

$5 + 7 + 4 + 11 = 27$

$4 + 6 + 3 + 14 = 27$

$3 + 10 + 2 + 12 = 27$

$2 + 9 + 1 + 15 = 27$

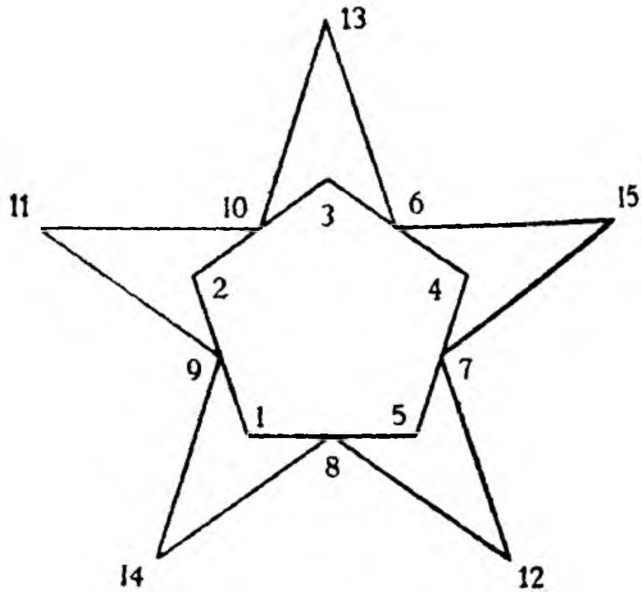


Fig. 284.

$11 + 10 + 13 = 34$

$13 + 6 + 15 = 34$

$15 + 7 + 12 = 34$

$12 + 8 + 14 = 34$

$14 + 9 + 11 = 34$

$10 + 13 + 6 + 3 = 32$

$6 + 15 + 7 + 4 = 32$

$7 + 12 + 8 + 5 = 32$

$8 + 14 + 9 + 1 = 32$

$9 + 11 + 10 + 2 = 32$

POLIEDRI MAGICI

Ottaedro magico.

Collocare in ciascuno spigolo d'un ottaedro e nel punto medio d'ogni sua costola dei numeri tali da avere somma costante per ogni serie corrispondente ad una costola.

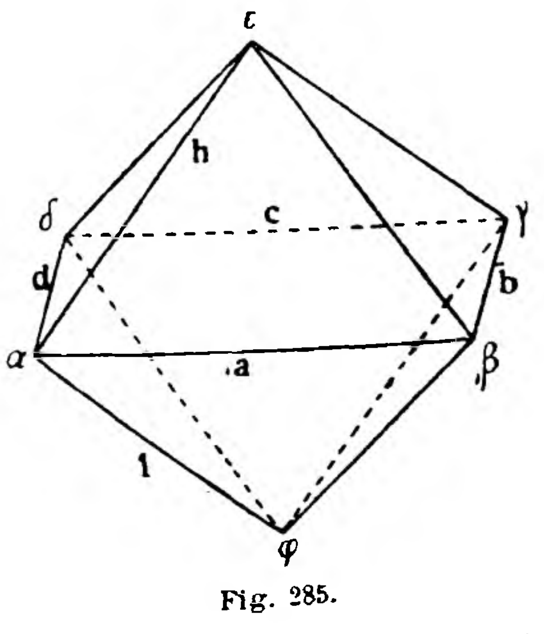


Fig. 285.

Sia ψ la somma costante. Essendo 12 le costole dovrà avere $12\psi = 4S + C$ in cui S è la somma dei numeri agli spigoli, che figurano quattro volte nelle somme, e C la somma dei numeri ai punti medî delle costole, che vengono computati una volta sola.

Il problema non è possibile coi primi 18 numeri, ossia in generale. con 18 numeri in progressione aritmetica. Infatti dovremo avere:

$$\alpha + a + \beta = \psi \qquad \alpha + d + \delta = \psi \qquad \text{ecc.}$$

Affinchè non si abbiano numeri ripetuti occorrerà che le somme $\alpha + \beta$, $\alpha + \delta$, ecc., non siano mai uguali fra loro. Ora si ha:

$$\psi = \frac{4\,S + C}{12} \qquad \text{ossia} \qquad \psi = \frac{3\,S + M}{12}$$

essendo M la somma dei 18 numeri del problema. Coi primi 18 numeri naturali tale somma è 171, e dalla formola di ψ si deduce che i valori di S non potranno essere che quelli della progressione aritmetica di ragione 4, dal 23 al 91.

Affinchè le somme suddette siano diverse tra loro, dovranno essere diverse tra loro le differenze tra $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon\ \varphi$ ossia le *sestine* non potranno avere che una di queste forme:

$$1 - 2 - 4 - 7 - 11 - 16 \qquad 2 - 4 - 7 - 8 - 12 - 17 \qquad \text{ecc.}$$

Ma la somma S deve avere uno dei valori suespressi; dunque, come *minimo*, potremo avere 1, 2, 4, 7, 11, 18. Ora fra le 15 combinazioni binarie di tali sei elementi, solamente tre, cioè $\alpha\ \gamma$, $\beta\ \delta$, $\varepsilon\ \varphi$ non sono utilizzabili; abbiamo $S = 43$ da cui $\psi = 25$; dunque bisogna escludere $7 + 18$; $11 + 18$; ma il 18 non possiamo computarlo che una volta perchè le tre combinazioni da escludere devono comprendere tutti i sei elementi di S. Se ne deduce quindi l'impossibilità di risolvere il problema con i primi 18 numeri naturali.

Cubi magici.

Consideriamo un cubo di *modulo* n. Potremo immaginarlo composto di n^3 piccoli cubi elementari disposti in n strati di n^2 cubetti ciascuno. Quando in ognuno di tali cubetti sia iscritto un numero tale da avere, per ciascuna *colonna* corrispondente ad una delle caselle del quadrato *base* del cubo, una somma costante, come pure per ciascuna *riga* di cubetti in senso orizzontale, nonchè per quelli formanti le diagonali del cubo dato, il cubo stesso sarà magico.

Per $n = 3$ non è possibile una disposizione di numeri di tal sorta.

Per $n = 4$ si hanno 64 cubetti elementari. Le figure seguenti rappresentano la disposizione che debbono avere i numeri nei quattro strati di cubetti costituenti il cubo principale. Ciascuno di tali 4 quadrati è magico per colonne e per righe ma non per diagonali. La magicità si ha per le diagonali del cubo che sono:

13 - 39 - 26 - 52

1 - 43 - 22 - 64

49 - 27 - 38 - 16

61 - 23 - 42 - 4

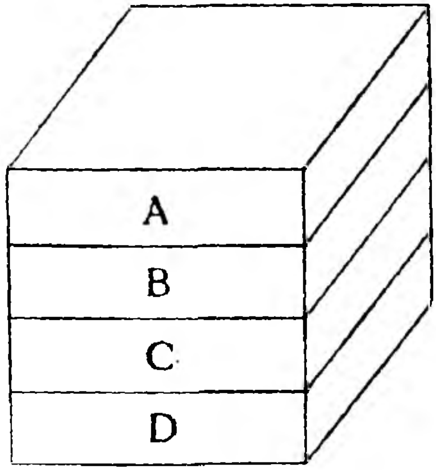


Fig. 286.

Cosicchè la costante 130 si ottiene in 52 maniere diverse.

In un cubo di $5^3 = 125$ cubetti si possono disporre i primi 125 numeri naturali in modo da ottenere 79 volte la somma costante 315, cioè 75 volte con righe o colonne e 4 volte per le 4 diagonali del cubo.

1	48	32	49
60	21	37	12
56	25	41	8
13	36	20	61

Fig. 287. - Strato *A*.

63	18	34	15
6	43	27	54
10	39	23	58
51	30	46	3

Fig. 288. - Strato *B*.

62	19	35	14
7	42	26	55
11	38	22	59
50	31	57	2

Fig. 289. - Strato *C*.

4	45	29	52
57	24	40	9
53	28	44	5
16	33	17	64

Fig. 290. - Strato *D*.

Si è veduto come si possano costruire dei quadrati magici di modulo dispari con due quadrati magici ausiliarii; parimente si possono ottenere cubi magici di modulo dispari, per mezzo

121	27	83	14	70
10	61	117	48	79
44	100	1	57	113
53	109	40	91	22
87	18	74	105	31

Fig. 291. - Sezione superiore.

2	58	114	45	96
36	92	23	54	110
75	101	32	88	19
84	15	66	122	28
118	49	80	6	62

Fig. 292. - 2ª Sezione.

33	89	20	71	102
67	123	29	85	11
76	7	63	119	50
115	41	97	3	59
24	55	106	37	93

Fig. 293.
3ª Sezione (mediana).

64	120	46	77	8
98	4	60	111	42
107	38	94	25	51
16	72	103	34	90
30	81	12	68	124

Fig. 294. - 4ª Sezione.

95	21	52	108	39
104	35	86	17	73
13	69	125	26	82
47	78	9	65	116
56	112	43	99	5

Fig. 295. - 5ª Sezione.

di tre cubi ausiliarii. Così il cubo magico di modulo 5 si ottiene collocando il numero medio fra 1 e 125 che è il 63, nel mezzo della *sezione* mediana; si hanno così le 30 diagonali delle sezioni verticali e orizzontali (fig. 291 a 295).

GEOMETRIA

DI ALCUNE CURVE NOTEVÓLI

Cubiche.

Cubiche semplici. — Le cubiche che possono essere rappresentate con la più semplice equazione (un'equazione binomia) non sono che tre ed hanno per equazioni:

$$x^3 = ay^2 \qquad x^3 = a^2 y \qquad xy^2 = a^3$$

Cubica semplice, parabolica. — Questa curva detta pure *parabola cubica di Neil* o *semi-cubica* è la curva *isocrona* cioè quella seguendo la quale un corpo cadente percorre spazi uguali in tempi uguali. È anche la sviluppata della parabola. È pura la *traiettoria ortogonale* delle posizioni successive di una parabola che si muova perpendicolarmente al proprio asse, ossia è quella curva che sega tale famiglia di parabole, ad angolo retto.

È costituita da due rami parabolici ed ha, all'origine, una cuspide. Si può costruirla nel seguente modo (v. fig. 296).

Sia un angolo retto xOy ed una retta K parallela ad Oy. Conduciamo per O una retta qualunque che segherà la K in D; da questo punto conduciamo la parallela ad Ox e da O la perpendicolare ad essa che la segherà in E; la parallela ad Oy condotta per E determina sulla OD un punto M il cui luogo è la parabola cubica.

Quanto alla tangente in un punto M si può ottenerla unendo con M un punto P dell'asse Oy tale che:

$$OP = \frac{ON}{2}$$

In generale per una curva la cui equazione è della forma:

$$x^m = A y^n$$

l'equazione della tangente nel punto (x, y) è:

$$m \frac{X}{x} - n \frac{Y}{y} = m - n$$

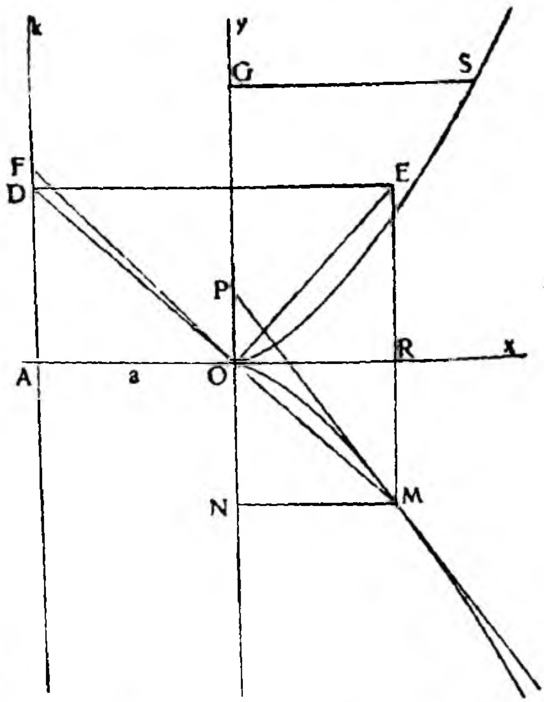


Fig. 296.

Cubica semplice parabolica a centro. — La parabola cubica combinata con la retta (V. pag. 247), col circolo, o con la parabola fornisce la soluzione grafica delle equazioni di 3°, 4° e 5° grado. Combinandola con la curva:

$$y^3 = 1 - x$$

che le è identica si ha la soluzione dell'equazione:

$$x^9 = 1 - x$$

Nota. — Questa curva serve a raccordare nelle rotaie delle strade ferrate, archi di circolo con rette permettendo il passaggio graduale dalla curvatura costante dei primi a quella nulla delle seconde.

Questa curva si può considerare come una trasformata dell'iperbola equilatera riferita ai suoi assintoti (fig. 297) nel modo seguente. Costruiamo il triangolo rettangolo $A\,O\,M$ che ha

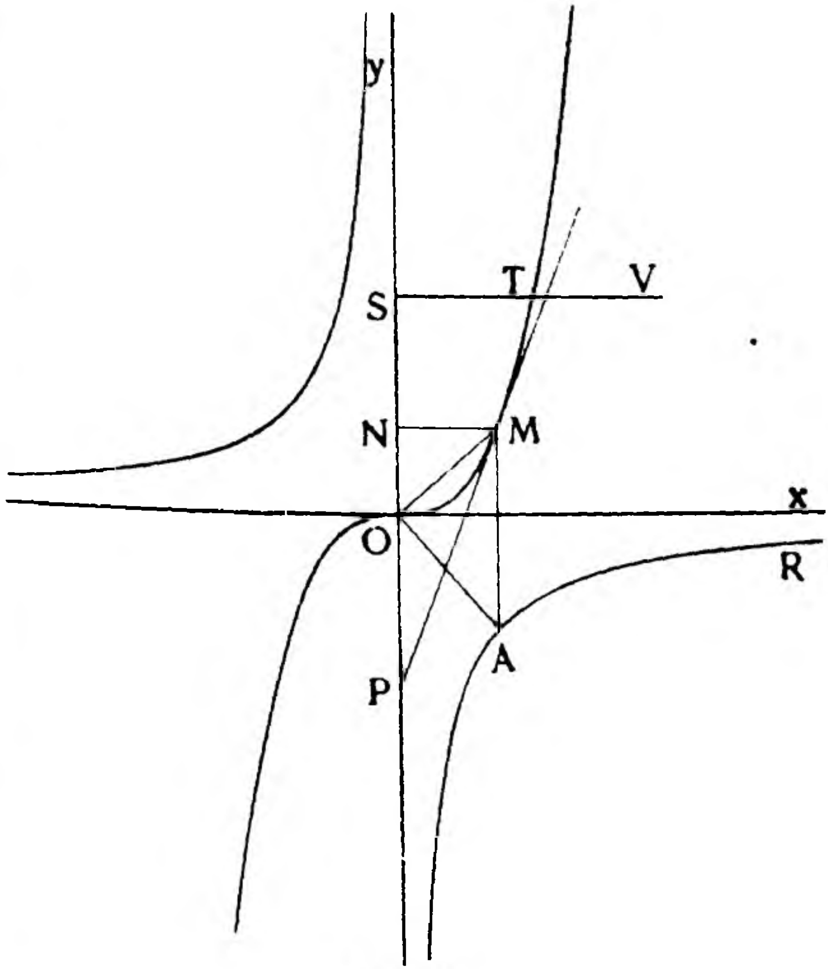


Fig. 297.

l'angolo retto in O, un vertice sull'iperbola (ramo R) e l'ipotenusa parallela all'asse Oy; la cubica sarà il luogo dell'altro vertice M. Essendo:

$$xy - a^2 = o$$

l'equazione dell'iperbola, quella della cubica sulla trasformata sarà:

$$X^3 = a^2\, Y$$

Siccome si sa costrurre l'iperbola equilatera con riga e squadra, si potrà costruire pure in tal guisa la cubica.

La tangente in M si avrà facendo $OP = 2\ ON$ e conducendo la PM, come risulta dall'equazione (*) del § precedente.

Cubica semplice iperbolica. — Dato un angolo retto xOy ed una retta k parallela ad Oy conduciamo per O una retta qua-

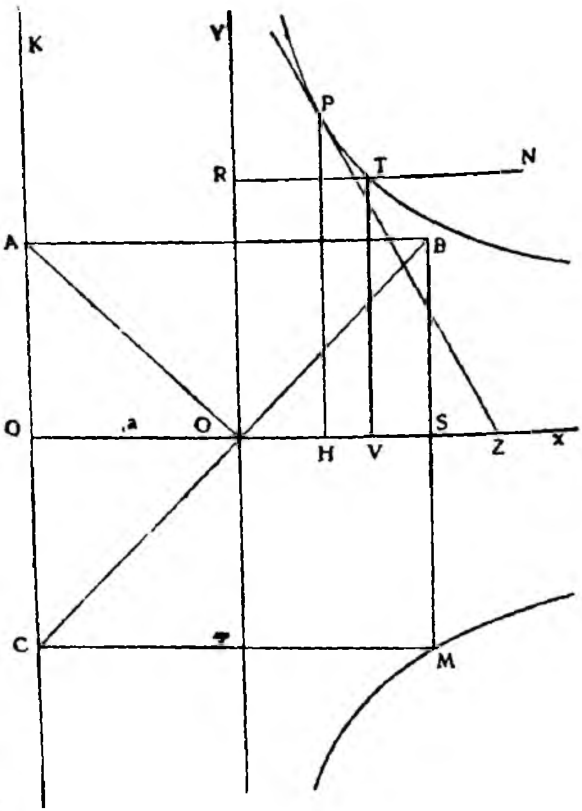


Fig. 298.

lunque; dal punto A in cui sega la k, la parallela ad Ox; da O la perpendicolare ad OA che sega in B e C tale parallela e la k; le parallele agli assi Ox, Oy condotte per C e B rispettivamente, si segano in M il cui luogo è la cubica cercata.

La sua equazione essendo $x y^2 = a^3$ quella della tangente è:

$$\frac{X}{x} + 2\frac{X}{y} = 3$$

Perciò basterà fare $OZ = 3\,OH$ e unire Z con P; sarà ZP la tangente in P.

Cubiche circolari unicursali. — Le cubiche circolari unicursali sono cissoidi; la conica direttrice è un cerchio che passa pel punto doppio e per i punti d'intersezione dell'assintoto reale a distanza finita con le tangenti al punto doppio; questo circolo è quindi determinato.

Quando si voglia prescindere dal circolo *tracciato*, si può considerare la generazione delle cubiche circolari unicursali nel seguente modo.

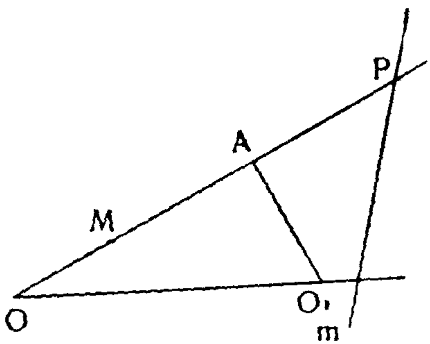


Fig. 299.

Siano due punti fissi $O\,O_1$ (diametro del circolo) e la retta fissa m. Conduciamo per O una retta variabile OP e da O_1 la perpendicolare ad essa O_1A; il luogo di A sarà la circonferenza di diametro $O\,O_1$; se portiamo da O in M un segmento uguale ad AP, il luogo di M sarà una cubica circolare unicursale.

Strofoide. — Con questo nome si indicano le cubiche circolari unicursali le cui tangenti nel punto doppio sono ortoganali.

Sia C (fig. 300) il circolo direttore, O il punto doppio e CA l'assintoto della curva; OA, OB saranno le tangenti in O. Prendiamo P simmetrico di C rispetto ad O. Da P (polo della curva) conduciamo una retta qualunque PR e portiamo $RM = = RM_1 = RO$ (essendo RO una parallela da O all'assintoto). Il luogo di MM_1 sarà la strofoide; retta in questo caso perchè OC è perpendicolare ad AB. Considerando la curva come cissoide si otterrebbe come luogo di M_1 facendo $OM_1 = NH$ (1).

L'equazione della strofoide retta rispetto agli assi Ox, Oy è ($OC = a$):

$$(x^2 + y^2)(x + a) - 2\,ay^2 = 0$$

(1) V. pure il tracciamento meccanico della cissoide e *Trisezione dell'angolo.*

La strofoide può essere generata in molti altri modi (v. Nota alla pagina precedente).

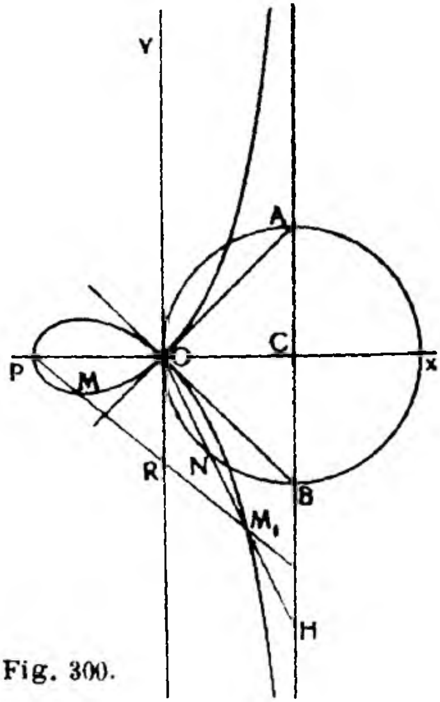


Fig. 300.

Consideriamo, ad esempio, un rettangolo $OABC$ (fig. 301) e due punti fissi, cioè un suo vertice O e un punto P su AB.

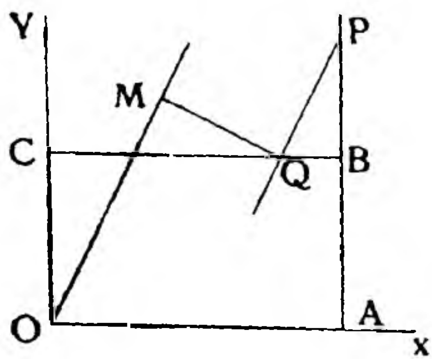


Fig. 301.

Conduciamo per O e P due rette fra loro parallele, e dal punto Q nel quale la seconda sega il lato BC del rettangolo, conduciamo la perpendicolare alla prima che la segherà in M.

Il luogo del punto M è una strofoide.

Sia AB un diametro di una circonferenza (fig. 302). Se il punto P varia su di essa, in perpendicolare da P ad AB e la perpendicolare da A ad AP si segano in M il cui luogo è una *cissoide*, mentre il luogo di X, punto medio di PM è una *strofoide*.

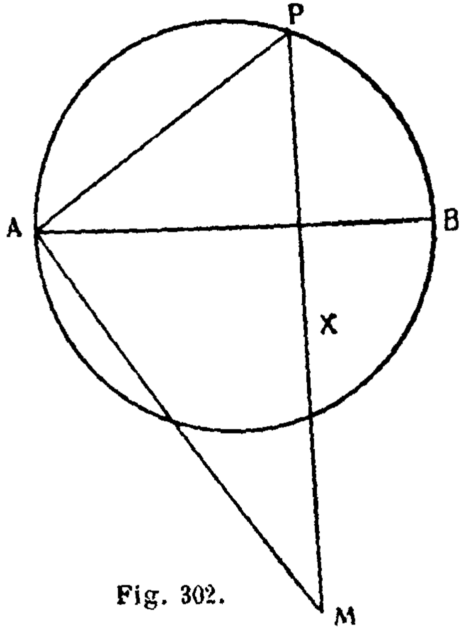


Fig. 302.

Trisettrice di Mac Laurin. — La trisettrice di Maclaurin è una cubica circolare retta, con un nodo; le tangenti in questo punto sono inclinate rispettivamente sull'asse della curva di angoli di 60 e 120°.

Fra i tanti modi nei quali si può generare questa celebre curva, ne indicherò alcuni dei più interessanti (1).

I. — Data (fig. 303) una circonferenza (O), se pel centro O ed un punto fisso A di essa si conducono due rette parallele che incontrino la curva in M ed N, le tangenti condotte in M ed N si segano in un punto P il cui luogo è la *trisettrice* rappresentata dall'equazione polare:

$$\rho = r \sec \frac{\omega}{3} \quad \text{nella quale} \quad r = OA \quad \rho = OP \quad \omega = B\widehat{O}P$$

(1) Vedasi pure « *Trisezione dell'angolo* ».

Infatti si ha $POM = \frac{1}{3} POB$ e l'equazione (1) si deduce immediatamente dal triangolo rettangolo MOP. Giova notare che la retta condotta per O sega la circonferenza anche in M_1 e che la tangente in questo punto sega la tangente in N in un altro punto P_1 appartenente esso pure alla curva di cui si tratta.

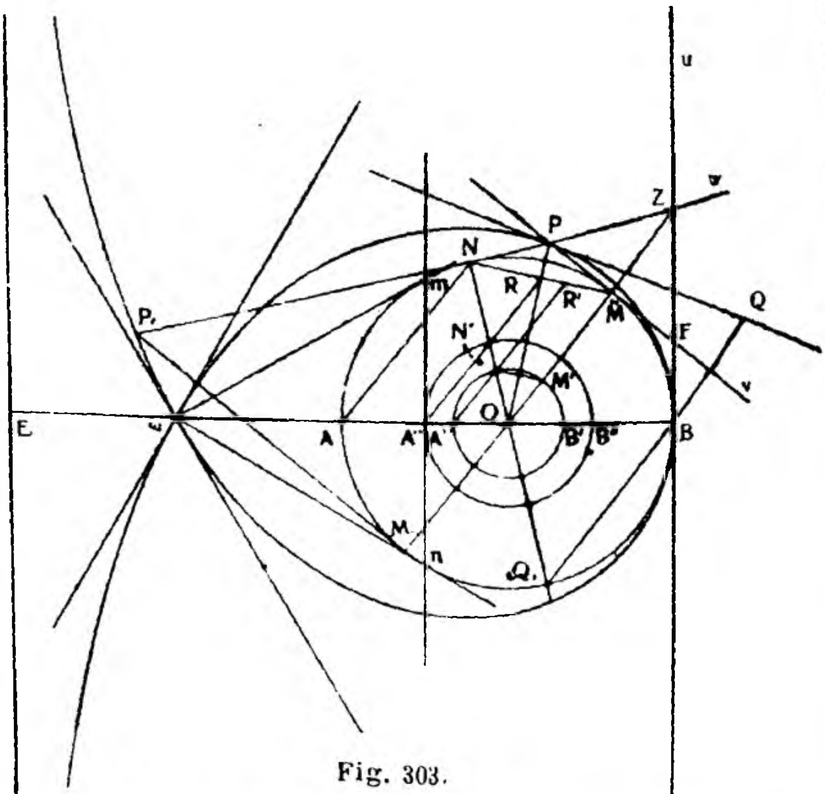


Fig. 303.

Si ha un punto Q della tangente alla trisettrice in P. prolungando la NM di $MQ = NM$. Quando M ed N coincidono con A e B il punto P è all'infinito e allora la tangente in esso alla curva, ossia l'assintoto, passa per E simmetrico di B rispetto ad A.

La perpendicolare, ad AB sul punto di mezzo di AO sega la circonferenza (O) in m ed n tali che le rette Am, On sono parallele e che le tangenti in m ed n si segano in ω sul mezzo di AE; ω è dunque un punto della trisettrice, e la tangente in questo punto passa pel punto simmetrico q di n rispetto ad m. Invertendo le funzioni dei punti m ed n si ritrova ω con una tangente $\omega q'$ simmetrica di ωq rispetto ad $A B$. Dunque ω è un punto doppio, con due tangenti ωq e $\omega q'$ ad angolo di 60° fra loro.

Consideriamo ora l'inviluppo della retta $M N$. Il punto di contatto R' di $M N$ col suo inviluppo è dato da:

$$M R' = \frac{1}{2} R' N = \frac{1}{3} M N$$

Tale inviluppo è la polare reciproca della (P) rispetto al circolo (O). Esso è una *cardioide;* infatti, costrutto il circolo di centro O e di raggio $OA' = \frac{1}{3} OA$ osserviamo che $M' N' R' M$ è un parallelogramma il cui lato $N' R'$ prolungato passa per A' ed è tale che $N' R' = A' B'$; dunque l'inviluppo di $M N$ è la concoide del cerchio $A' B'$ rispetto ad A' cioè la cardioide.

Il punto di mezzo R della corda $M N$ descrive una *chiocciola di Pascal* la cui equazione è:

$$\rho = r \cos \frac{\omega}{3}$$

Si può dimostrarlo costruendo un altro circolo di centro O e di raggio $\frac{1}{2} OA$ e considerando un parallelogramma simile a quello già considerato $M' N' R' M$.

Il punto Q descrive una cardioide, poichè se Q' è il simmetrico di N rispetto ad O, la retta $Q' Q$ passa per B ed ha una lunghezza costante $A B$.

II. — Dato un circolo O (fig. 304), consideriamo una tangente fissa u in B, ed una mobile v. Il diametro che passa pel punto M di contatto di v sega u in un punto Z pel quale condurremo la seconda tangente w. Il luogo del punto d'incontro P delle rette v e w è la trisettrice di Maclaurin. È facile vedere come l'angolo POM sia uguale a $\frac{1}{3} P\hat{O}B$.

Nella fig. 304 prendendo O come polo e $O B$ come asse polare l'equazione della curva è:

$$\rho = \frac{r}{\cos \frac{\omega}{}}$$

e prendendo per assi la tangente u e il diametro BO e osservando che:

$$\rho \operatorname{sen} \omega = x \qquad \rho \cos \omega = r - y$$

$$\cos \omega = 4 \cos^3 \frac{\omega}{3} - 3 \cos \frac{\omega}{3}$$

si trova:

$$x^2 (4r - y) = y (3r - y)^2$$

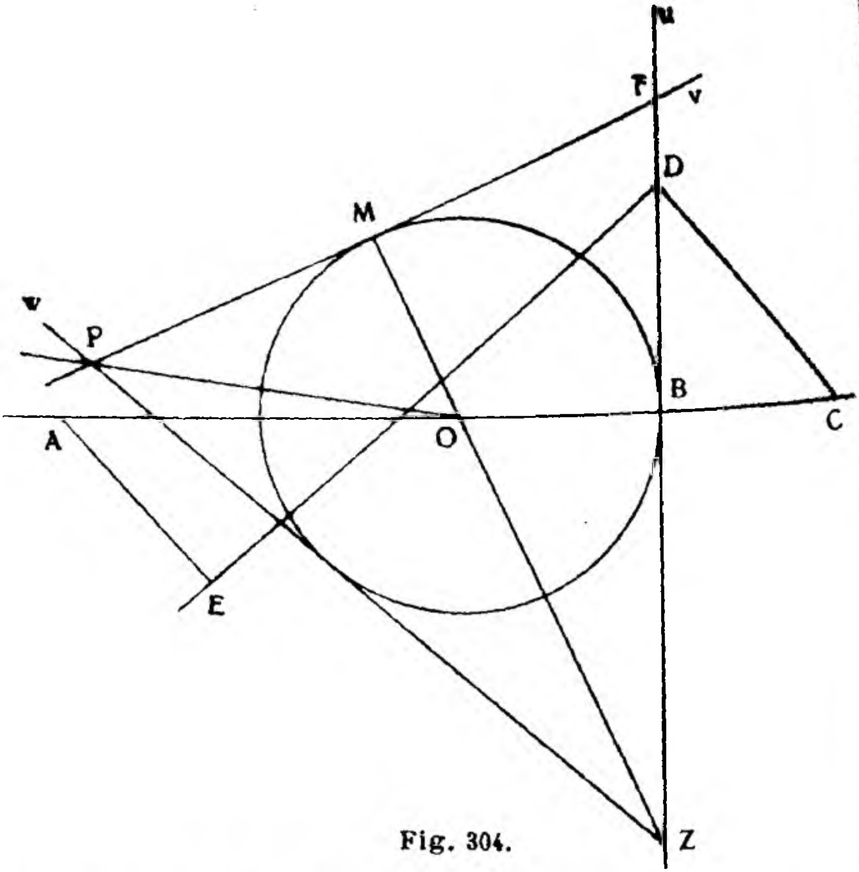


Fig. 304.

III. — Si può anche osservare che, se la tangente in un punto M ad un circolo O (figura precedente) incontra una tangente fissa u in F, il luogo del simmetrico P di F rispetto ad M è una trisettrice di *Maclaurin* la cui equazione è:

$$\rho = \frac{r}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{3}}$$

l'asse polare essendo il diametro del circolo O parallelo ad u.

IV. — Il seguente modo di generazione della trisettrice di Maclaurin permette di ottenerne i punti coll'uso di riga e squadra solamente.

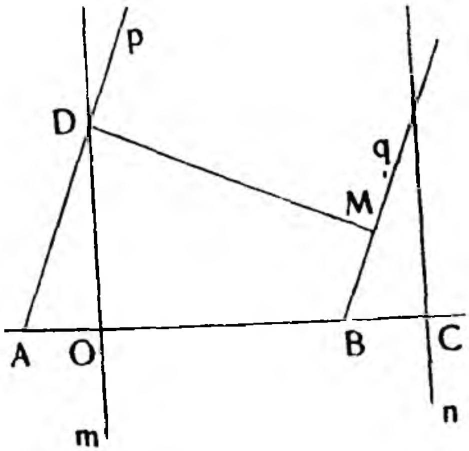


Fig 305.

Abbiansi su di una retta i punti A, O, B, C in modo che sia:

$$OB = 3\,AO \qquad BC = AO$$

e conducansi le perpendicolari m, n a tale retta nei punti O e C. Si conducano per A e B due parallele p, q e por il punto D nel quale la prima sega la m si conduca la perpendicolare alla p che segherà in M la q. Il luogo di M è la trisettrice di Maclaurin, la cui equazione polare (polo O, $AO = a$) è:

$$\rho = \frac{a}{\cos\omega} - 4\,a\cos\omega$$

e in coordinate cortesiane (assi OC, m):

$$x\,(x^2 + y^2) = a\,(y^2 - 3\,x^2)$$

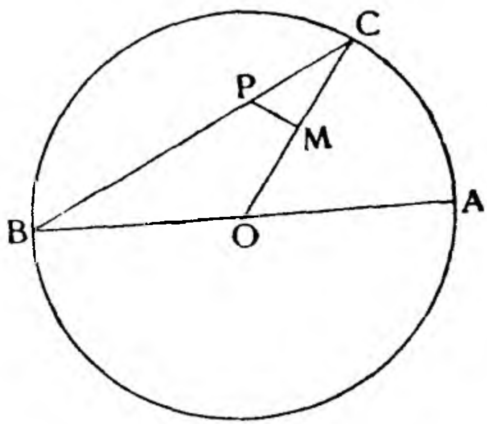


Fig. 306.

V. — In un circolo O (figura 306) considero un diametro fisso ed un angolo variabile $A\,B$, $A\,O\,C$. La perpendicolare abbassata sul raggio $O\,C$ sul punto di mezzo M segherà la corda $B\,C$ in un punto P

il cui luogo geometrico è la trisettrice di Maclaurin punto doppio in B, il vertice sul mezzo di OA, ecc. (Vedi *Tracciamento meccanico delle curve*).

VI. — Un altro modo di generazione della trisettrice è il seguente. Abbiasi un circolo fig. 307 di centro C e raggio $2a$. Sul punto di mezzo A del raggio CO si innalza ad esso la per-

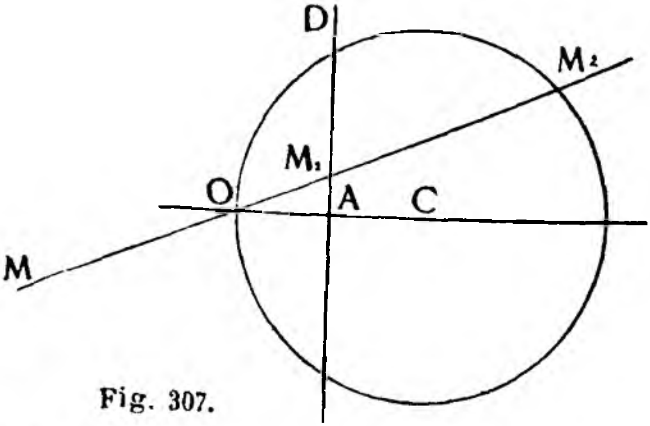


Fig. 307.

pendicolare AD. Condotta una trasversale per O, si fa $OM = OM_2 - OM_1$ essendo M_1 il punto ove essa sega la AD ed M_2 quello ove sega la circonferenza. Il luogo di M è la trisettrice.

Cubica circolare. — Una cubica concoidale particolare è quella *circolare* che si ottiene con questa costruzione (fig. 308).

Abbiasi un triangolo rettangolo PQR isoscele. Proiettiamo in A e B sul lato dell'angolo retto, un punto M dell'ipotenusa.

La perpendicolare da M su AB passa per un punto fisso O che è il quarto vertice del quadrato $PQRO$. La MO è segata dalla AB in un punto S il cui luogo quando M varia sulla ipotenusa è la cubica considerata. La sua equazione riferita al sistema d'assi O_x, O_y è (ponendo $PR = a$):

$$(y - x)(y^2 + x^2) + a(y^2 + x^2 - xy) = o$$

e riferita agli assi OX, OY:

$$X(X^2 + Y^2) = a\frac{\sqrt{2}}{4}(Y^2 + 3X^2)$$

La parallela a PQ condotta per E, punto medio di OE è l'assintoto reale della cubica, il cui vertice E' corrisponde al punto medio di ER.

Si può tracciare facilmente la tangente alla curva osservando che si può considerare questa come la pedale, dal punto O, di una parabola inviluppo delle rette $A\ B$, parabola che ha per vertice E' e per foco E; la tangente è dunque determinata.

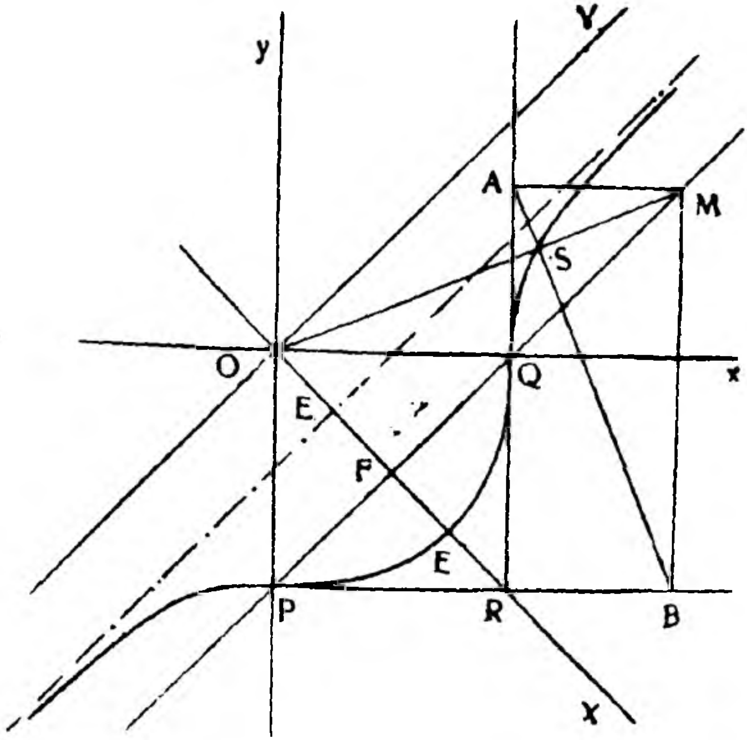


Fig. 308.

Cissoide. — È la curva studiata per primo da Diocle per la soluzione del problema della *duplicazione del cubo*. (V. tale argomento).

Può essere generata in varii modi fra i quali i seguenti si prestano ad una costruzione facile con sola riga e squadra.

I. — Abbiansi un punto O (fig. 309) ed una retta n. Conduciamo da O la perpendicolare ad n. Da O conduciamo poi una retta qualunque $O\ E$ e, dal piede F della perpendicolare $O\ F$ ad n, tracciamo la perpendicolare ad essa $F\ H$ e portiamo infine $O\ M_1 = H\ E$ in grandezza e direzione. Il luogo di M_1 è la cissoide. Il luogo di H essendo il circolo di diametro $O\ F$ riesce evidente la costruzione della cissoide quando esso circolo sia tracciato.

La sua equazione in coordinate polari è:

$$\rho = \frac{d \operatorname{sen}^2 \omega}{\cos \omega}$$

nella quale:

$$OM = \rho \qquad BOA = \omega \qquad OA = d$$

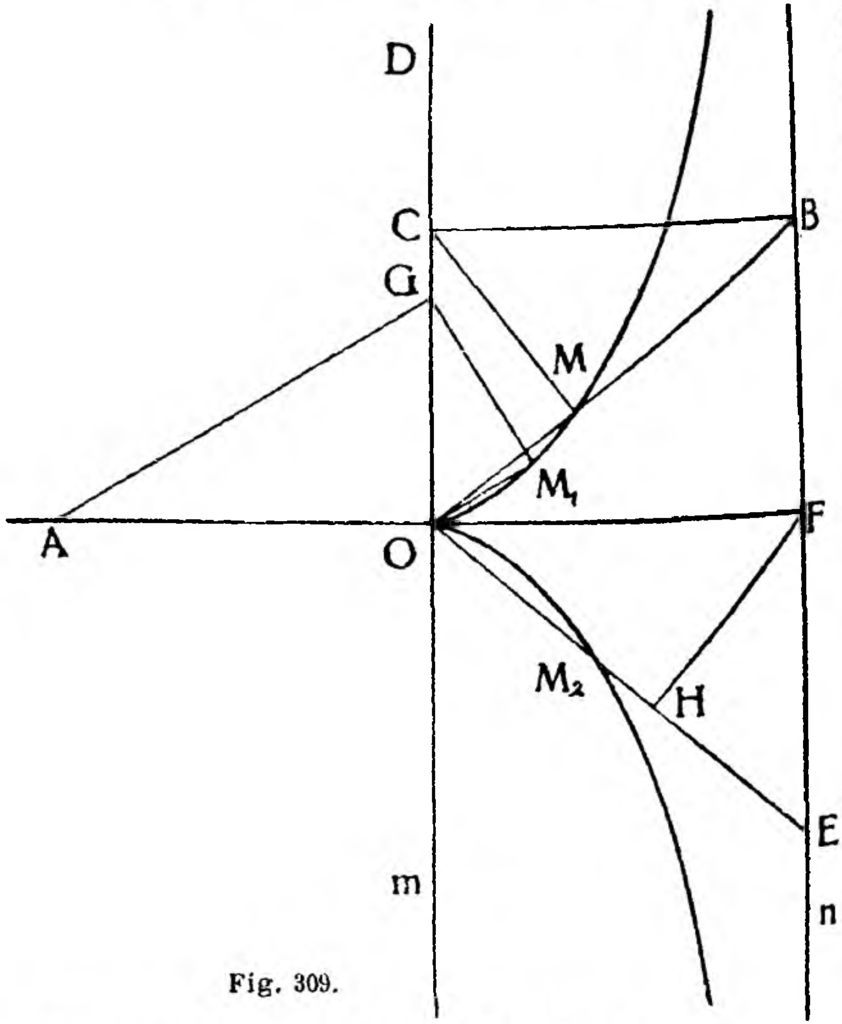


Fig. 309.

In coordinate cartesiane rispetto agli assi Ox, Oy, è:

$$y^2 = \frac{x^3}{d - x}$$

II. — Abbiansi due rette m, n parallele ed un punto O sulla m. Conduciamo da O una retta qualunque OB; da B ove sega la n conduciamo a questa la perpendicolare, che segherà la m in C; da C conduciamo la perpendicolare alla OB: il piede di questa perpendicolare sarà M, il cui luogo è ancora la cissoide, (v. fig. 309).

III. Abbiasi un angolo retto AOD. Da un punto fisso A d'uno dei suoi lati conduciamo una retta qualunque AG, e dal suo vertice O la parallela ad essa. Abbassando da G la perpendicolare su questa si avrà il punto M, il cui luogo è la cissoide, v. fig. 309, (1).

La cubica circolare di Jerabeck. — Data una circonferenza (O) ed una tangente AC cerchiamo il luogo del punto medio M del segmento d'una tangente variabile compreso fra il punto di contatto B e la tangente fissa AC.

Prendendo per assi OA e il diametro perpendicolare e indicando con (x, y), (x', y') le coordinate dei punti M, B, si trovano facilmente le equazioni:

$$x'^2 + y'^2 = r^2 \qquad x x' + y y' = r^2$$

$$x = \frac{1}{2}(x' + r)$$

dalle quali eliminando x' ed y':

$$4 x y^2 (x - r) = -(2 x^2 - r x - r^2)^2$$

e sopprimendo il fattore $x - r$ comune ai due membri:

$$4 x (x^2 + y^2) - 3 r^2 x - r^3 = o \tag{1}$$

Il luogo di M è dunque una cubica circolare. Si può dimostrare geometricamente che questo luogo è una *cissoidale*. Infatti, conducendo la tangente T nell'altro estremo D del diametro AD, e per M la parallela a BD, essa segherà AD in R e la DT in F e si avrà $RF = ME$ per l'eguaglianza dei triangoli FDR, BME. Ora, il punto E descrive la circonferenza di centro O e di raggio $\frac{1}{2} r$ e si ha $RM = FE$ dunque M descrive la cissoidale del punto R rispetto alla circonferenza $\left(O, \frac{1}{2} r\right)$ e alla retta T.

(1) Vedasi pure al § *Strofoide* pag. 345.

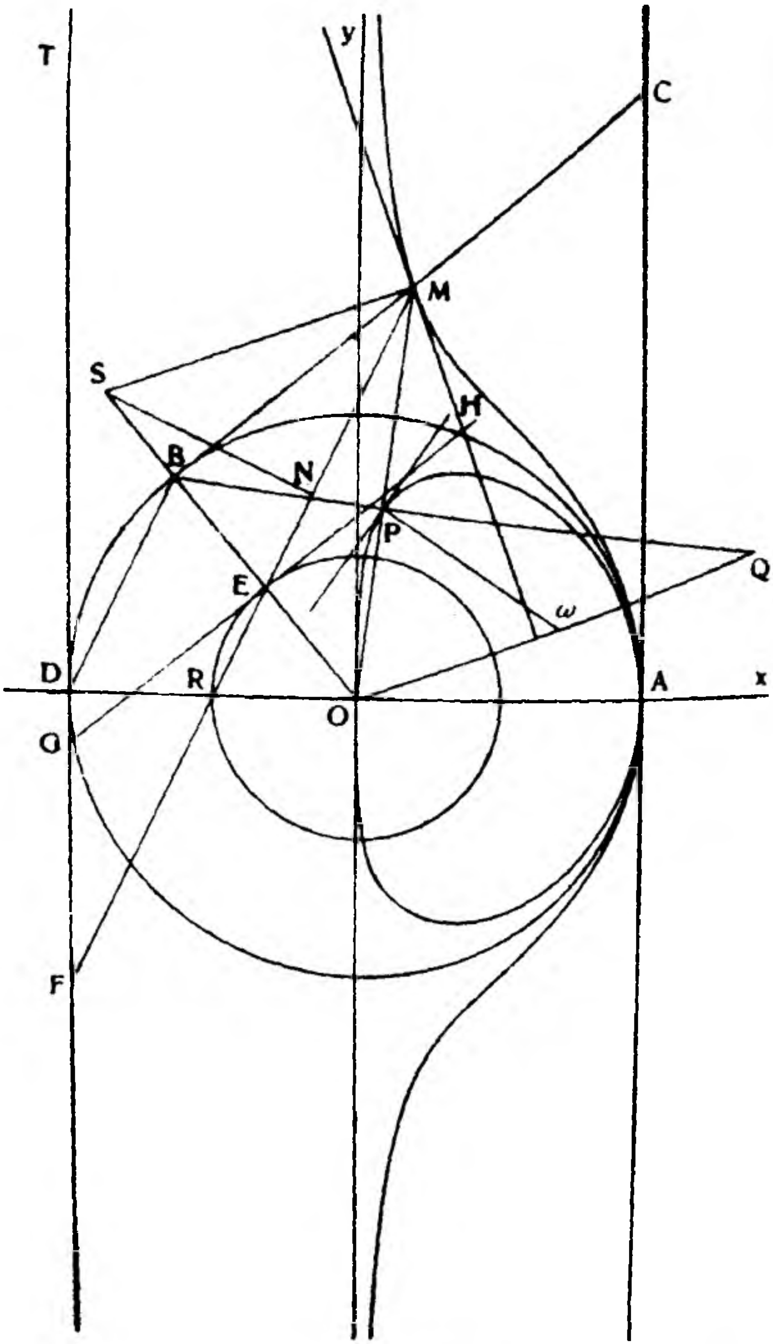


Fig. 310.

Scrivendo l'equazione (1) sotto forma omogenea:

$$4x(x^2 + y^2) = z^2 r^2 (3x + r)$$

si vede subito che le rette:

$$x = 0 \qquad y = x\sqrt{-1} \qquad y = -x\sqrt{-1}$$

sono assintoti. Dunque le rette isotrope condotte per O sono assintoti, ed O è un *foco* della cissoidale. Il punto R è un punto isolato della curva e due punti d'inflessione corrispondono ad $x = \frac{1}{2} r$. Si può costruire la tangente in M conducendo la tangente in E al circolo OE e facendo $EH = EG$; H appartiene alla tangente in M; oppure innalzare sul suo punto di mezzo N la perpendicolare alla MF, che segherà la OB in un punto S della normale in M.

— Sia P l'intersezione della polare di M rispetto al circolo dato, con la retta OM. Siccome si ha $OP \cdot OM = r^2$, il punto P descrive la curva inversa della cubica circolare (M), essendo O il polo.

Dall'equazione (1), facendo:

$$x = \rho \cos\varphi \qquad y = \rho \operatorname{sen}\varphi$$

si deduce l'equazione polare della curva (M):

$$4\rho^3 \cos\varphi - 3r^2 \rho \cos\varphi - r^3 = 0$$

e sostituendo ρ con $\frac{r^2}{\rho}$ quella della curva (P):

$$\rho^3 + 3r\rho^2 \cos\varphi - 4r^3 \cos\varphi = 0$$

dalla quale si deduce l'equazione della (P) in coordinate ortogonali:

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 3rx) - 4r^3 x = 0$$

Questa linea è dunque una quartica bicircolare. Le tangenti in M e P hanno direzioni simmetriche rispetto ad OM.

— La retta BP inviluppa una curva che si può considerare, sia come polare reciproca della (M), sia come antipedale di (P). Il punto di contatto Q di BP si può dunque ottenere, sia come intersezione di BP con la perpendicolare da O alla tangente MH, sia conducendo per O una retta $O_\omega Q$ il cui punto di mezzo ω si trovi sulla normale P_ω alla cuuva.

La concoide di De Sluse. — La costruzione seguita da De Sluse era questa: dati un punto O, una retta r e una costante k^2, si conduce per O una retta arbitraria che segherà r in M, e si porta su OM a partire da M e nella direzione OM un segmento MP tale che si abbia $OM \cdot MP = k^2$. Il luogo dei punti P è una *concoide slusiana.*

Prendendo come polo O e come asse polare la perpendicolare condotta per O sulla r si avrà:

$$OP = \rho \qquad OM = \frac{a}{\cos\varphi} \qquad MP = \rho - \frac{a}{\cos\varphi}$$

quindi l'equazione polare della curva è:

$$a(\rho\cos\varphi - a) = k^2 \cos^2\varphi$$

e in coordinate cortesiane:

$$a(x-a)(x^2+y^2) = k^2 x^2 \tag{1}$$

Se si porta il segmento $\frac{k^2}{OM}$ a partire da M nella direzione MO in MP', il luogo dei punti P' avrà per equazione:

$$a(x-a)(x^2+y^2) = -k^2 x^2 \tag{1'}$$

Essa non ha più la forma a *conca*. Tuttavia potendosi, l'equazione (1') dedurre dalla (1) cambiando la costante positiva k^2 in negativa $-k^2$, è naturale di considerare (1) come l'equazione generale delle concoidi slusiane quando k è una costante reale oppure immaginaria.

— Per ottenere una costruzione più pratica di quella di R. De Sluse consideriamo il luogo dei punti N tali che si abbia:

$$OM \cdot ON = k^2$$

O, M, N essendo tre punti d'una stessa retta. Questo luogo è il circolo Δ che ha per centro il punto $C\left(\frac{k^2}{2a}, O\right)$ e che passa per l'origine. In ciascun raggio vettore partente da O, si ha:

$$ON = MP = MP'$$

Dunque: « essendo dato un circolo Δ, un punto O sulla sua periferia ed una retta r parallela alla tangente in O, si conduce per O una retta arbitraria che sega la retta in M e il circolo in N; su tale retta si porta, a partire da M, sempre dal lato di O, oppure dal lato opposto MP', $MP = ON$; il luogo dei punti risultanti è una concoide slusiana ».

In questa curva r è un assintoto d'inflessione, mentre O è un punto doppio. Il punto O è sempre un punto isolato se $k^2 > o$.

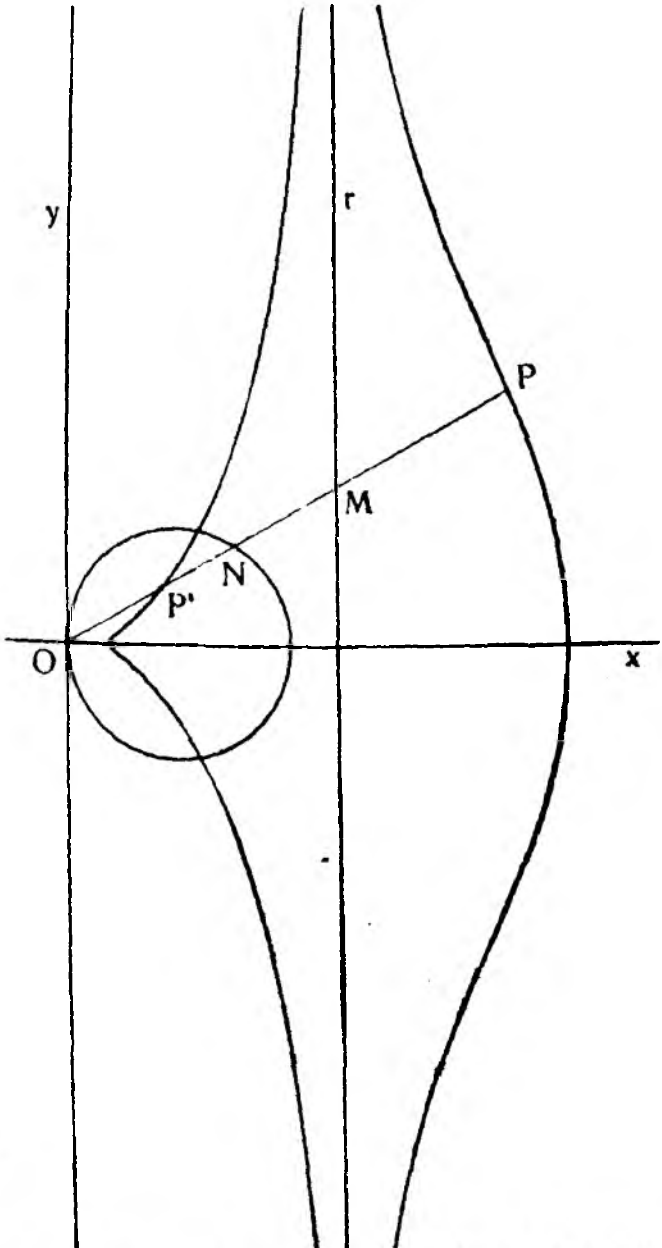


Fig. 311.

Quando $k^2 < o$ esso è un nodo, una cuspide od un punto isolato secondo che k^2 è superiore, uguale od inferiore a $-a^2$.

La concoide di De Sluse è una pedale di parabola, il polo essendo nell'asse. Essa ammette una generazione analoga a quella della cissoide, la tangente al circolo direttore essendo sostituita da una parabola a questa retta.

Si può generarla meccanicamente con un *inversore* (v. oltre).

Trisettrice di Longchamps. — L'ipocicloide a tre cuspidi (la *curva meravigliosa* del Cremona) si trasforma, per polari reciproche, in una curva notevole che è una trisettrice (1).

Consideriamo in un circolo di centro O (fig. 312), un diametro fisso $A\,B$.

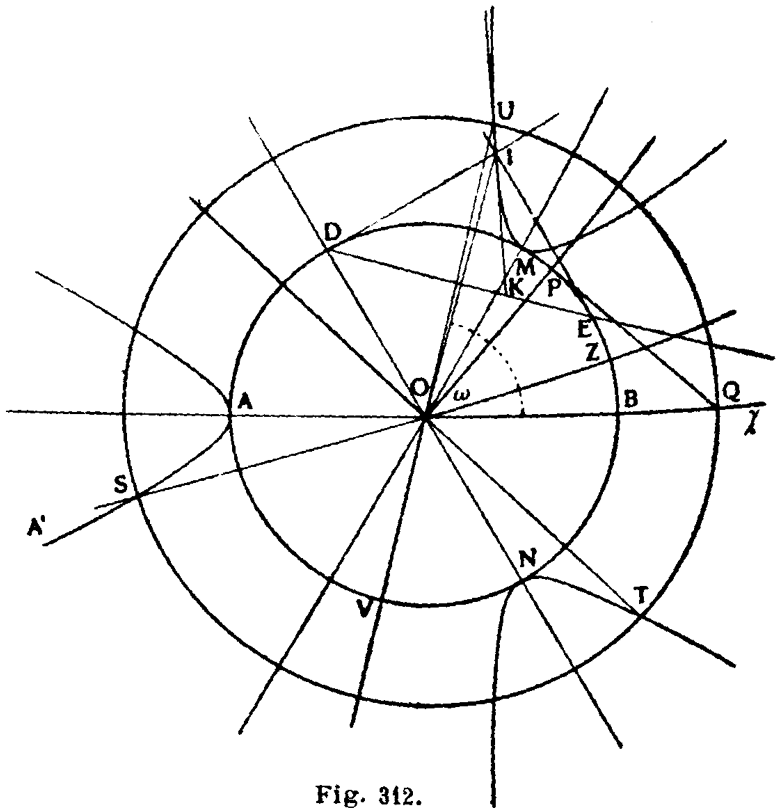


Fig. 312.

Facciamo l'arco $A\,D = 2\,B\,E$; è noto che la corda $D\,E$ inviluppa un'ipocicloide a tre cuspidi che tocca la circonferenza O nei vertici d'un triangolo equilatero $A\,M\,N$. Il punto di contatto di $D\,E$ col suo inviluppo è il simmetrico di D rispetto ad E.

(1) È la curva detta *Tricratere regolare* dal Bellavitis.

Le tangenti al circolo O in D ed E, s'incontrano nel polo I della DE. Il luogo di I è dunque la polare reciproca dell'ipocicloide rispetto al circolo O, ossia è la curva cercata.

Siano:

$$O\,I = \rho \qquad\qquad I\,O\,B = \omega$$

le coordinate polari di I e poniamo $\varepsilon = E\,O\,B$, $O\,B = R$.

Avremo:

$$\omega = \frac{E\,O\,B + D\,O\,B}{2} = \frac{180^\circ - \varepsilon}{2} \qquad\qquad \varepsilon = 180^\circ - 2\,\omega$$

$$I\,O\,B = \frac{D\,O\,B - E\,O\,B}{2} = \frac{180^\circ - 3\,\varepsilon}{2} = 3\,\omega - 180^\circ$$

da cui si deduce, considerando il triangolo rettangolo $I\,O\,D$, l'equazione polare della curva:

$$\rho = -\frac{R}{\cos 3\,\omega} \tag{1}$$

ossia, in coordinate cartesiane:

$$x\,(3\,y^2 - x^2) - R\,(x^2 + y^2) = 0$$

La curva è dunque una cubica caratterizzata dall'avere un punto doppio ombelicale e dall'ammettere tre assi di simmetria. L'equazione (1) prova che la curva è una trisettrice (vedi *Trisezione dell'angolo*).

Per avere la tangente alla curva, per esempio in I, basta osservare che essa è la polare, rispetto al circolo O, del punto F in cui $D\,E$ tocca l'ipocicloide; siccome essa sega $D\,E$ nel coniugato armonico di F, basta dividere $D\,E$ in tre parti uguali e unire I con K, primo punto di divisione a partire da E.

Pedale dell'ipocicloide di Steiner rispetto ad una cuspide. — Se si prendono sopra una circonferenza $C\,D\,A$ a partire da uno stesso punto C ed in sensi opposti, gli archi $C\,D\,A = \alpha$ $C\,B = \beta$ doppi l'uno dell'altro, la retta $A\,B$ inviluppa un'ipocicloide a tre cuspidi. Il punto di contatto E di $A\,B$ è simmetrico di A rispetto a B.

I punti A e B coincidono e la retta $A\,B$ diviene tangente al cerchio direttore quando:

$$\begin{array}{c|c|c} \alpha = 0 & \alpha = 240^\circ & \alpha = 480^\circ \\ \beta = 0 & \beta = 120^\circ & \beta = 240^\circ \end{array}$$

I punti così ottenuti sono i vertici di un triangolo equilatero $CC'C''$ e si chiamano *vertici* dell'ipocicloide.

La retta AB diventa un diametro del circolo direttore quando:

$\alpha = 360°$	$\alpha = 120°$	$\alpha = 600°$
$\beta = 180°$	$\beta = 60°$	$\beta = 300°$

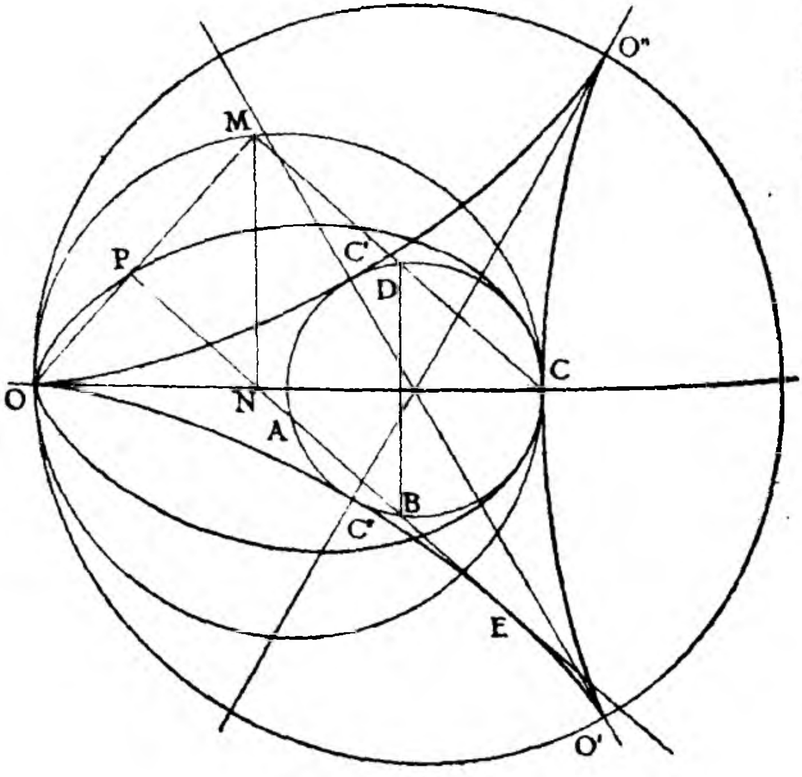


Fig. 313.

Il punto A coincide allora con C, C'' o C'; i diametri condotti per questi punti sono tangenti all'ipocicloide in punti O, O'', O' che sono simmetrici di C, C'' o C' rispetto all'altra estremità del diametro. I punti O, O', O'' sono punti cuspidali.

Cerchiamo ora la pedale del punto O. Siano D il punto di mezzo dell'arco CDA, N il punto d'incontro di AB con CO. Essendo DB perpendicolare a CN ed AB parallela a DC, si vede facilmente che $NB = DC$. La OP incontra CD in un punto M della circonferenza di diametro $O\,C$. I raggi dei circoli $C\,D\,A$, $C\,M\,O$ essendo nel rapporto di $1:2$ si ha $C\,D = D\,M = B\,N$; dunque $M\,N$ è parallela a $D\,B$ e per conseguenza perpendicolare ad $O\,C$. Da cui la costruzione seguente della pedale (P):

si proietta un punto qualunque M *della circonferenza di diametro* OC *in* N *sul diametro* OC, *poi* N *in* P *sulla corda* OM.

In coordinate polari ($\rho = O\,P$, $\omega = NOP$) si ha l'equazione:

$$\rho = a \cos^3 \omega$$

La curva (P) ha avuto il nome di *Ovale di Münger.*

Quartiche unicursali.

Il folio doppio. — Questa curva possiede un punto triplo che offre la particolarità d'una cuspide per due rami della curva che concorrono in esso. La curva ammette le direzioni

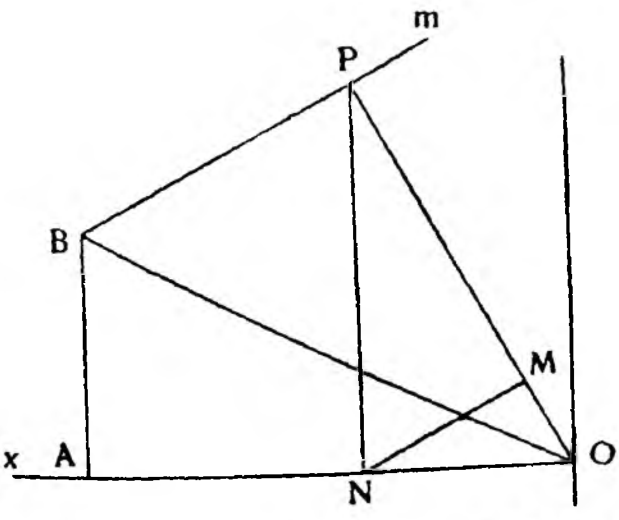


Fig. 314.

isotrope come direzioni assintotiche doppie. L'equazione del folio doppio riferita ad assi ortogonali, dei quali y tangente nel punto cuspidale, è:

$$x^2 (a\,x + b\,y) = (x^2 + y^2)^2$$

I. — Possiamo ottenere la curva considerando un angolo retto OAB e facendo le costruzioni seguenti. Da B conduciamo una retta m qualunque e da O la perpendicolare ad essa $O\,P$; da

P la perpendicolare PN ad OA e da N la perpendicolare … OP che la sega nel punto M il cui luogo è il folio doppi…
La sua equazione polare è:

$$\rho = a \cos^3 \omega + b \operatorname{sen} \omega \cos^2 \omega$$

nella quale:

$AO = a$ $\quad AB = b$ $\quad OM = \rho$ $\quad AOM = \omega$

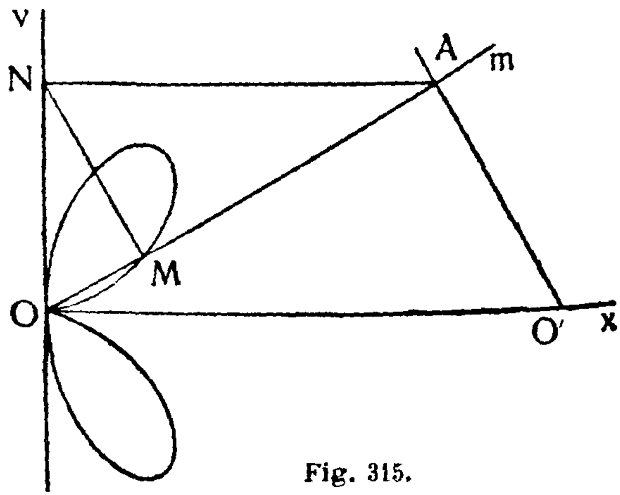


Fig. 315.

Quando la tangente nel punto cuspidale è pure asse di simmetria della curva si ha il *folio doppio retto*, che corrisponde

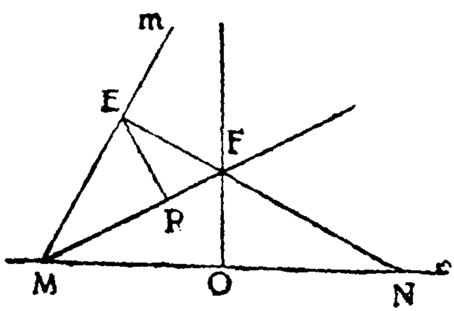


Fig. 316.

al caso particolare in cui $a = b$. Si può ottenerla con la costruzione della fig. 315 nella quale Om è una retta qualunque, $O'A$ perpendicolare ad essa, AN parallela ad OO', NM perpendicolare ad Om.

oppure (quando $OM = ON$) con quella della fig. 316, nella quale m è una retta qualunque uscente da M; NE perpendicolare ad m; EP perpendicolare ad MF. La curva è il luogo di P.

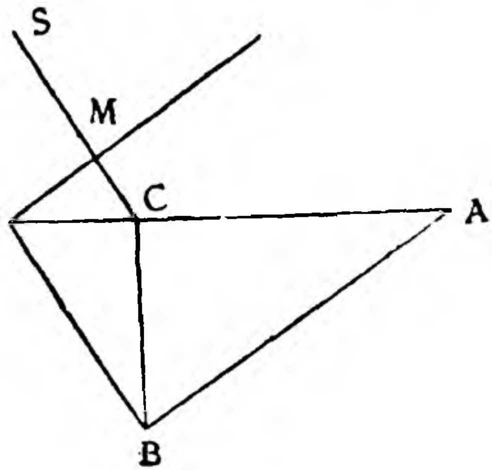


Fig. 317.

II. — Siano i punti fissi O, A (fig. 317). Si costruisca un angolo retto OBA. Si conducano BC perpendicolare su OA e CM, OM rispettivamente parallele ad OB, BA; la curva sarà il luogo di M.

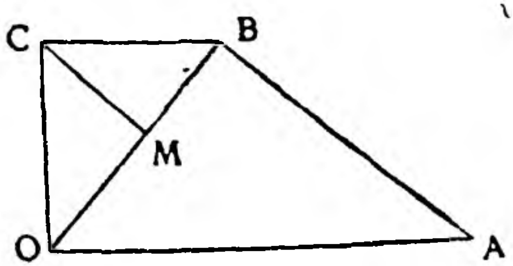


Fig. 318.

III. — Costruendo il triangolo rettangolo OBA (fig. 318) coi cateti passanti per i punti fissi O, A, conducendo BC parallela ad OA fino ad incontrare in C la perpendicolare in O ad OA e abbassando da C la perpendicolare su OB si ha il punto M il cui luogo è il folio doppio retto.

Il folio semplice. — Questa curva ha un punto triplo e le tangenti in esso sono coincidenti; le direzioni isotrope sono le sole direzioni assintotiche della curva.

Sia OA° un segmento dato. Conduciamo per O una retta qualunque m, da A la perpendicolare su di essa AP; da P la perpendicolare PQ su OA e da Q la perpendicolare su m che la sega in R. Il luogo di R è il folio semplice, la cui equazione assumendo come asse delle x la OA, e la perpendicolare ad essa in O come asse delle y, è:

$$A x^3 = (x^2 + y^2)^2$$

nella quale A è una costante. Ponendo:

$$OA = m \qquad OM = \rho \qquad M\hat{O}A = \omega$$

si ha l'equazione polare della curva:

$$\rho = m \cos^3 \omega$$

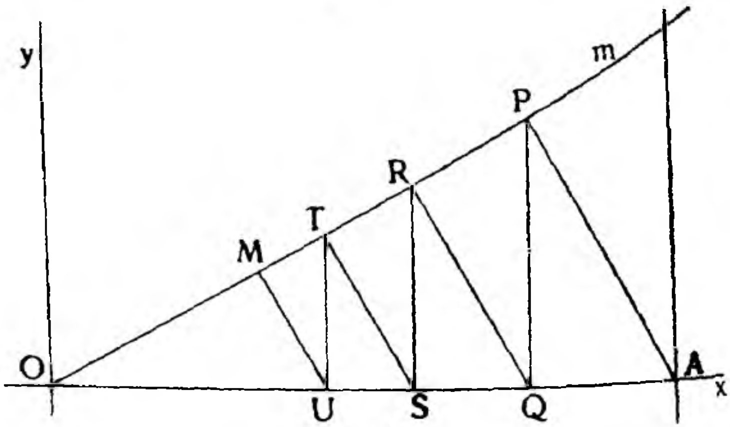


Fig. 319.

Il folio semplice, detto pure *Ovale di Münger*, (1) non è che un caso particolare in una famiglia di curve la cui equazione generale sarebbe:

$$\rho = m \cos^{2n+1} \omega$$

La fig. 319 rappresenta la costruzione di un punto M relativa al caso di $n = 3$ cioè di;

$$\rho = m \cos^7 \omega$$

La costruzione sopra indicata per ottenere il punto M è qui ripetuta tre volte; in altri termini, il luogo del punto R sarebbe il folio semplice ($n = 1$); quello di T sarebbe la curva corrisponpente ad $n = 2$, ecc.

(1) Vedi pag. 362-363.

L'espressione generale della distanza ON fra il piede della normale in M sull'asse Ox, e il punto O è:

$$\frac{O\,N}{O\,U} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

e quindi per il folio semplice:

$$O\,N = \frac{3}{4}\,O\,U$$

Il trifolio retto. — Questa curva ha un asse di simmetria Δ e un punto triplo O le cui tangenti sono: la perpendicolare Δ'

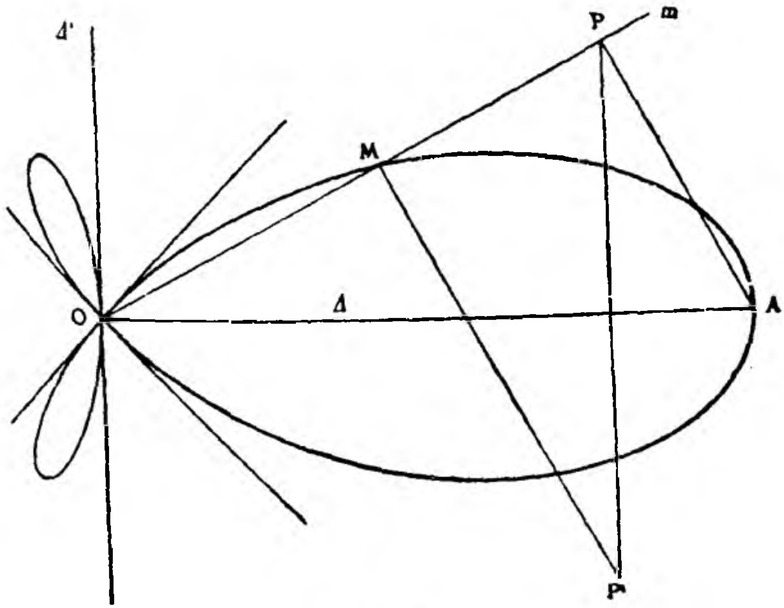


Fig. 320.

all'asse Δ per uno dei rami, e le bisettrici degli angoli formati dalle rette $\Delta\,\Delta'$ per le altre due. Le sole direzioni assintotiche della curva sono quelle isotrope.

L'equazione del trifolio retto, rispetto agli assi Δ e Δ', è:

$$(x^2+y^2)^2 = A\,x\,(x^2-y^2)$$

nella quale A è una costante.

Eccone la costruzione. Da O conduco una retta qualunque m; da A la perpendicolare ad essa $A\,P$; da P la perpendicolare ad OA sulla quale segno P' simmetrico di P; da P' conduco la perpendicolare ad m ed ottengo su questa il punto M il cui luogo è la curva cercata. Ponendo:

$$AO = a \qquad OM = \rho \qquad MOA = \omega$$

si trova l'equazione polare:

$$\rho = a \cos \omega - 2\, a \,\text{sen}^2 \omega \cos \omega$$

Lemniscata di Bernouilli. — Questa curva, tanto utile nella teoria delle funzioni ellittiche, deriva il suo nome (come altre analoghe) dal greco λεμνισκος che significa *striscia annodata ad otto.*

Fagnano, matematico italiano, ne dimostrò geometricamente (nel 1750) le proprietà geometriche; Eulero studiò la curva analiticamente, ma venne poi denominata da Bernouilli.

Essa è un caso particolare degli ovali di Cassini (v. pag. 372); è un'inversa ed una pedale dell'iperbole. Essa è pure la curva che segue un punto pesante A per arrivare ad un punto fisso, nello stesso tempo che se seguisse la retta AB.

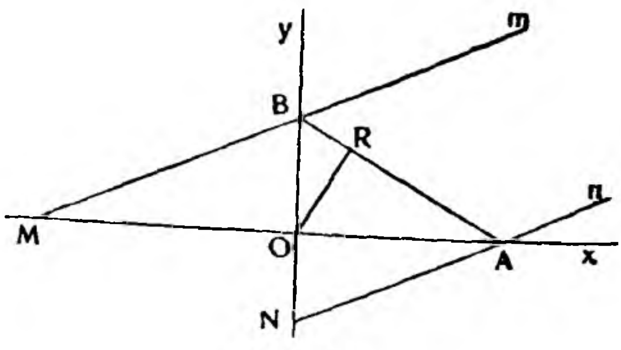


Fig. 321.

Siano gli assi ortogonali O_x, O_y e i punti M, N fissi su di essi. Conduciamo per M ed N due rette qualunque m, n parallele fra loro. Esse segano in A e B gli assi. Conduciamo da O la perpendicolare OR su AB. Il luogo di R è la *lemniscata* la cui equazione è, rispetto a tali assi:

$$a\, b\, x\, y = (x^2 + y^2)^2 \qquad \text{nella quale} \qquad a = OM \qquad b = ON$$

L'equazione polare è:

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\,\theta$$

cui corrisponde l'equazione cartesiana:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2\,(x^2 - y^2)$$

riferita ad altro sistema di assi.

La curva ha un centro in O che è pure un nodo retto di essa; essa passa doppiamente per gli ombilici del piano. Tali sono le caratteristiche della lemniscata. Essa può considerarsi come la pedale, dal suo centro O, dell'iperbola equilatera che è inviluppata dalle rette $A\,B$.

Chiocciola di Pascal. — Consideriamo la curva come concoide del circolo $O\,A$ di diametro a. Possiamo allora costruire la curva con la sola riga e un'apertura *fissa* di compasso. In-

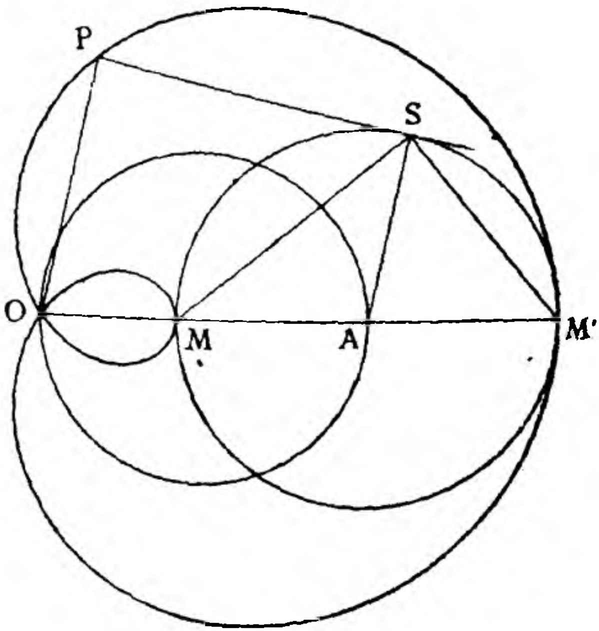


Fig. 322.

fatti, prendiamo sulla circonferenza un punto O qualunque e conduciamo per esso una segante che intersecherà il circolo in un altro punto A; portiamo da A, nei due sensi, sulla segante stessa un segmento dato b. Il luogo dei punti $M\,M'$ così ottenuti (prendendo O come origine, il diametro condotto per O come asse x, e la tangente in O al cerchio come asse y) avrà per equazione:

$$(x^2 + y^2 - 2\,a\,x)^2 - b^2\,(x^2 + y^2) = o$$

e in coordinate polari:

$$\rho = 2\,a \cos \omega + b$$

Esso è del quarto grado. La chiocciola di Pascal ha due punti doppi all'infinito (i punti ciclici e un punto doppio al finito che è l'origine. È quindi una *quartica bicircolare ed unicursale.*

Quando $b < a$ la curva ha la forma della fig. 322.

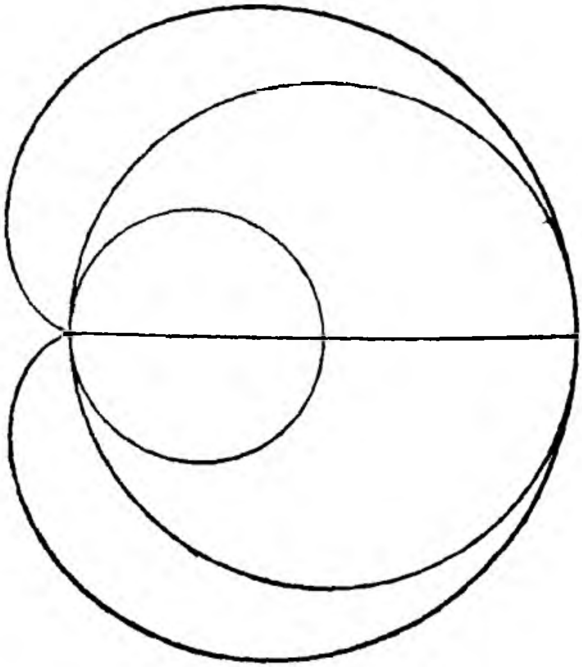


Fig. 323.

Quando $b = a$ la curva ha la forma della fig. 323 e allora prende il nome di *cardioide.*

Questa curva è anche un'epicicloide monocuspidale; è l'inversa focale della parabola e la sola chiocciola rettificabile.

Per $a < b < 2\,a$ si ha la forma della fig. 324.

Per $b = 2\,a$ si ha la forma della fig. 325 e quando $b > 2\,a$ si ha una forma quasi ovale.

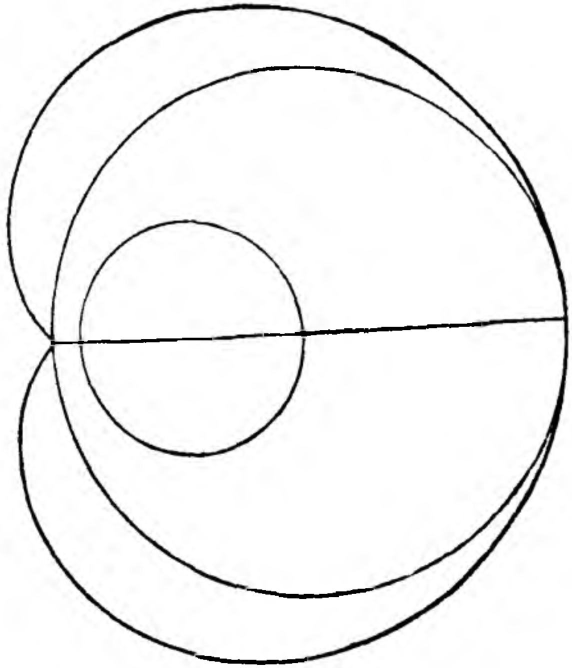


Fig. 324.

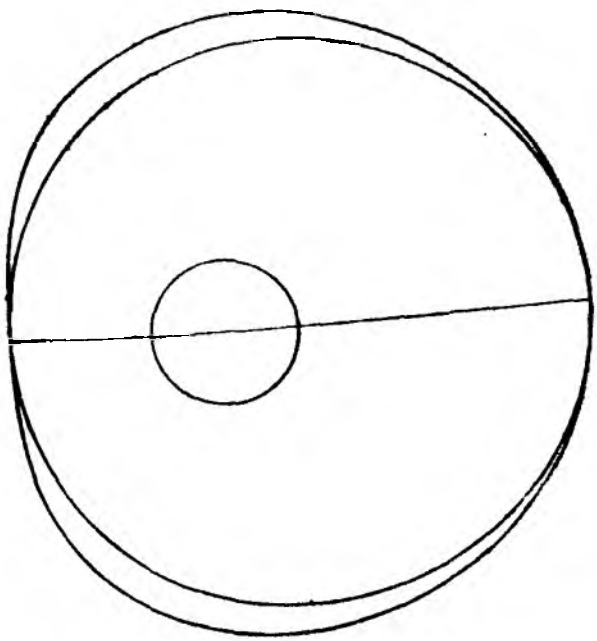


Fig. 325.

Si può anche definire la chiocciola di Pascal come la curva inversa d'una conica rispetto ad uno dei suoi fochi.

L'equazione polare di una conica è:

$$\frac{\rho}{r} = 1 - e \cos \theta$$

quindi l'equazione polare della chiocciola sarà:

$$r = a - b \cos \theta \qquad \text{nella quale} \qquad \frac{b}{a} = e$$

La curva sarà l'inversa di un'elisse o di un'iperbola, secondo che sarà $a >$ oppure $< b$; nel primo caso sarà una chiocciola ellittica; iperbolica nel secondo. Quando $a = b$ la curva è l'inversa d'una parabola relativamente ad un cerchio d'inversione il cui centro è il foco della parabola e il raggio ne è il semiparametro, ecc.

La chiocciola di Pascal è anche una epicicloide, una isottica di due circoli, nonchè un caso particolare dell'ovale di Cartesio (nel quale due fochi coincidono).

Se si considera la chiocciola di Pascal come pedale del circolo da un dato punto, si può costruirla con sola riga e squadra.

Siano infatti (fig. 322) A il centro e $M M'$ il diametro del circolo; conducendo per M e M' due rette fra loro perpendicolari, il loro punto comune S sarà un punto del circolo.

La $S P$ perpendicolare al raggio $A S$ sarà la tangente al circolo in S e la $O P$ perpendicolare alla tangente darà il punto P della chiocciola di Pascal, pedale del circolo A da O.

Ovali di Cassini. — Così viene denominato il luogo dei punti, il prodotto delle cui distanze da due punti fissi, detti fochi, è costante. Prendendo per asse delle x la congiungente i fochi F, F' e per asse delle y la perpendicolare da essi equidistante; chiamando c, e $-c$ le ascisse dei fochi e a^2 il prodotto dei raggi vettori, l'equazione del luogo risulta:

$$[(x - c)^2 + y^2]\,[(x + c)^2 + y^2] - a^4 = 0$$

che si può mettere sotto una di queste due forme:

$$(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4\,c^2 x^2 - a^4 = 0$$

$$y^4 + 2\,y^2 (x^2 + c^2) + (x^2 - c^2)^2 - a^4 = 0$$

Questa equazione rappresenta una quartica bicircolare; le rette isotrope condotte pei due fochi ne sono gli assintoti, e i due assi coordinati ne sono assi di simmetria. Consideriamo i vari casi possibili relativamente ai valori di a e c.

1. – Per $a > c\sqrt{2}$ si ha una curva simile ad un'ellisse, che perciò venne detta *elisse di Cassini* (fig. 326).

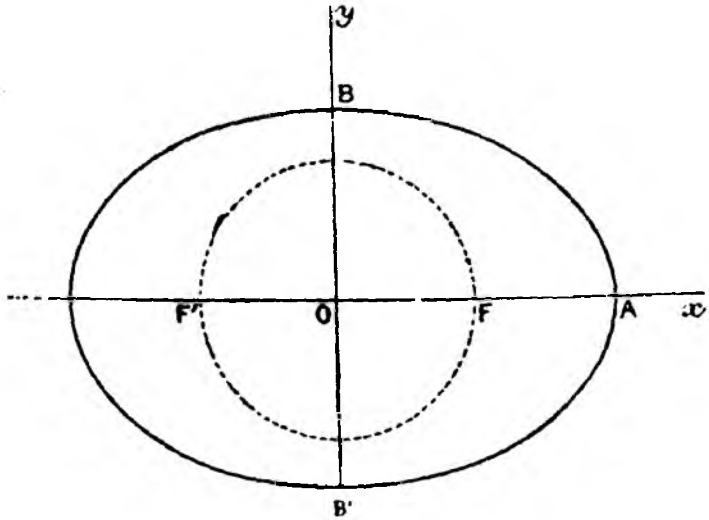


Fig. 326.

2. – La curva ha lo stesso andamento della precedente quando $a = c\sqrt{2}$, ma è bitangente al circolo C di raggio c (fig. 327).

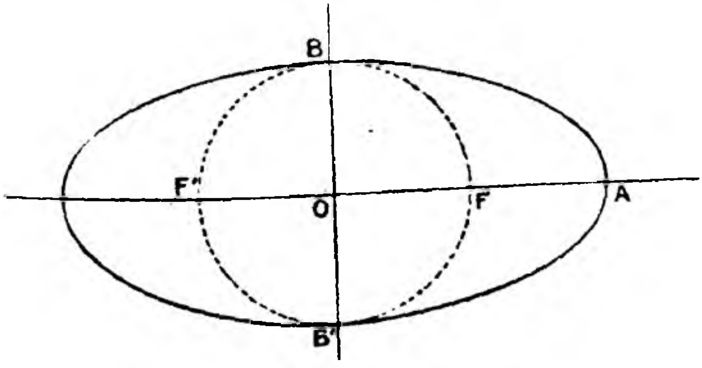
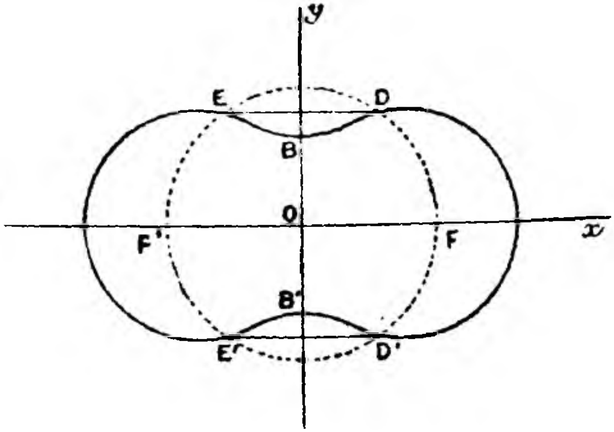


Fig. 327.

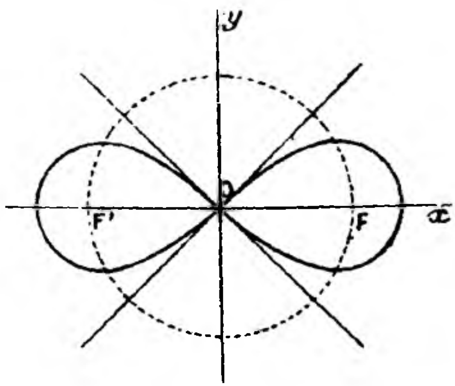
3. — I punti B e B', quando $a < c\sqrt{2}$, sono interni al cerchio C (fig. 328).

Fig. 328.



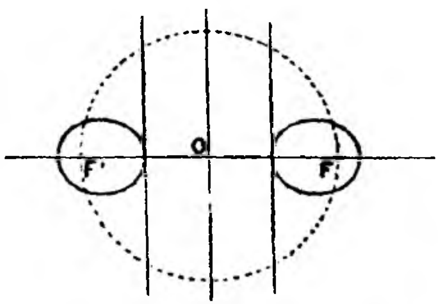
4. — L'equazione, quando $a = c$ diviene $(x^2 + y^2)^2 = 2\,c^2\,(x^2 - y^2)$; la curva è allora una *lemniscata* (fig. 329).

Fig. 329.



5. — Se $a < c$ la curva è costituita da due ovali separati (fig. 330).

Fig. 330.



Ovali di Cartesio. — Siano m, m' le distanze di un punto variabile M da due punti fissi (fochi) O, O'; h e k due quantità costanti. Supponiamo:

$$m \pm h\,m' = \pm k$$

Il luogo geometrico di M quando variano m, m' è un *ovale di Cartesio.*

Chasles ha dato la seguente elegante costruzione di tali ovali.

Abbiansi due circoli O, O'; per un punto qualunque H della loro centrale $O\,O'$ si conduca una segante qualunque che segherà O in P, Q ed O' in E, F; i raggi $O\,P$, $O\,Q$, $O'\,E$, $O'\,F$ prolungati s'intersecheranno nei punti $M\,M'$, $N\,N'$ che appartengono rispettivamente a due ovali di Cartesio.

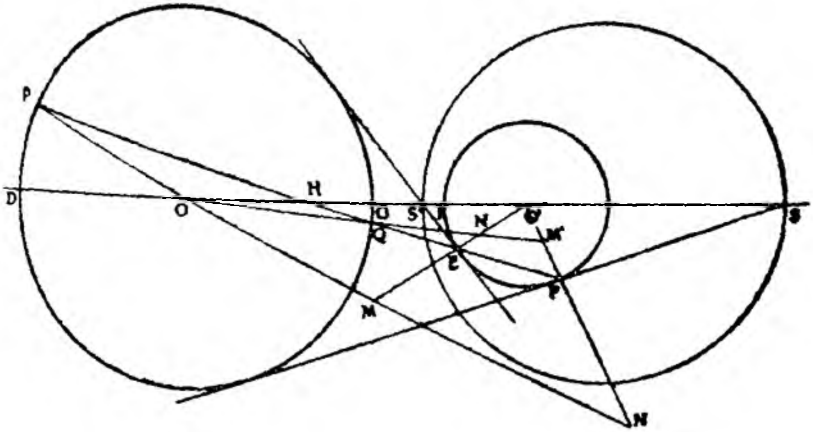


Fig. 331.

Casi particolari. — Quando H coincide con O il luogo di M è il circolo O' e viceversa è O quando H coincide con O'.

Se H è all'infinito, nella direzione $O\,O'$ il luogo di M è il circolo che ha per diametro $S\,S'$, essendo S, S' i centri di similitudine di O, O'. Detto circolo è il luogo dei punti dai quali i due circoli O, O' sono veduti sotto angoli uguali.

Se H coincide con S l'ovale diventa un'iperbola luogo dei centri dei circoli C tangenti ai circoli O, O' in modo che questi siano entrambi interni, o entrambi esterni alla serie di circoli C; se H coincide con S', si ha l'iperbole luogo dei centri dei circoli tangenti ad O, O' in modo che siano O interno ed O' esterno o viceversa.

Se H coincide con uno dei punti D, G, I, L uno degli ovali si riduce ad un punto, (O' od O).

Si può costruire l'ovale di Cartesio con un filo di lunghezza costante k in modo analogo a quello, ben noto, per la costruzione dell'ellisse.

Abbiansi in O , O' due spille, alla prima si fissa un capo del filo, si fa poi passare il filo *attorno* allo spillo in O' e si introduce la punta della matita nell' occhiello che termina l'altro

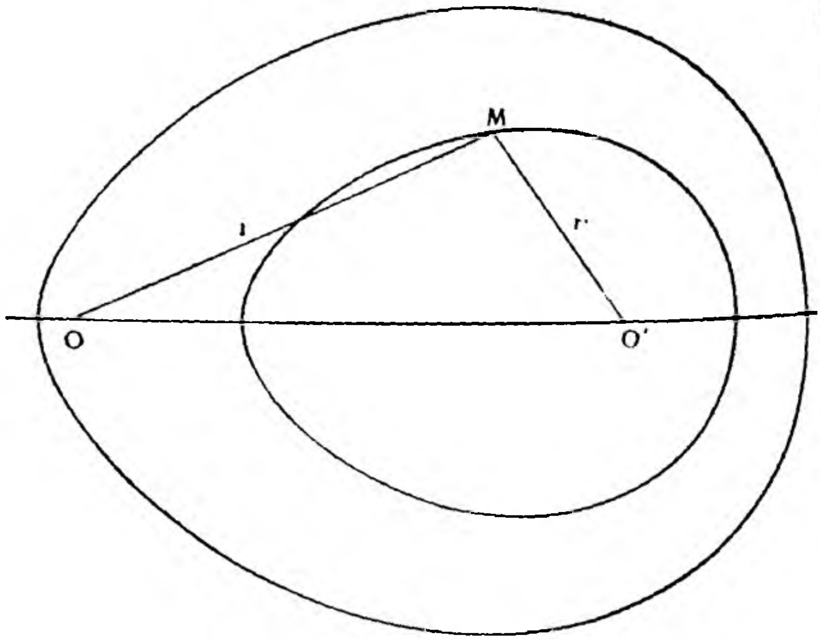


Fig. 332.

capo del filo; spingendo la punta della matita contro il filo in modo da formare il triangolo $O\ M\ O'$ si avrà come luogo di M un ovale che corrisponderà ad:

$$m + 2\ m' = k$$

Se $OO' = \frac{k}{2}$ l'ovale riesce appuntito in O. Se $OO' < \frac{k}{2}$ i punti O , O' riescono entrambi interni all'ovale.

Cicloide. — È la curva descritta da un punto d'una circonferenza che ruota senza scorrimento su d'una retta. È pure la traiettoria d'un peso che tende un filo che si arrotola intorno ad una circonferenza posta in un piano verticale. Essa si riproduce nella sua evolvente.

La cicloide è una curva *tautocrona* vale a dire che i tempi impiegati da un punto pesante a cadere lungo di essa, sono uguali, qualunque sia il punto dal quale esso parte. Huyghens, valendosi di tale proprietà scoperta da lui stesso, costrusse il pendolo isocrono.

La cicloide è inoltre *brachistocrona* ossia è la curva che deve seguire un mobile fra due punti dati, in un minimo di tempo.

Essa è inoltre il limite delle evolventi successive e alternate d'una curva pualunque fra due parallele date, mentre fra due rette concorrenti la curva limite sarebbe un'epicicloide.

La cicloide fu proposta da Giovanni Bernouilli per la n- sezione degli archi e dei segmenti circolari e Newton fece notare come sarebbe assurdo cercare il valore del lato del *chilogono*, ad es., per mezzo dell'equazione del millesimo grado che lo determina, mentre si può ottenerlo facilmente con l'uso della cicloide.

Epi e ipo-trocoidi. — Sono le traiettorie dei punti del piano d'un circolo che ruota, all'esterno o all'interno, su di un circolo fisso. Quando i punti che si considerano come descriventi la curva appartengono alla circonferenza stessa, si hanno i casi particolari di tali curve detti *epi* ed *ipo-cicloide* tanto usate nel tracciamento del profilo dei denti nelle ruote dentate.

Ipocicloide a tre cuspidi. — È una curva algebrica di quarto ordine la cui equazione è :

$$(x^2 + y^2)^2 + 8\,r\,x\,(3\,y^2 - x^2) + 18\,r^2\,(x^2 + y^2) - 27\,r^4 = o$$

Le proprietà notevolissime di questa curva, detta dal Cremona *curva meravigliosa*, furono studiate da moltissimi geometri; sarebbe qui fuori di luogo l'accennare ad esse.

Mi limiterò ad indicare che la sua pedale relativamente ad un punto qualunque della circonferenza tangente internamente alla curva è un trifolio, e quella relativa ad uno dei punti cuspidali è un *ovale di Münger*, del quale si tratta nel paragrafo a pag. 362 fig. 313.

Evolvente di circolo. — È la curva descritta da un punto d'un filo avvolto su di una circonferenza, quando lo si svolge, mantenendolo sempre tangente alla stessa.

Si usa nel profilo dei denti delle cremagliere, nei ponti levatoi, negli eccentici e boccioli, nelle turbine, ecc.

La sua inversa è la *spirale trattrice* che ha le sue tangenti uguali.

L'evolvente di circolo è una pedale della spirale iperbolica.

Catenaria. — È la curva che assume sotto l'azione della gravità una corda od una catena pesante e di sezione costante.

La sua equazione è:

$$y = e^x + e^{-x}$$

Offre la particolarità di avere il centro di gravità più basso di quello delle curve isoperimetre passanti per due punti di livello. È il profilo teorico, delle vôlte di spessore costante e la curva d'una vela tesa dal vento (*velaria*), che agisca normalmente ad essa.

La catenaria è l'evolvente della *trattrice* definita dalla proprietà di avere la tangente costante. È inoltre l'*ortottica* della *logaritmica*.

Spirali. — D'*Archimede*. La sua equazione in coordinate polari è semplicissima:

$$\rho = \omega$$

Una spirale d'Archimede viene descritta da qualsiasi punto unito ad una retta e distante da essa r, quando si fa rotare la retta su d'una circonferenza di raggio r.

La pedale retta od obliqua del centro d'una circonferenza rispetto ad una delle sue evolventi è una spirale d'Archimede.

Iperbolica. - La sua equazione è:

$$\rho\,\omega = 1$$

Essa è l'inversa della spirale d'Archimede, ed è anche la prospettiva d'un'elica veduta da un punto dell'asse.

La spirale iperbolica è il luogo delle estremità degli archi circolari uguali, aventi lo stesso centro e il loro raggio d'origine sopra una medesima retta.

Logaritmica. - La sua equazione è:

$$\rho = e^{\omega}$$

Questa curva gode della curiosa proprietà d'essere *anallagmatica* (cioè inversa di se stessa), di essere inoltre la pedale, l'omotetica, la caustica, la polare reciproca, ecc. di se medesima (1).

La spirale logaritmica è il limite verso il quale tendono le pedali successive d'una medesima curva.

---

(1) Giacomo Bernoulli avrebbe desiderato che questa curva fosse incisa sulla sua tomba con questa iscrizione » *Eadem mutata resurgo* ». Venne pure detta la « *phœnix perpetuæ resurgens* ».

Isotrepenti. — Sono quelle curve che hanno per epicicloidale una circonferenza; tale è, ad es., la spirale logaritmica.

Le isotrepenti possono dunque dare un sistema di due ruote rotanti l'una sull'altra attorno a due punti fissi, per cui vengono usate in varii meccanismi.

L'ellisse è isotropente rispetto al suo foco.

Traiettorie ortogonali. — Vengono così denominate le curve che segano ad angolo retto tutte le curve d'una stessa famiglia. Eccone alcuni esempi:

Famiglia di curve	Traiettoria ortogonale
Circoli tangenti in uno stesso punto ad una retta data o passanti per due punti dati	Circonferenza
Circonferenza o parabola che si sposti conservando lo stesso asse	Logaritmica
Parabole aventi lo stesso asse e lo stesso vertice	Ellisse
Ellissi omofocali	Iperbole
Iperboli concentriche, aventi un punto comune	Cassiniana
Lemniscate aventi lo stesso centro e gli stessi assi	Lemniscata con assi a 45° con quelli d. prime

Settrici. — Se due rette brillanti ruotano uniformemente attorno a due dei loro punti, il luogo della loro intersezione è una linea oscura (interferenza). Questa curva, osservata la prima volta da Plateau e denominata da Schoute, comprende come casi particolari il circolo, l'iperbole, la strofoide, la trisettrice, la sesquisettrice, ecc.

Curva d'inseguimento. — *Quale curva descriveranno tre cani che s'inseguano partendo ciascuno da uno dei vertici d'un triangolo equilatero?*

Essi seguiranno delle spirali logaritmiche.

Il problema generale consiste nel trovare la curva che segue un mobile *A* che si dirige costantemente su di un'altro punto ugualmente mobile *B*. Se la linea, seconde la quale si muove B è una retta, l'equazione della curva descritta da *A* è della forma:

$$y = \frac{x^{k+1}}{k+1} - \frac{x^{-k+1}}{-k+1}$$

ma negli altri casi si hanno equazioni differenziali, in generale non integrabili. Il problema può mettersí sotto altre forme, fra le quali le seguenti:

I. — Un viaggiatore, sull'esempio dei tre Re Magi, si propone di camminare dirigendosi costantemente verso una stella determinata; precisare la sua traiettoria sulla sfera terrestre.

II. — Un esploratore agli avamposti si approssima ad un albero per meglio osservare un drappello nemico che segue una direzione rettilinea; quale percorso dovrà seguire questo esploratore per essere sempre nascosto dall'albero?

Tracciamento meccanico delle curve e delle superfici geometriche.

Sistemi di sbarre articolate. — *Curve* (1), *piano*, *sfera*, *ecc*.

Venne dimostrato da Kempe, nel 1875, in un teorema che porta il suo nome, che è possibile, con un sistema di sbarre articolate appropriato, il tracciamento d'una qualsiasi curva algebrica.

Anche il Kœnigs dimostrò (2) un suo teorema secondo il quale, si può sempre, per mezzo di sistemi articolati, realizzare un movimento algebrico qualsiasi, e, in particolare, descrivere qualsiasi superficie o qualsiasi curva nello spazio. Questo teorema aperse un campo di ricerche nuove e feconde nel dominio delle combinazioni meccaniche e permette la soluzione di molti problemi di Meccanica che altrimenti riuscirebbero assai laboriosi.

Mannheim dimostrò pure che una retta nello spazio può essere descritta con un apparecchio composto di otto sbarre.

---

(1) Vedansi pure, per il tracciamento meccanico delle curve, i § « Sistemi articolati » « Trisezione dell'angolo » « Quadratura del circolo » « Duplicazione del cubo ».

(2) C. R. de l'Académie des sciences di Parigi, 6 maggio 1895.

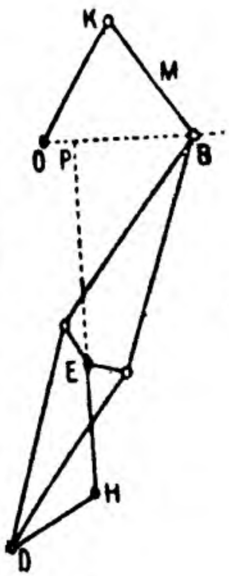


Fig. 333.

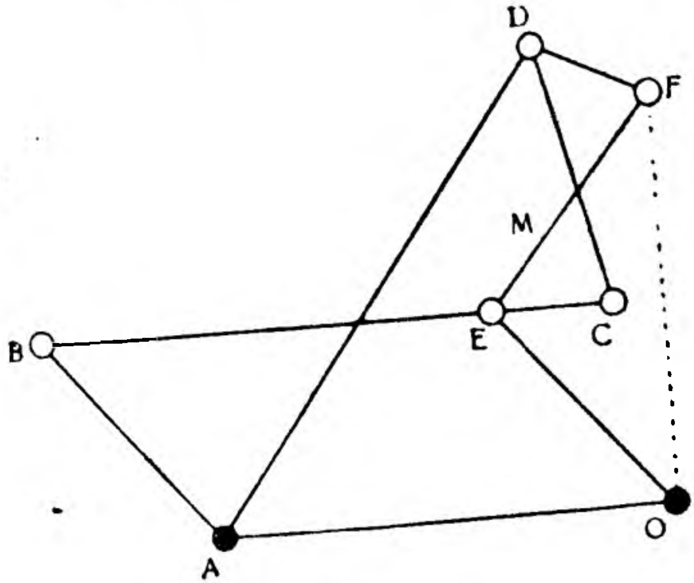


Fig. 334.

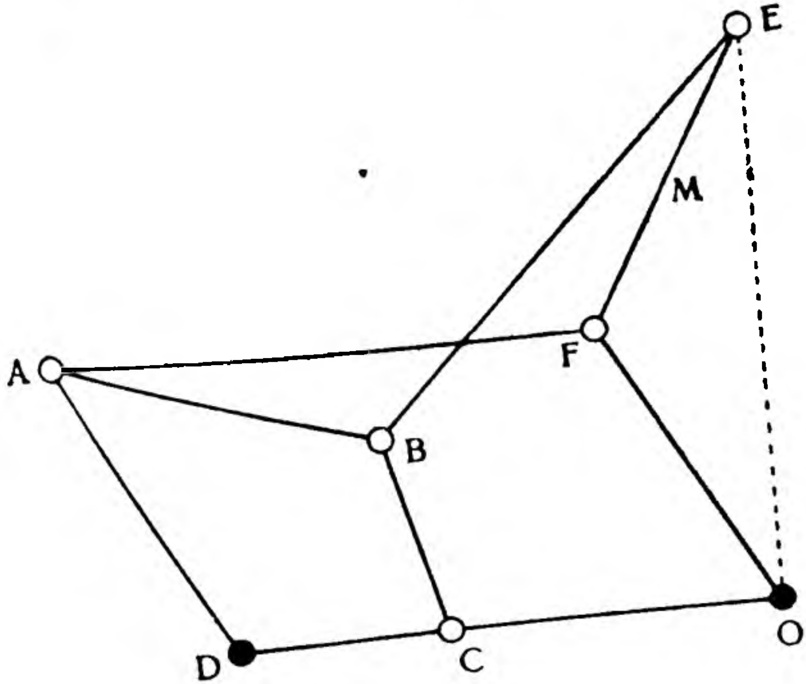


Fig. 335.

Mi limiterò ad un cenno sui principali apparecchi del genere, cioè su quelli atti al tracciamento delle curve più comuni della geometria e di qualche superficie.

Elisse. — *Tracciamento col filo.*

È ben noto il tracciamento col filo (detto dei giardinieri), che consiste nel fissare, nei fochi, le estremità d'un filo lungo quanto l'asse maggiore, filo che deve poi essere mantenuto teso, durante il movimento, dalla punta tracciante.

È questo un procedimento grossolano, utile però in molti casi nei quali la precisione non è richiesta.

Ellissografi articolati. — È dimostrato da Schooten che se in un compasso articolato una punta resta fissa e l'altra si muove su di una retta passante *per questo punto, ogni* punto del secondo braccio descrive una ellisse. In base a tale osservazione Peaucellier costrusse nel 1873 il primo ellissografo articolato, che è rappresentato nella fig. 333 nella quale O è il punto fisso; ogni punto M della sbarra $B\,K$ descrive delle ellissi:

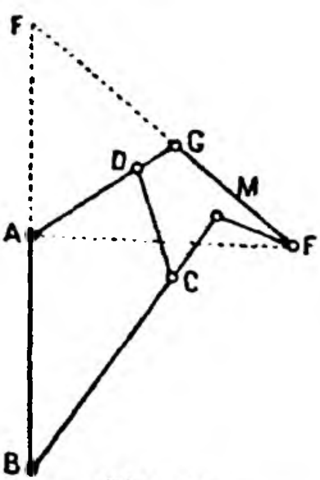


Fig. 336.

Analogamente nelle guide Hart e in quelle rappresentate nelle fig. 334-335 si hanno altrettanti ellissografi; la lettera M indica in tutte le dette figure la punta tracciata.

Se il sistema articolato di Hart è un romboide, il punto F (fig. 336) si muove sulla perpendicolare ad $A\,B$ passante per A. Dunque $G\,F = G\,A$ ed ogni punto di $G\,F$ descrive un'ellisse.

Ellissografi diversi. — Numerosissimi sono i *compassi* per tracciare *ellissi o ellissografi.* Fra i tanti ne citeremo uno assai semplice dovuto a Elia Renille che può avere una reale utilità pratica specialmente per disegno.

Esso è costituito da una riga scanalata longitudinalmente; nella scanalatura possono scorrere due piuoli metallici che si possono fissare in una determinata posizione con adatta vite che fa parte di essi. All'estremità della riga è fissata una matita o un tiralinee.

Si porta la matita al centro dell'ellisse e si porta il corsoio situato dal lato opposto della matita, nel punto più discosto dell'ellisse. Nel punto più vicino di esso, invece, si fissa l'altro corsoio Si dispone allora una comune squadra da disegno col vertice dell'angolo retto nel centro dell'ellisse e coi lati passanti rispettivamente per i punti più vicino e più lontano dell'ellisse. Si fa quindi poggiare uno dei corsoi contro la squadretta, mentre l'altro si fa corrispondere al suo vertice sovrapposto al centro e si fa girare la sbarra, in modo che i due

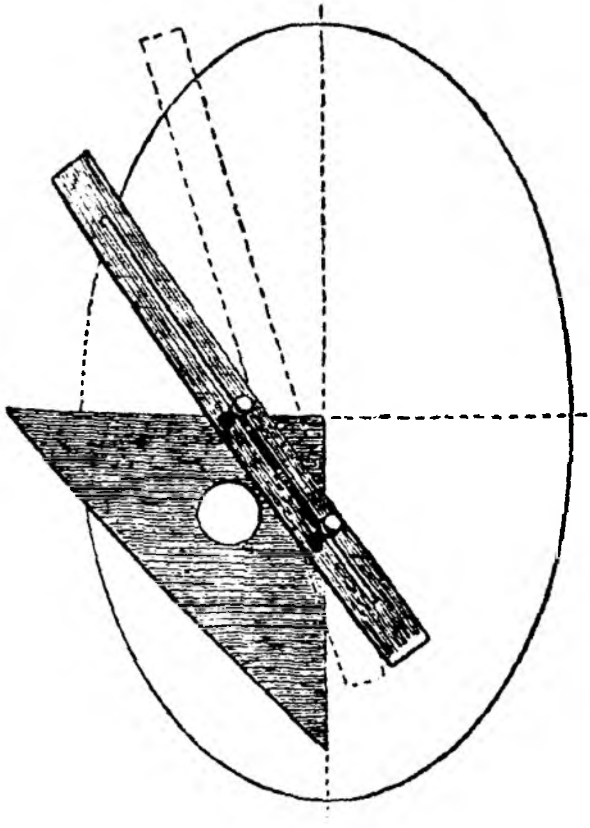
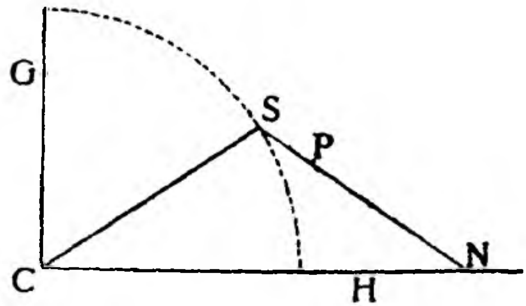


Fig. 337.

corsoi rimangano sempre aderenti uno ad un cateto e l'altro all'altro della squadra, tenendo questa ben ferma o fissandola opportunamente. Con la posizione della squadretta indicata in figura si otterrà il quarto di ellisse, diciamo così, Nord-Ovest e con tre spostamenti della squadretta si potranno tracciare gli altri tre quarti.

Il principio fondamentale degli ellissografi di tal genere è questo: Date due rette a, b comunque inclinate l'una rispetto all'atra, se si fa muovere una retta c in modo che gli estremi di un suo segmento costante MN percorrano a e b, un punto qualunque della c descrive un'ellisse di centro O. Se l'angolo

Fig. 338.

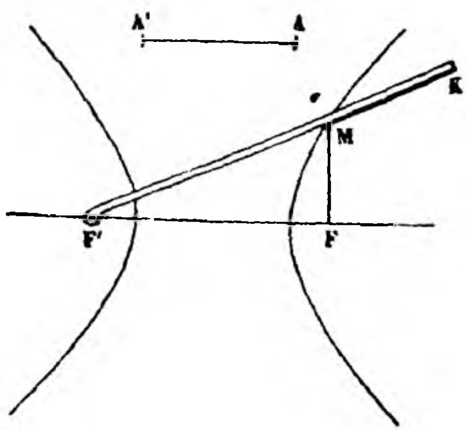


a, b è retto il punto di mezzo S di MN descrive un circolo di centro O e di raggio $\frac{MN}{2}$. Quindi alla retta b si può sostituire una sbarra (fig. 338) rotante attorno a C, articolata in S con altra sbarra $SN = SC$, il cui estremo N scorra sulla CH. Un suo punto qualunque P descriverà un ellisse di semiassi $CG = CS - PS$ e $CH = CS + PS$.

Iperbole. — *Tracciamento col filo.*

Si può descrivere un arco di iperbole, con *movimento continuo*, in questo modo. Si fissa in uno dei fochi F' (fig. 339) uno

Fig. 339.



degli estremi d'una riga in modo che questa possa rotare attorno ad esso punto. Un filo, la cui lunghezza è minore di quella della riga della quantità costante AA' (distanza fra i vertici) è fissato per un estremo al punto F e per l'altro al punto K estremo della riga. Se si tende allora costantemente questo filo, lungo la riga, per mezzo d'una matita, facendo rotare la riga attorno ad F', la punta della matita traccerà l'arco d'iperbole voluto, poichè si ha sempre:

$$MF' - MF = (MF' + MK) - (MF + MK) = AA'$$

Per la metà inferiore del ramo di curva si tende il filo sull'altro lato della riga. Analogamente si traccia l'arco dell'altro ramo.

Iperbolografo a liquido. — Sia, rispetto ad un sistema d'assi ortogonali, $y = f(x)$ l'equazione d'una curva F ed AB una sua secante (A e B essendo due punti consecutivi d'intersezione della retta con la curva). Proponiamoci di determinare l'inviluppo della retta $A\,B$ che limita sulla curva F una superficie d'area data.

Se l'area $A\,F\,B$ è costante il punto di contatto di $A\,B$ e del suo inviluppo sarà nel mezzo di $A\,B$ e a convincersene basta considerare la posizione di AB infinitamente vicina.

Quindi, se $(x_0\,,\,y_0)\,(x_1\,,\,y_1)$ sono le coordinate di A e di B, quelle $(X\,,\,Y)$ di un punto della curva Δ, inviluppo di $A\,B$, saranno:

$$X = \frac{x_0 + x_1}{2} \tag{1}$$

$$Y = \frac{y_0 + y_1}{2} \quad \text{o} \quad \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} \tag{2}$$

L'area costante S compresa tra la retta AB e la curva F si può considerare come la differenza fra l'area del trapezio $A\,a\,b\,B$ e quella della curva F, a e b essendo le proiezioni di A e di B sull'asse delle x. Si ha quindi:

$$(x_1 - x_0)\,\frac{f(x_1) + f(x_0)}{2} - \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = S \tag{3}$$

Eliminando x_0 ed x_1 fra le tre equazioni (1) (2) e (3) si otterrà l'equazione della curva Δ inviluppata dalla retta AB. Nel caso particolare in cui la curva F è di secondo grado la curva Δ è una conica omotetica, ossia la curva Δ è un circolo, un'ellisse, una parabola od una iperbole, secondo che la curva F è un circolo, un'ellisse, una parabola, una iperbole od anche un sistema di due rette costituito dagli assintoti dell'iperbole.

L'iperbolografo ideato da E. Estanave è basato su di una proprietà ben nota della tangente all'iperbole. Essa consiste in questo: L'area compresa fra una tangente AB all'iperbole e gli assintoti OA, OB, ossia l'area del triangolo OAB è costante. In altri termini, si può considerare l'iperbole come inviluppo del terzo lato d'un triangolo AOB d'area costante.

Se consideriamo un recipiente (fig. 340) di forma prismatica MNO, $M'N'O'$ contenente un volume V di liquido, l'area del triangolo AOB determinato sulla faccia MNO del prisma dalla superficie di livello $ABB'A'$ rimarrà costante quando si farà rotare il recipiente attorno allo spigolo OO' *orizzontale*, essendochè $AOB \times OO' = V$.

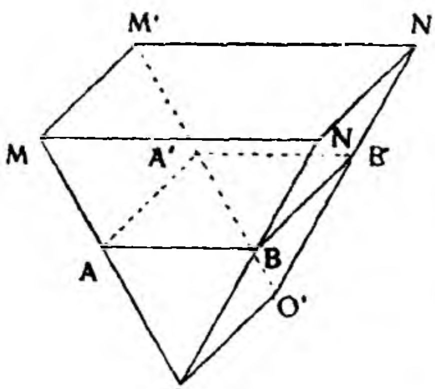


Fig. 340.

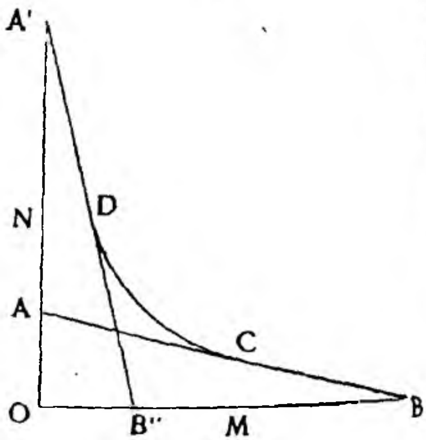


Fig. 341.

In tale movimento di rotazione la superficie libera del liquido inviluppa un cilindro iperbolico, le cui generatrici sono parallele ad OO'.

È facile dimostrare che i volumi di liquido da introdurre in *uno stesso* recipiente per ottenere due iperboli omotetiche sono tra loro come il quadrato del rapporto d'omotetia k ossia:

$$V' = K^2 \, V$$

È da osservare che se l'angolo (fig. 341) in O è retto (iperbole equilatera) e AB, $A'B'$ rappresentano le posizioni estreme del liquido, la porzione di curva determinata dal liquido è solamente la CD, che d'altronde è la sola parte che può interessare.

Se alla parete AOB (l'angolo di O essendo uguale a quello degli assintoti dell'iperbole da costruire) si adattano esattamente lamine di rame *ben deterso* all'interno, e si usa come liquido una soluzione di bicloruro o di nitrato di rame, questo a contatto del rame precipiterà il mercurio in istrati ben netti sul rame, purchè il moto rotatorio attorno ad OO' (ottenuto con meccanismo da orologeria) sia abbastanza lento ed uniforme.

Con un apparecchio nel quale l'angolo in O fosse variabile si avrebbero due variabili ω e V, e si potrebbero così tracciare delle iperbole d'assi stabiliti a e b.

Si potrebbero avere le iperboli su carta mettendo al posto della lastra di rame una lastra fotografica (previamente velata esponendola alla luce) e usando un volume V d'un rivelatore qualsiasi. Dopo la fissazione della negativa si potrebbero riprodurre in carta le prove dell'iperbole tracciata dallo strumento.

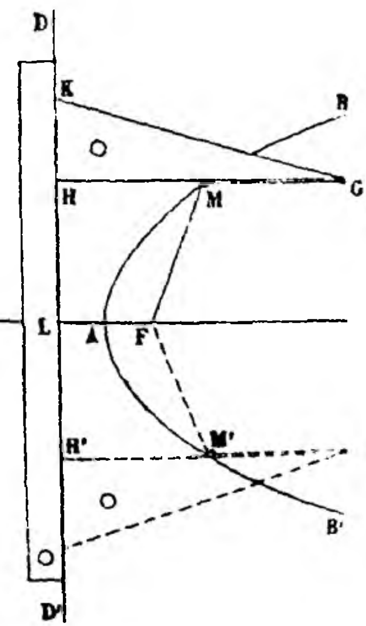


Fig. 342.

Parabola. — *Tracciamento col filo.*

Si può descrivere un arco di parabola con moto continuo, facendo coincidere la costola d'una riga con la *direttrice* DD' della curva (fig. 342) e applicando contro la riga il cateto minore d'una squadretta. Un filo, lungo quanto il cateto maggiore di essa HG è fissato per un estremo nel foco F della parabola e per l'altro all'estremità *G* del lato *HG*. Se si tende allora costantemente questo filo contro il cateto maggiore della squadra, per mezzo d'una matita, e se si fa in pari tempo scorrere la squadra lungo la riga, la punta della matita descrive un arco di parabola.

Conicografi. — I sistemi articolati che servono a descrivere le curve *inverse* delle coniche, già descritti precedentemente (*concoidografi*, *cissoidografi*, ecc.), possono servire come *conicografi* applicandovi degli inversori.

Dell'Autore. = Cinque punti del piano determinano una conica. Sul principio del teorema di Pascal è possibile costruire uno strumento o compasso atto a tracciare la *conica*, in genere, determinata con tali dati *A*, *B*, *C*, *D*, *E* (fig. 343).

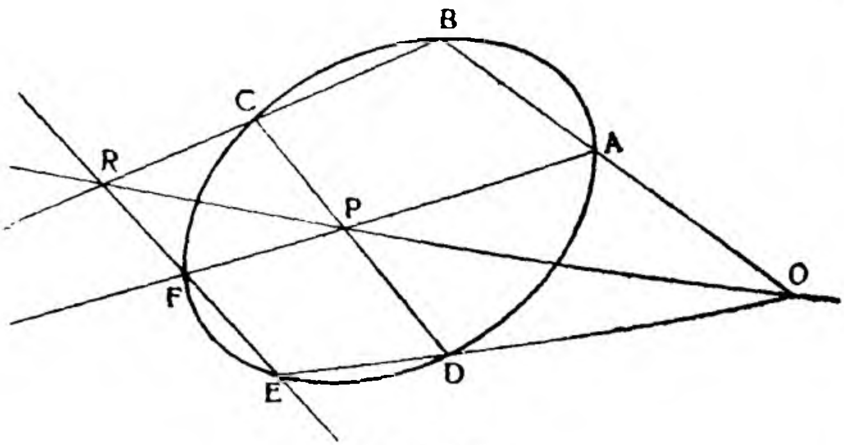


Fig. 343.

L'esagono iscritto sarà costituito dai cinque punti dati e dal punto *F* incognito. I due lati opposti *AB*, *DE* dell'esagono si segano in *O*; il lato *BC* e quello variabile *EF* in *R*, onde *OR* sarà la retta di Pascal; essa sega il lato *CD* in *P* epperò la *AP* segherà la *ER* in *F* punto cercato. Sostituiamo alle rette della figura altrettante sbarre rigide; *AB*, *DE* *fisse*, come pure *BC* e *CD*. Un'altra sbarra rigida sarà la *OPR* che può rotare attorno ad *O*, mentre le altre due sbarre *mobili* *EF*, *AF* possono rotare rispettivamente attorno ad *E* ed *A*. Se le sbarre *BC*, *CD*, *EF*, *AF*, *OR* sono scanalate e portano dei corsoi in *R*, *P* ed *F*, facendo rotare, per esempio, la *EF* attorno ad *E*, una punta tracciante fissata al corsoio *F* descriverà la *conica* che sarà ellisse, iperbola o parabola, secondo la posizione relativa dei punti dati. Siccome le sbarre dovrebbero avere lunghezze eccessive pel tracciamento di certi archi della curva, non si farà altro che spostare il compasso assumendo come *dati* punti già determinati col tracciamento d'una prima parte della curva, basandosi, cioè, su di un altro pentagono più conveniente del dato.

Tolto questo inconveniente, d'altronde di poco rilievo, questo compasso da me ideato funziona benissimo e può riuscir assai utile in Geometria descrittiva, proiettiva, ecc.

Cissoide e Strofoide retta. (*Newton*). — Siano AP ed AQ due rette rettangolari; la prima assoggettata a passare per un punto P fisso; sulla seconda siasi presa una lunghezza costante AQ uguale alla distanza del punto P ad una retta fissa

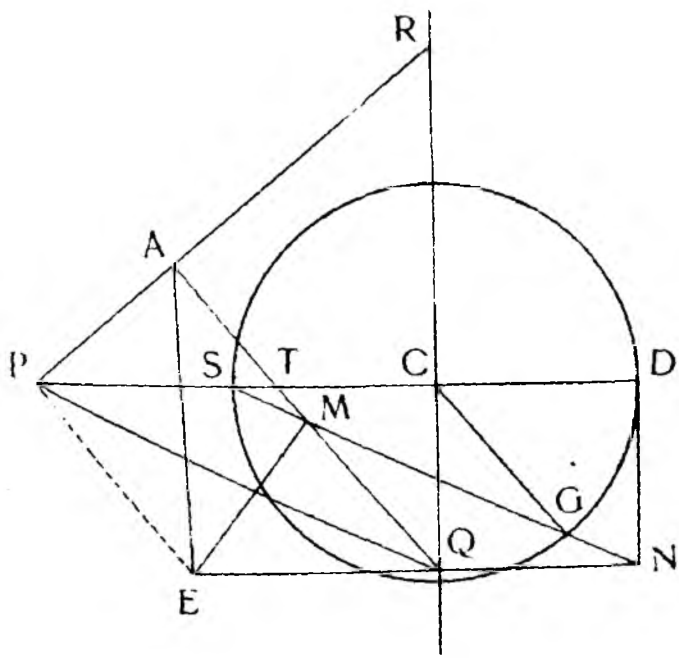


Fig. 344.

QR sulla quale il punto Q è assoggettato a scorrere. Il punto A descrive una strofoide. Infatti R essedo il punto d'incontro di AP con QR si ha evidentemente $RC = RA$. Se l'angolo PAQ è costantemente uguale a PCQ supposto qualunque, e se $AQ = PC$ il punto A descriverà una strofoide obliqua.

Il punto medio M di AQ descrive invece una cissoide di Diocle. Sia infatti S il punto medio di PC; tracciamo il circolo di centro C e di raggio CS; esso sega SM in G. Si vede che SM è parallela a PQ, quindi se si completa il parallelogrammo $PSNQ$ la retta DN è tangente in D al circolo CD poichè QN è uguale e parallela a CD. Ma il triangolo PTQ è isoscele come i triangoli STM, SCG, QMN, il che dimostra appunto che il luogo di M è la cissoide di Diocle.

Questo modo di tracciamento permette di costruire la normale in M e in A alle due curve poichè il centro istantaneo di rotazione della figura PAQ è il punto E, intersezione di QN con la perpendicolare PE a PA.

Le normali cercate sono dunque EA ed EM.

Concoidografi. — Le *concoidi* sono curve i cui raggi vettori sono quelli d'un'altra curva, aumentati o diminuiti d'una quantità costante. Così la chiocciola di Pascal è la concoide *interna* del circolo.

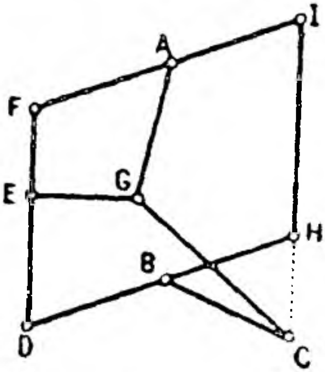


Fig. 345.

Si chiamano *concoidografi* gli strumenti atti al tracciamento di tali curve, e si distinguono in *protrattori* e *retrattori* secondo che i vettori della curva base vengono aumentati o diminuiti. Tutte le *guide articolate* possono venire trasformate in concoidografi.

La fig. 345 rappresenta un concoidografo nel quale il punto fisso è F e quelli traccianti sono C e G. Si è notato a suo luogo che la chiocciola di Pascal, oltrechè come pedale del circolo, ecc., si può considerare come una concoide derivata da esso e però i concoidografi si possono considerare pure come *chiocciolografi* o *conchigliografi* (v. oltre) quando la curva *base*, della quale descrivono la concoide, è il circolo.

Curve cissoidali. — Se nel sistema articolato della fig. 346 si fissano i punti A, E, la punta tracciante B descriverà una cissoide. Con compassi analoghi a quello sopra indicato si possono tracciare la cissoide, la strofoide e la trisettrice come curve *inverse* delle coniche rispetto al vertice preso come polo.

Si può ottenere lo stesso risultato, ma più semplicemente, con la disposizione della fig. 347 nella quale si fissano i punti G ed M, e C è la punta tracciante.

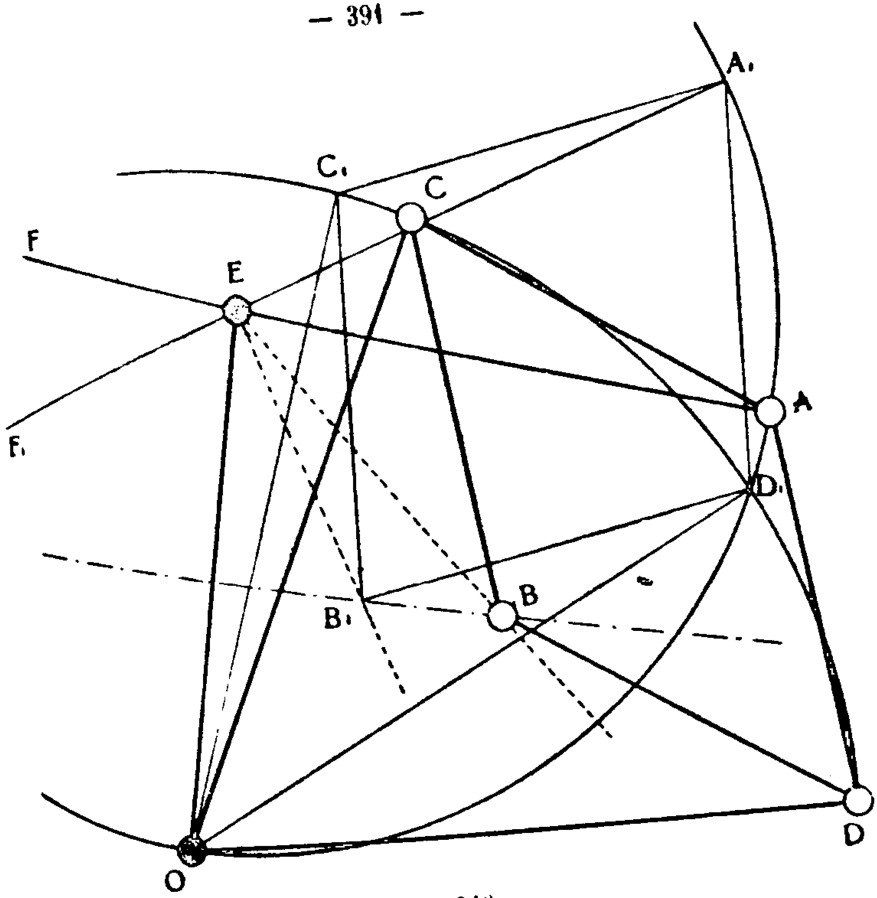


Fig. 346.

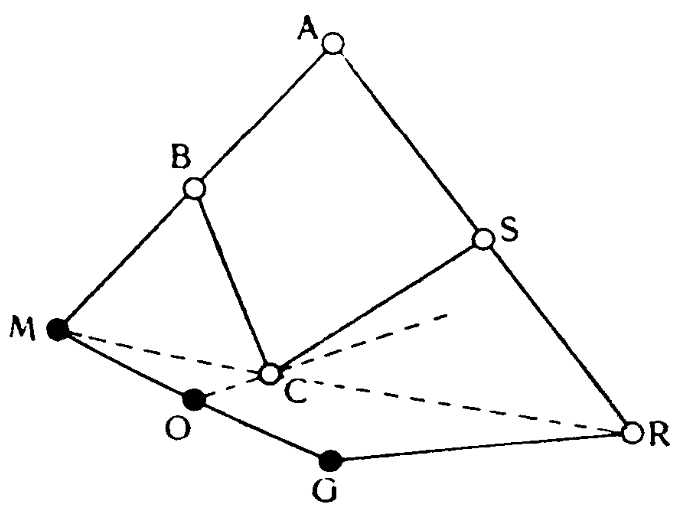


Fig. 347.

Conchigliografi. — Con questo nome vengono designati i sistemi articolati atti al tracciamento delle curve dette *Chiocciole di Pascal.* Si possono trasformare in conchigliografi i compassi già descritti come ellissografi, introducendovi lievi modificazioni.

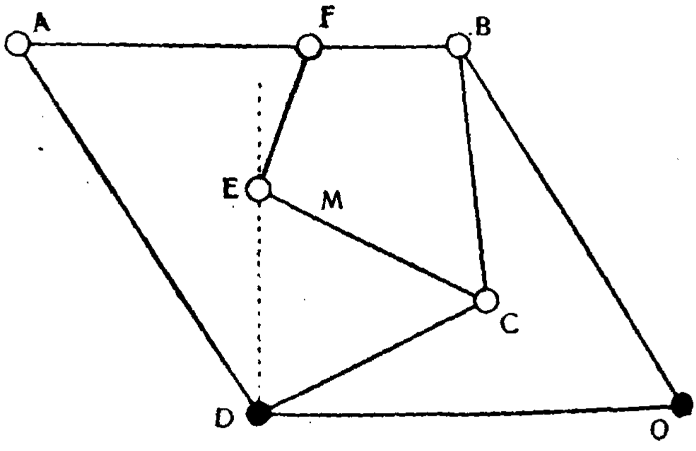


Fig. 348.

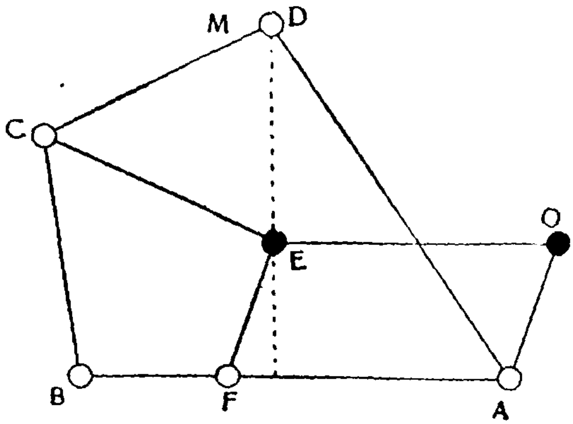


Fig. 349.

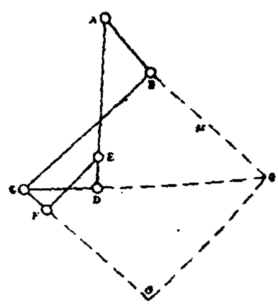


Fig. 350.

In quello della fig. 348 si rende fissa la sbarra CE; nella fig. 349 la CD; nella 334 la AD; nella 350 la EF; nella 335 la EF e nella 336 la GF, (1).

(1) Vedasi pure « *Concoidografi* » pag. 390.

Meccanismi articolati.

Il *proiettore* consiste in una losanga articolata, nella quale due lati adiacenti sono prolungati d'una medesima lunghezza arbitraria. Se le due estremità libere del meccanismo percorrono una retta, i due vertici della losanga restano costantemente su d'una stessa retta normale a quella e il quoziente delle loro distanze da questa retta resta costante. Per conseguenza se il vertice superiore descrive una curva piana qualsiasi, il vertice inferiore descriverà la proiezione di questa curva su d'un piano. Si possono costruire ellissografi iperbolografi, ecc. su questo principio.

Altri apparecchi del genere, quali l'*inversore* e la *manovella duplicatrice* sono più complicati.

Cinegrafo.

Una lavagna A è munita d'una rotaia sulla quale scorre un carrello di due ruote B, B'. La B' è folle, mentre la B è fissa

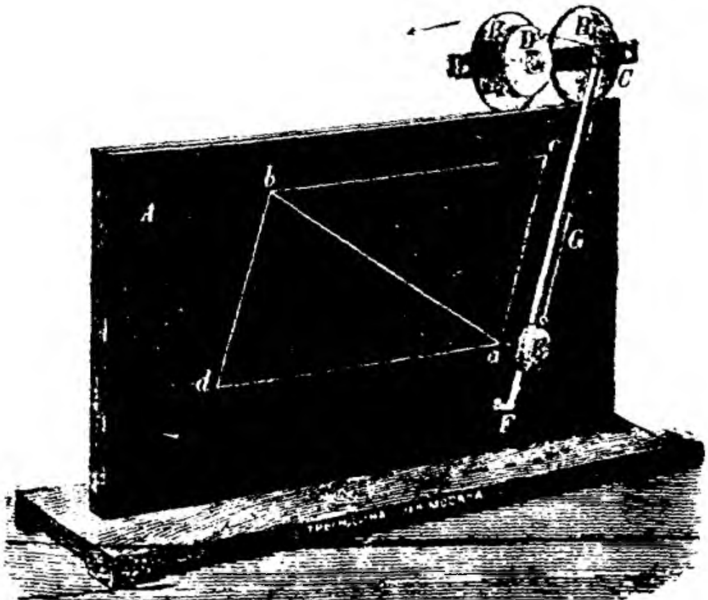


Fig. 351.

sul proprio asse. Quest'asse porta ad un'estremità una puleggia D che gira quando si sposta l'apparecchio sulla rotaia.

Sulla puleggia D è avvolto un filo G che passa sopra l'arco B' e porta una palla massiccia E. Questa scorre lungo la sbarra F che può venir fissata sotto angoli diversi. Questa palla rappresenta il corpo animato da due movimenti simultanei che si tratta di comporre. Una matita di gesso portata dalla palla traccia sulla lavagna il suo movimento risultante. Supponiamo messo in moto l'apparecchio secondo la freccia. La palla E sale lungo la sbarra F; è il moto *relativo*.

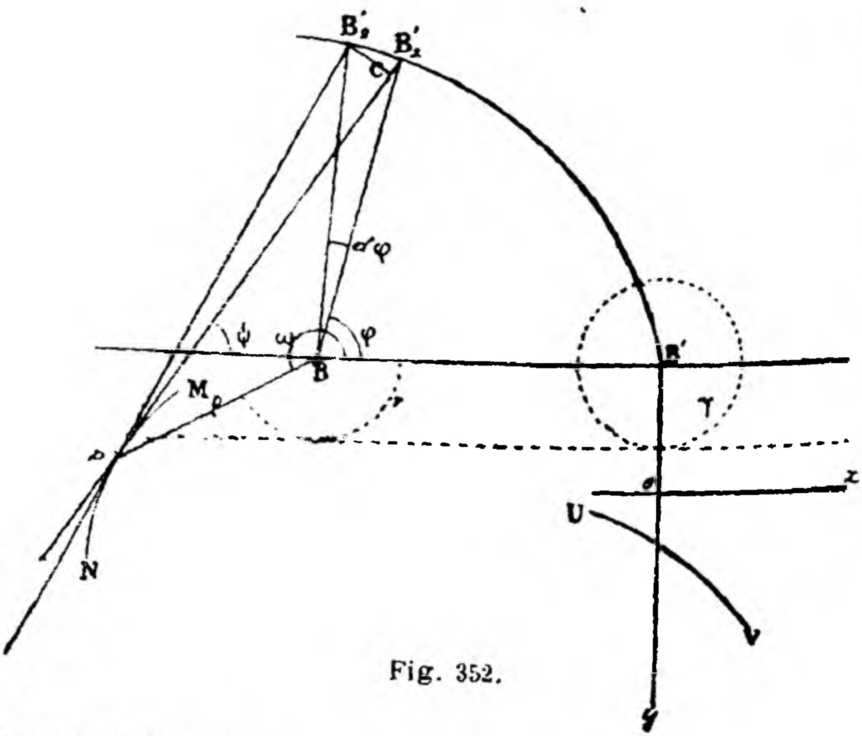


Fig. 352.

L'altro movimento componente è quello di traslazione della sbarra stessa. Il moto assoluto è rappresentato dalla retta *ab* che la palla traccia sulla lavagna. Comunicando alla palla gli stessi movimenti, uno dopo l'altro, si tracciano, due lati del parallelogramma *ac* e *cb* oppure *ad* e *db* secondo l'ordine nel quale si prendono questi due movimenti.

Si ha in questo modo una dimostrazione grafica della composizione di due forze non parallele.

Ma quest'apparecchio si presta al tracciamento di qualsiasi curva, $y = F(x)$, per ottenenere le quali non si ha che da studiare opportunamente il profilo della puleggia MN (fig. 352) da fissare sull'asse della ruota B.

Ecco la teoria del cinegrafo, secondo Boleslao Mlodzieiowski dell'università di Mosca.

Supponiamo la ruota B con la puleggia MN immobili nello spazio, con l'origine delle coordinate polari in B. Allora:

$$(1) \qquad x = r\varphi$$

L'equazione di pB_1' (posizione del filo) è:

$$(2) \qquad \rho \operatorname{sen}(\omega - \psi) = l \operatorname{sen}(\varphi - \psi)$$

Nel triangolo elementare $CB'_1\,B'_2$:

$$(3) \qquad \frac{C\,B'_1}{B'_1\,B'_2} = \operatorname{sen}(\varphi - \psi) = \frac{r\,dy}{l\,dx}$$

Tenendo conto di (1) possiamo supporre:

$$(4) \qquad \frac{dy}{dx} = f(\varphi)$$

Introduciamo (3) e (4) in (2):

$$(5) \qquad \rho \operatorname{sen}(\omega - \psi) = r f(\varphi)$$

MN, come inviluppo di pB'_1, pB'_2.... si trova per mezzo di (5) e (6):

$$(6) \qquad \rho \cos(\omega - \psi) = r\,\frac{f'(\varphi)\cos(\varphi - \psi)}{f'(\varphi) - \cos(\varphi - \psi)}$$

Dalla quale:

$$(7) \qquad \operatorname{tang}(\omega - \psi) = \operatorname{tang}(\varphi - \psi) - \frac{f(\varphi)}{f'(\varphi)}$$

Così, nel caso d'una retta:

$$y = Cx$$

avremo

$$f(\varphi) = a \qquad\qquad e\ f'(\varphi) = o$$

da cui

$$\rho = ar$$

Nel caso d'una parabola:

$$y = Cx^2$$

avremo:

$$(8) \qquad f(\varphi) = a\varphi$$

e così di seguito.

Nondimeno, per la costruzione del profilo MN è preferibile di non usare l'equazione polare, ma di seguire un procedimento più semplice, cioè:

Le equazioni (5) e (8) danno:

$$\text{sen}\,(\omega - \psi) = D\,\varphi$$

Vale o dire che il seno dell'angolo $B\,B'_1\,p$ è proporzionale all'angolo φ, che si prende come variabile indipendente.

Sferografo. — *Se tre punti fissi d'una retta* m *si muovono « sopra sfere aventi i centri in linea retta, ogni altro punto « di tale retta* m *descriverà una sfera, per modo che con op- « portuna scelta di dati, un certo punto di essa retta descri- « verà un piano ».*

Questo teorema di Darboux può servire per descrivere una sfera il cui centro sia inaccessibile o il cui raggio sia grandissimo. In base a tale teorema il *piano* può essere descritto mediante un sistema di quattro sbarre.

Ellissoidografo. — Si può definire la superficie dell'ellissoide come il luogo dei punti d'una retta, tre punti fissi della quale descrivono dei piani. Ciò posto, in base a quanto si è detto relativamente allo sferografo, si potrà descrivere la superficie ellissoidale mediante un apparecchio composto di dodici sbarre.

SULLA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI DI GEOMETRIA CON ISTRUMENTI ELEMENTARI

Per istrumenti elementari s'intendono la *riga*, il *compasso*, la *riga a due orli paralleli*, la *squadra* e la *falsa squadra*.

L'uso della *riga* permette di effettuare (nel piano) tutte le costruzioni lineari, cioè il tracciamento di rette e la determinazione delle loro mutue intersezioni.

I problemi più elevati esigono altre costruzioni che non sono più effettuabili con la sola riga. Queste costruzioni consistono generalmente nel tracciamento di *curve* più elevate della retta e il tracciamento di esse si può far dipendere dall'uso di strumenti di disegno più complessi della riga.

I problemi costruttivi si possono dunque classificare secondo questi due criterii :

1°. La natura delle curve dal cui tracciamento si può far dipendere la risoluzione domandata (1).

2°. La natura degli strumenti atti al tracciamento delle nominate curve.

Col primo criterio si considera la *semplicità geometrica* delle curve ; col secondo la *semplicità meccanica* del tracciamento.

Nella geometria analitica abbiamo poi un terzo criterio riguardante la natura delle operazioni di *calcolo*, algebriche o trascendenti, dalle quali si può far dipendere la soluzione che si cerca.

Secondo tutti e tre i criteri indicati si presentano in primo luogo i problemi di 1° grado (grafici e metrici).

---

(1) *Enriques Federico.* — Lezioni di Geometria proiettiva.

Si possono collocare subito dopo i problemi di 2° grado (grafici e metrici). Invero:

1°. Le costruzioni che occorrono per la soluzione di essi dipendono dalle intersezioni delle rette del piano con un cerchio fisso, di dato *centro*; ed il cerchio è, sotto molti aspetti, la linea più semplice dopo la retta.

2°. Il tracciamento del cerchio occorrente all'uopo si può effettuare nel disegno con lo strumento *compasso* che è uno dei più semplici dopo la riga.

3°. La risoluzione analitica di tali problemi dipende da una equazione del 2° grado (e da equazioni del 1° grado) ossia, richiede soltanto *l'estrazione* d'un radicale quadratico (ed operazioni razionali sulle quantità che corrispondono agli elementi dati); una siffatta estrazione è l'operazione *irrazionale* più semplice che comparisca nell'algebra.

Ai problemi di 2° grado si possono collegare quelli che, senza essere di 2° grado, si riducono però a successivi problemi di 2° grado; ossia i problemi che si risolvono nel disegno coll'uso di una conica *fondamentale* fissa, la quale, nel caso dei problemi metrici si suppone essere un cerchio di cui è dato il centro. E questi problemi sono evidentemente risolubili con *riga* e *compasso*; ma, viceversa, non è chiaro a priori che tutti i problemi costruttivi risolubili con la riga e col compasso si riducano a successivi problemi di 2° grado, e si risolvano quindi coll'uso della riga e d'un cerchio fisso di dato centro.

Tale fatto può *tuttavia* essere stabilito. Basta notare che l'uso degli strumenti — *riga* e *compasso* — corrisponde alla possibilità di risolvere i due problemi fondamentali seguenti:

1° determinazione delle intersezioni di un cerchio con una retta;

2° determinazione delle intersezioni di due cerchi.

Ora, il primo si riconduce (nel caso più generale di una conica qualsiasi) alla determinazione delle *intersezioni* d'una retta col cerchio fondamentale fissato a priori (1).

Il secondo problema si riduce al precedente, bastando sostituire ad uno dei cerchi l'asse radicale dei due, il quale si costruisce linearmente.

Resta così stabilito che: *Tutti i problemi costruttivi determinati, che sono risolubili con riga e compasso, si possono*

---

(1) Vedi Opera citata.

risolvere con la sola riga e coll'uso di un cerchio fisso di dato centro.

F. Severi ha poi dimostrato (1) come: *Tutti i problemi determinati, risolubili con la riga e col compasso, si risolvono coll'uso della riga e di* un arco *di circolo di dato centro.*

Se si tratta d'un problema *grafico* il centro del dato arco non interviene nella costruzione, e non è quindi necessario; mentre se si tratta d'un problema *metrico*, che si voglia risolvere con la sola riga, occorre introdurre fra i dati l'*assoluto*, il quale viene determinato assegnando anche il centro dell'arco.

Invece di considerare il cerchio come *conica-luogo* lo si può supporre dato come *conica-inviluppo*, ossia supporre possibile l'operazione del condurre per un punto esterno le tangenti al cerchio fondamentale, invece dell'operazione correlativa del segare il cerchio con una retta; si potrà allora riguardare come *dato* un *cerchio-inviluppo*, quando invece del compasso, (2) si possegga lo strumento *riga a due orli* (paralleli s' intende) col quale evidentemente si possono appunto condurre le tangenti da un punto esterno al circolo che abbia la larghezza della detta riga.

Dunque: *Tutti i problemi costruttivi determinati, che si possono risolvere con la riga e col compasso, si possono anche risolvere con la sola riga a due orli.*

Dopo i problemi di secondo grado, o riducibili a problemi di secondo grado, i quali si possono risolvere determinando le mutue intersezioni di rette e di cerchi, vi sono altri problemi, più elevati, che non si possono più risolvere nello stesso modo. Tali i classici problemi della trisezione dell'angolo, della duplicazione del cubo, della quadratura del circolo.

È ora stabilito che la soluzione di essi, come era domandata dai Greci, cioè col solo uso della riga e del compasso, non è possibile; e si sono trovati d'altra parte, sia dai Greci stessi, sia dai Moderni Geometri, strumenti più complessi atti ad ottenerla.

Pei due primi problemi, che sono del terzo grado, basta il

---

(1) Complementi di Geometria proiettiva. pag. 302.

(2) Poncelet prima, e poi Steiner, hanno dimostrato come tutte le costruzioni eseguibili con riga e compasso si possano eseguire con la sola riga, quando sia dato nel piano della figura un cerchio fisso, col suo centro. E già Cardano, Tartaglia e De-Benedictis avevano riconosciuta la possibilità di risolvere i problemi della Geometria di Euclide con la riga ed una sola apertura *costante* di compasso.

tracciamento di coniche, e quindi uno strumento (compasso ellittico, iperbolico o parabolico) atto a tracciare queste curve.

L'ultimo, trascendentale, richiede invece linee o strumenti più elevati, ma si risolve anch'esso, nel disegno, coll'*integrafo*, strumento ideato da Abdank-Abakanowicz (1).

Per limitarci al piano (2), le relazioni metriche si possono tutte esprimere mediante i concetti di *parallelismo* e di *perpendicolarità*. Il parallelismo di due rette si traduce nella proprietà di esse d'intersecarsi sopra una retta particolare, la retta dell' *infinito* del piano. La perpendicolarità di due rette, o meglio di due direzioni, si traduce in una particolare relazione dei punti dell'infinito corrispondenti, i quali debbono essere coniugati in una certa *involuzione* che è l'*involuzione assoluta* sulla retta all'infinito del piano.

La retta all'infinito e l'involuzione assoluta su di essa, costituiscono gli enti metrici *fondamentali* del piano o, brevemente, l'*assoluto*; tutte le relazioni metriche equivalgono a relazioni grafiche coll'assoluto e quindi tutti i problemi metrici si riducono a problemi grafici quando fra i *dati* si pongono anche gli enti costituenti l'assoluto (o, in casi speciali, una parte di essi), assegnando nel piano qualche *figura fondamentale*.

Per le costruzioni di parallele basta dare come figura fondamentale un parallelogramma, cioè due coppie di rette parallele. Per le costruzioni ove entra anche la nozione di perpendicolarità, occorre aggiungere *due coppie di direzioni ortogonali* (individuanti l'involuzione assoluta); allora si risolvono con la sola riga tutti i problemi metrici di primo grado.

In particolare questi problemi metrici di primo grado si risolvono con la sola riga quando è dato un *quadrato*, i cui lati e le diagonali forniscono appunto due coppie di direzioni ortogonali.

Già abbiamo veduto come i problemi di secondo grado (grafici e metrici) o ad essi riducibili siano risolubili con la sola riga quando si abbia nel piano, completamente tracciato, un circolo e il suo centro. In questo caso il circolo stesso (conoscendosi il suo centro), serve a dare gli enti metrici fondamentali del piano. Esso serve infatti a tracciare quante si vo-

(1) Vedansi i § nei quali si tratta della costruzione meccanica delle curve e quelli relativi ai tre problemi celebri.

(2) V. *Questioni riguardanti la Geometria elementare.* — Articolo nono, di Amedeo Giacomini.

gliano rette parallele (mediante coppie di diametri) e quante si vogliano coppie di rette perpendicolari fra loro.

Con la *squadra* e la *falsa squadra*, usate in modo conveniente, si perviene allo stesso risultato conseguibile con la riga a doppio orlo per cui si può concludere che:

I problemi risolubili con la riga e col compasso si possono anche risolvere con l'uso esclusivo della riga a due orli, della squadra, o della falsa squadra.

Lorenzo Mascheroni poi nella sua famosa « Geometria del compasso » (1797) ha stabilito tutti gli elementi per la dimostrazione della possibilità di risolvere col solo compasso qualsiasi problema risolvibile con riga e compasso; ma la dimostrazione di questo teorema è dovuta all'Adler (1890).

Un problema determinato dicesi di terzo grado quando, con proiezioni e sezioni, esso riducesi al problema fondamentale di trovare le intersezioni ulteriori di due coniche aventi un punto comune dato.

Un problema determinato dicesi di quarto grado quando, con proiezioni e sezioni può ridursi al problema di trovare le intersezioni di due coniche, delle quali non si conosce nessun punto comune.

Trattati analiticamente, i problemi di terzo grado conducono ad una risolvente cubica, e quelli di quarto grado ad una risolvente biquadratica.

Dal punto di vista geometrico: *Ogni problema determinato di terzo o quarto grado, si può risolvere con la riga e col compasso, purchè sul foglio del disegno sia tracciata una conica diversa dal circolo* (1), *od anche soltanto un arco, comunque piccolo, di essa.*

Con la sola riga.

Il campo delle costruzioni che si possono eseguire coll'uso della sola riga, ossia *tracciando unicamente delle rette*, senza che nel piano della figura siano date altre figure geometriche, è limitato, ma assai interessante e utilissimo in pratica, specialmente in Topografia.

---

(1) Severi. Complementi di Geometria proiettiva, pag. 363.

Schooten e Brianchon furono i primi a proporsi la soluzione di taluni problemi con la sola riga.

Darò solamente un cenno di costruzioni di questo genere che richiedono alcune nozioni di Geometria proiettiva (teoria delle trasversali).

I. — *Date due rette* a , b *il cui punto d'incontro cada fuori del foglio, condurre per un punto dato* X *una retta che passi per detto punto inaccessibile* (fig. 353).

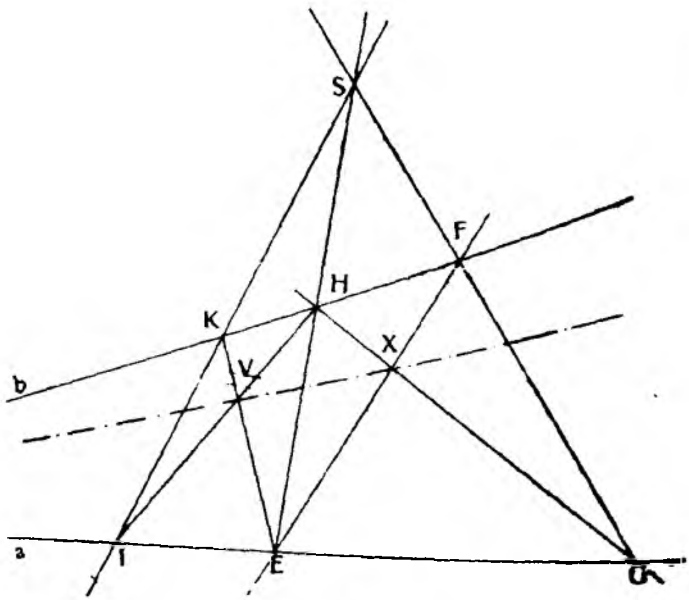


Fig. 353.

Per X conduco due rette ad arbitrio che segheranno in E, F, G, H, le date a e b; conduco le congiungenti E , H ed F , G che s'intersecano in S. Da S traccio un'altra retta qualunque che seghi a in I e b in K. L'intersezione V delle congiungenti E , K ed H , I sarà un secondo punto della retta cercata.

II. — *Dati due punti* H , K *d'una retta, supposta intracciabile, determinarne quanti altri si vogliano, coll'uso della sola riga.*

Conduciamo (fig. 354) due rette qualunque *m* , *m'* e congiungiamo un punto *L* d'una di esse *m*, coi punti dati *H* *K*. Otterremo così sulla *m'* i punti *M'* , *N'*. Conduciamo per *K* una retta qualunque che ci darà i punti *N* sulla *m* ed *L'* sulla *m'*. La

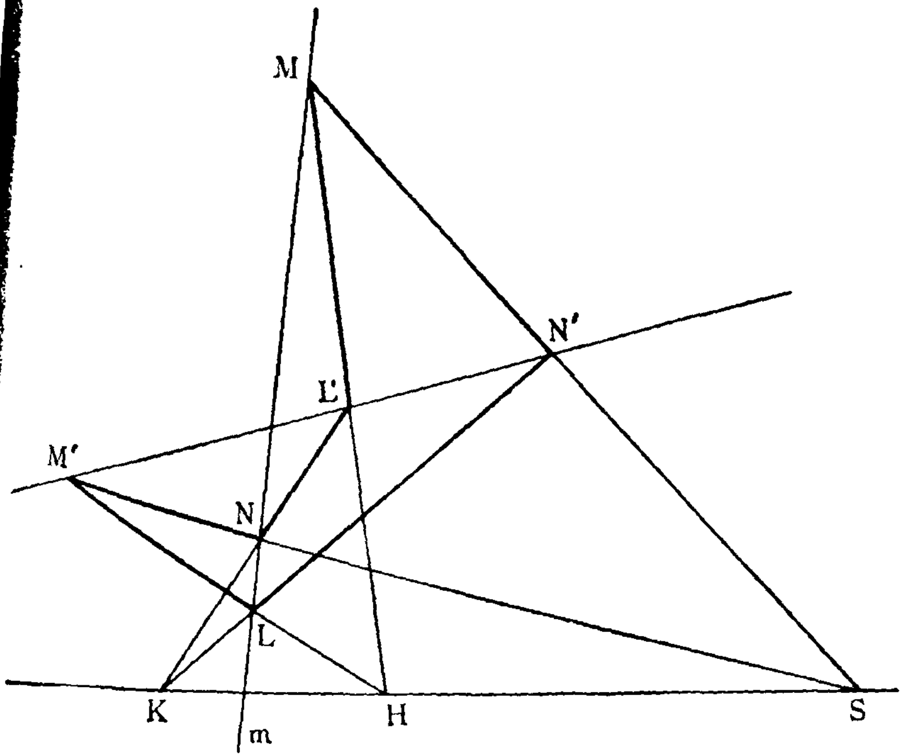


Fig. 354.

H L' determinerà *M* sulla *m*. Proiettando allora *N* da *M'* ed *N'* da *M* avremo il punto *S* che appartiene alla *K H* per un noto teorema (1).

Passiamo ora ad alcuni problemi che si risolvono coll'uso della sola riga, quando sia data una certa figura nel piano.

III. — *Dato un parallelogramma* U , V , X , Y *ed una retta* m, *condurre per un punto dato* P *la parallela alla* m, *usando la sola riga.*

---

(1) V. *Cremona*. Elementi di Geometria proiettiva, N. 68.

Prolungati i lati (fig. 355) e una diagonale del parallelogramma fino a segare in T, W, R, S, O la m, proiettiamo da P i punti R, S e conduciamo per O una segante qualunque che determinerà i punti Q, K sulle PR, PS. Le rette WQ, TK si segheranno in Z che apparterrà alla retta cercata (1).

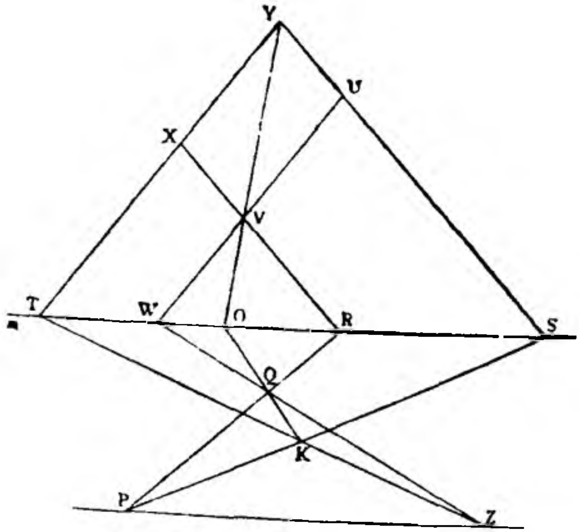


Fig. 355.

IV. — *Dato un circolo e il suo centro* O, *condurre da un dato punto* M *una tangente al circolo e determinare su questa due punti* X, Y, *equidistanti da* M, *facendo uso della sola riga* (fig. 356).

Si costruisce la polare TR di M che determina il punto di tangenza T; si conducono la tangente MT, il diametro TOS e la MS. Basterà allora costruire la polare di un qualsiasi punto F della MS; essa segherà il circolo in D ed E, che proiettati da S determineranno sulla tangente i punti X, Y cercati. A rigore, non essendo stabilita la distanza MX, potrebbe servire la polare stessa del punto M che permette di avere il punto U simmetrico di T rispetto ad M.

---

(1) V. *Cremona*. Elementi di Geometria proiettiva, N. 89.

V. — *Dato un triangolo* S X Y *ed un circolo avente per diametro l'altezza* S T *del triangolo, costruire, con la sola riga, la mediana* S M *del triangolo stesso.*

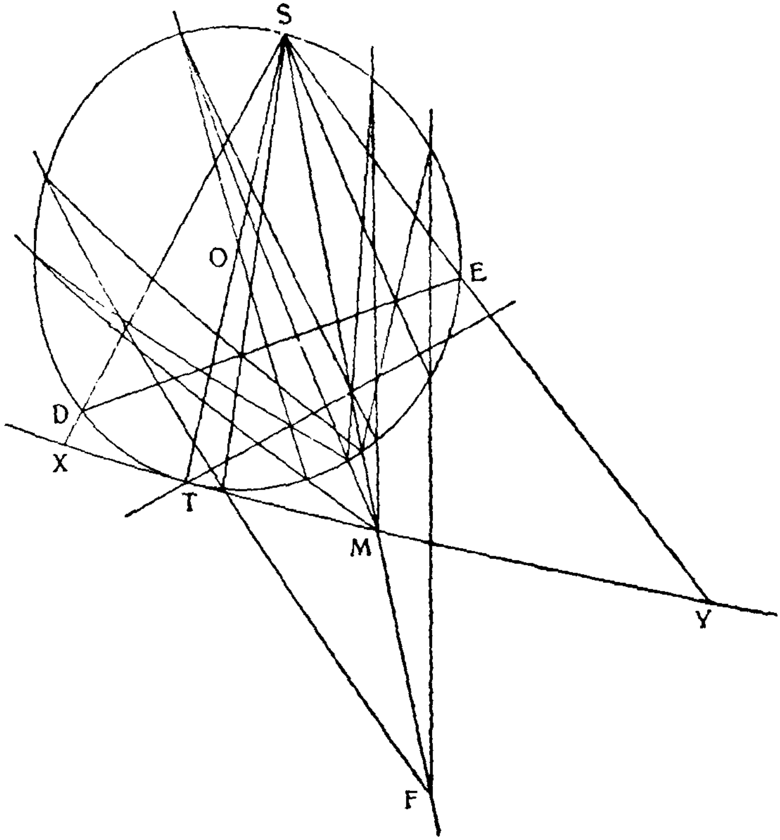


Fig. 356.

Siano D, E (fig. 356) i punti nei quali i lati SX, SY del triangolo segano la circonferenza. Basterà costruire il polo F di DE e unirlo con S per avere M.

VI. — *Data una circonferenza e il suo centro, inscrivere in essa il quadrato, coll'uso della sola riga.*

Conduco un diametro qualunque AB, da A una retta qualunque x e da B un'altra qualunque y; esse intersecheranno la circonferenza nei punti C, D che uniti con A, B daranno F; la $E\,F$ sarà perpendicolare sul diametro $A\,B$ (V. *Polarità*). Il diametro $L\,O$ determinerà M simmetrico di G rispetto al diametro perpendicolare ad $A\,B$; quindi condotte $A\,G$, $B\,M$ avremo in H un punto di tale diametro che sarà $N\,P$ e ci darà il quadrato iscritto voluto $A\,P\,B\,N$.

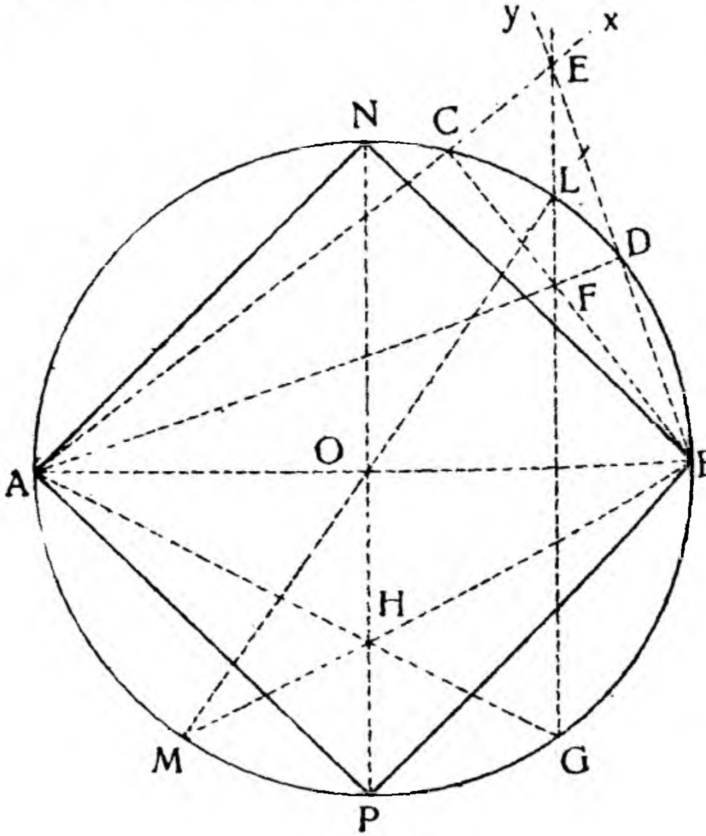


Fig. 357.

VII. — *Iscrivere nel circolo i poligoni regolari di 3 - 4 - 6 - 8 - 12 - 16 - 24 - 48, ecc., lati usando la sola riga*

Si cominci col tracciare (fig. 358) due diametri perpendicolari, nel modo indicato nel N.° VI. Si determinino (1) i punti

(1) I problemi ausiliarii riguardanti la divisione d'un segmento di retta in due parti uguali, e il tracciamento d'una parallela ad una retta data, per un punto dato, sono tra i più elementari della Geometria proiettiva.

medii M, N, P, Q dei raggi OA, OC, OB, OD, e si conducano le rette MN, NP, PQ, QM nonchè le parallele ad esse dal centro O, e le parallele da N e Q al diametro AB. Si avranno così i poligoni regolari iscritti:

Triangolo	D E F
Quadrato.	A C B D
Esagono	C F G D H E
Ottagono.	C L B R D S A I
16 lati	A T I U C . . . .

È facile vedere come sia facile ottenere con costruzioni analoghe i poligoni di 12 - 24 - 48, ecc. lati.

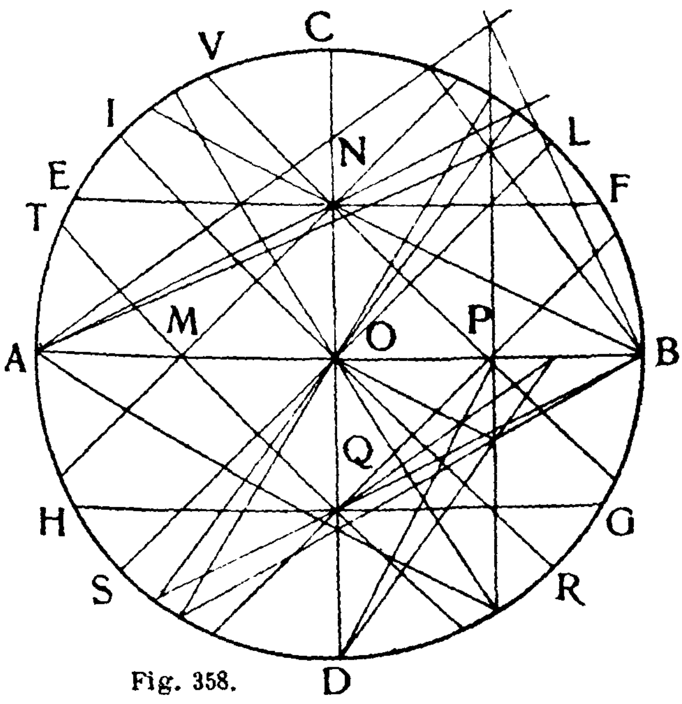


Fig. 358.

VIII. — *Iscrivere nel circolo il pentagono regolare.*

Soluzione. — Come ho già notato precedentemente (v. nota a pag. 406) le costruzioni con sola riga richiedono la ripetizione di costruzioni che sono tra le più elementari della Geometria proiettiva e che non ho tracciato nella fig. 359, accennando solo al procedimento da seguire.

Prima costruzione. — Comincio col tracciare due diametri perpendicolari $A\,B$, $C\,D$ (V. Probl. N. VI).

Determino E punto medio di $O\,C$.

Conduco la bisettrice dell'angolo $F\,O\,A$, determinando il punto medio della corda $A\,F$ mediante un quadrangolo completo del quale le parallele $A\,F$ $B\,Z$ sono due lati.

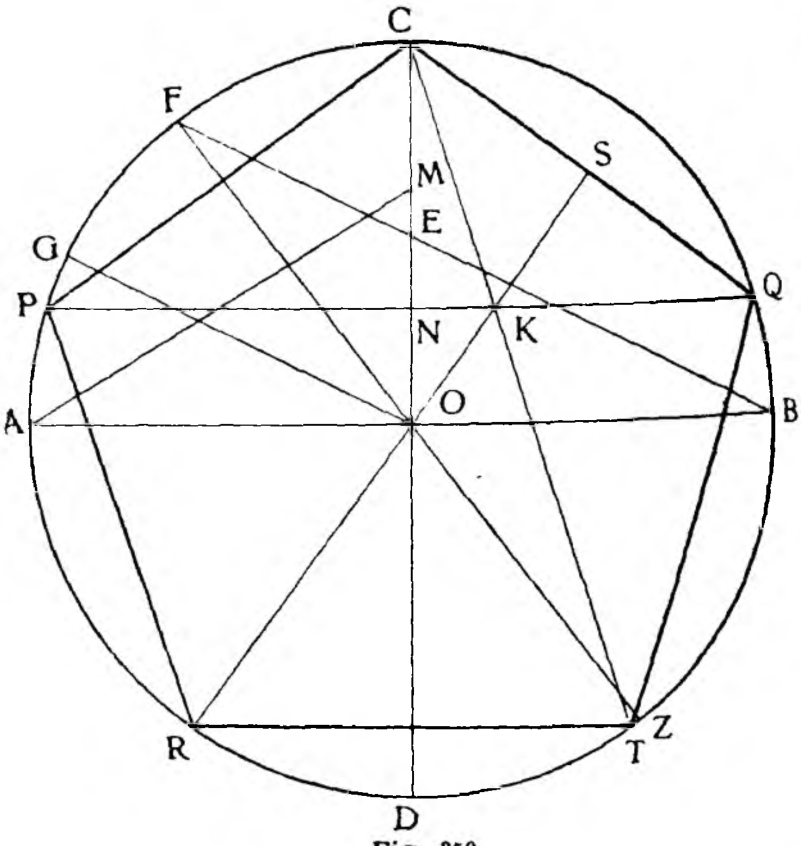


Fig. 359.

Da A conduco la parallela alla $G\,C$, valendomi delle parallele $G\,C$, $H\,D$.

Avrò così $A\,M$ lato del pentagono cercato ed $M\,O$ lato del decagono.

Detemino il punto medio N di $M\,O$ e da esso conduco la parallela ad $A\,B$, valendomi delle parallele già costrutte per trovare $C\,D$.

Avrò così P e Q vertici del pentagono.

Determino S punto medio di $C Q$ e conduco $S O R$.

Determino infine il quinto vertice T mediante la $C K$.

Seconda costruzione. — Conduco due diametri perpendicolari $A B$, $C D$ e la tangente in D.

Determino S punto medio di $O B$.

Conduco $S F$ parallela a $C D$ e $R O F$.

Portando $F D$ da F in M avrei $O M$ uguale al lato del decagono iscritto. Posso ottenere M conducendo la bisettrice di $D F M$ (o di $A O R$ che gli è uguale) e abbassando poi su di

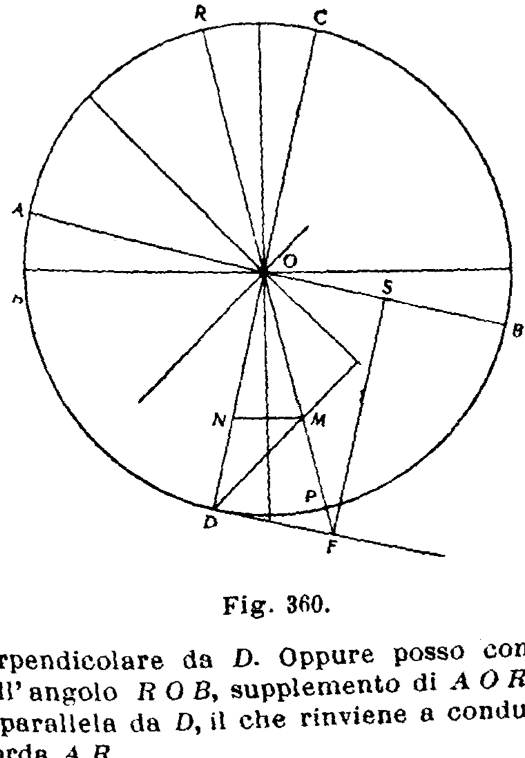


Fig. 360.

essa la perpendicolare da D. Oppure posso condurre la bisettrice dell'angolo $R O B$, supplemento di $A O R$, e condurre ad essa la parallela da D, il che rinviene a condurre la parallela alla corda $A R$.

Occorre ora portare il segmento $O M$ da O in N; il che posso ottenere, analogamente a quanto si è veduto sopra, conducendo da M la parallela alla corda $D P$.

Procedo poi come nella costruzione precedente.

IX. — *Dato un rettangolo* A B C D, *trovare, con l'uso della sola riga, la metà, il terzo, il sesto d'uno dei suoi lati per esempio* A B.

Conduco per B la $B\,M$ qualunque; conduco poi $A\,N$, $B\,D$; $M\,Z$ mi darà E punto medio di $A\,B$. Le diagonali $B\,D$, $A\,C$

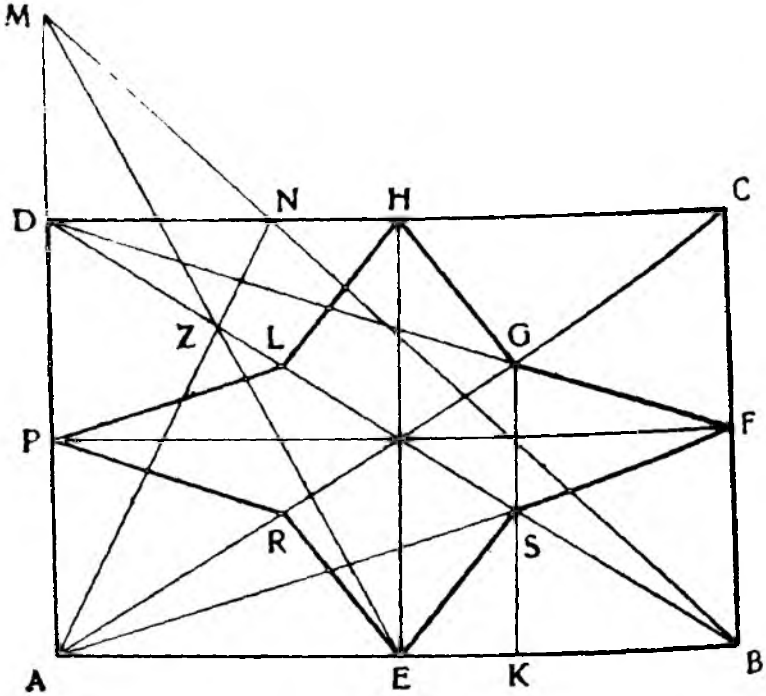


Fig. 361.

e le rette $F\,A$, $F\,D$ danno G ed S che uniti determinano K.

Ora è facile vedere che $E\,K = \frac{1}{6}\,A\,B$ e $B\,K = \frac{1}{3}\,A\,B$.

Si può osservare che la superficie della stella $P\,R\,E\,S\,F\,G\,H\,L\,P$ è un terzo di quella del rettangolo dato.

Col solo compasso.

Ogni problema risolubile con la riga e col compasso, può risolversi col solo compasso, quando, beninteso, il problema s'intenda risolto allorchè si siano ottenuti due punti di ciascuna retta che, eventualmente, figuri tra gli elementi incogniti (1).

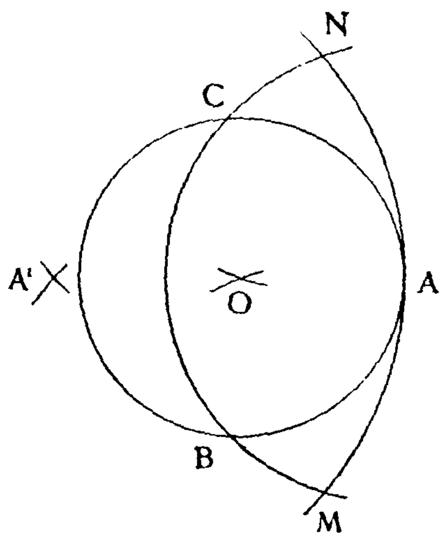
(1) Vedasi la dimostrazione di questo teorema fondamentale nella Geometria proiettiva di F. Severi, pag. 187.

Mascheroni, nel 1797, pubblicò la sua celebre *Geometria del compasso*, nella quale, ritenendo graficamente più esatte le costruzioni nelle quali si fa uso del solo compasso, che non quelle eseguite col sussidio della riga, si propose di eseguire col *solo compasso* tutte le costruzioni fino allora praticate con detti strumenti. Ma nella teoria si prescinde da considerazioni di esattezza *grafica*, che il Lemoine ha voluto sottoporre a minuto esame nella sua Geometrografia unitamente alla semplicità delle costruzioni.

Chasles (1) chiama il libro del Mascheroni, originale e curioso, e aggiunge: « Cette géométrie est plus riche et plus « étendue que celle de la règle, parce qu'elle embrasse les « problèmes du second degré qui sont tous ceux qui forment « le demaine de la géométrie ordinaire. Mascheroni fait voir « qu'elle s'applique aussi, avec facilité, à la solution approxi- « mative des problèmes qui dépendent des sections coniques « et d'une géométrie plus relevée ».

I. — *Trovare il centro d'un circolo.* Dal punto A della circonferenza, con raggio arbitrario, descrivo un arco che la sega

Fig. 362.



in B e C. Dati tali punti come centri, e con lo stesso raggio, descrivo due archi che si segano in A' simmetrico di A rispetto alla retta $B\,C$ supposta tracciata. Da A' come centro,

(1) Aperçu historique, pag. 214.

con raggio $A\ A'$ descrivo un circolo che sega in M, N l'arco $B\ C$ prolungato. Da M ed N come centri, con raggio uguale alla distanza $A\ B$ descrivo due archi che si segano in O simmetrico di A rispetto alla corda $M\ N$ supposta tracciata. Tale punto O è il centro cercato.

II. — *Iscrivere il quadrato nel circolo.* Portando tre volte il raggio sulla circonferenza da B in R, C, E si hanno gli

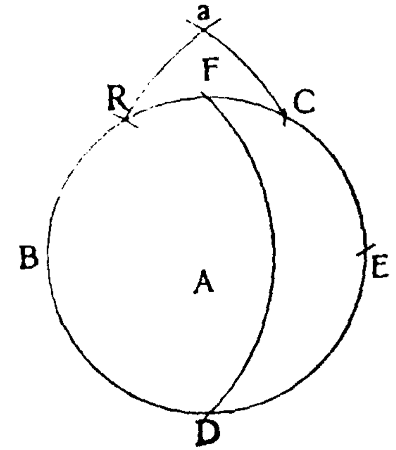


Fig. 363.

estremi B, E di un diametro; si descrivono allora i circoli (B, BC) (E, BC) che si segano in a; $A\ a$ è il lato del quadrato che basterà portare da B in F e D.

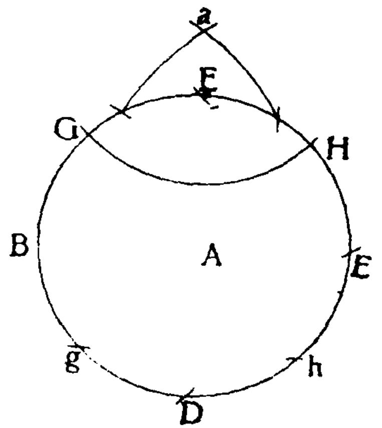


Fig. 364.

III. — *Iscrivere l'ottagono regolare nel circolo.* — Si procede come per iscrivere il quadrato, indi dal centro q si porta il raggio $A\ B$ in G e H ed $A\ a$ da G in g e da H in h.

IV. — *Iscrivere nel circolo il dodecagono regolare.* Iscritto il quadrato (fig. 365) si porta il raggio *A B* da *F* in *N* ed *O*, ecc.

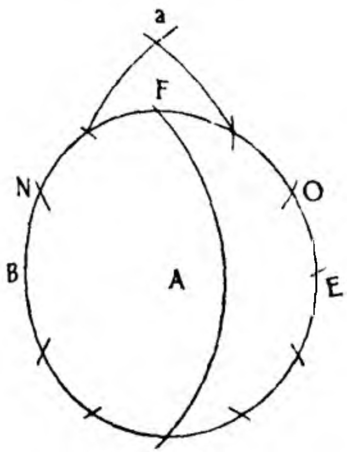


Fig. 365.

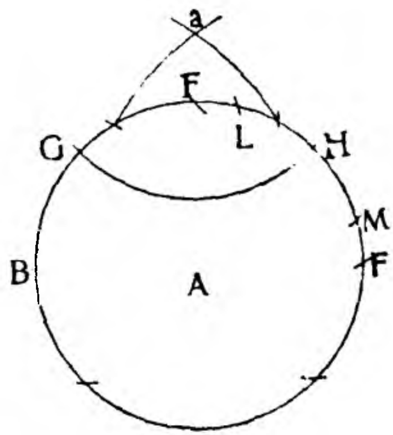


Fig. 366.

V. — *Iscrivere nel circolo il poligono di 24 lati.* Iscritto l'ottagono (fig. 366) si porta il raggio *A B* da *G* in *L* e da *L* in *M*, ecc.

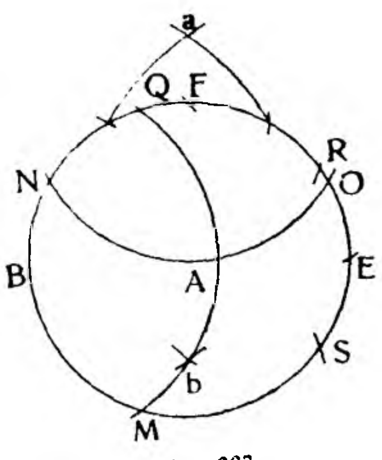


Fig. 367.

VI. — *Iscrivere il pentagono nel circolo.* Trovati i punti *N*, *O* (vertici del dodecagono) come nella fig. 367, si determina *b* con archi descritti da *N* ed *O* con raggio *A a*. Si ottiene così il lato *B b* del pentagono iscritto.

VII. — *Iscrivere nel circolo il decagono regolare.* Mediante la costruzione indicata per iscrivere il quadrato nel circolo determino il lato di detto quadrato $A\ M$. Con tale raggio de-

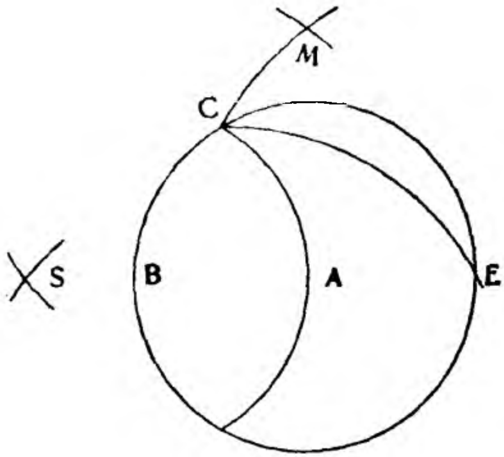


Fig. 368.

scrivo due archi, dai centri C e G, che si segano in S; ottengo così $B\ S$ uguale al lato del decagono regolare iscritto ed $A\ S$ uguale al lato del decagono regolare *stellato* iscritto (fig. 368).

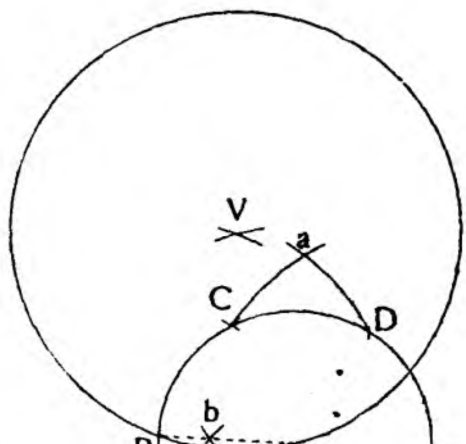


Fig. 369.

VIII. — *Dato il lato $A\ B$ costruire il decagono.* Descritto il circolo (A , AB) (fig. 369), si porta sulla sua circonferenza il raggio in C, D, E, d; si determina a con due archi di centri B, E e di raggio $B\,D$; si determina poi b con archi di centri D, d e di raggio $A\,a$; infine si trova V come intersezione di due archi di centri A e B e di raggio $b\,E$. Con lo stesso raggio $b\,E$ si descrive il circolo di centro V che sarà il circolo circoscritto al decagono di lato $A\,B$.

IX. — *Data la diagonale A B costruire il quadrato.* Con centro A e raggio $A\,B$ si descrive (fig. 370) la semi-circonferenza $B\,E$; con centro B e con lo stesso raggio si descrive l'arco $C\,P$, e si determina a nel solito modo con archi di centri B, E e di raggio $B\,D$. Si determina P con un arco di centro E e raggio $A\,a$. Risulterà $A\,P$ lato del quadrato cercato.

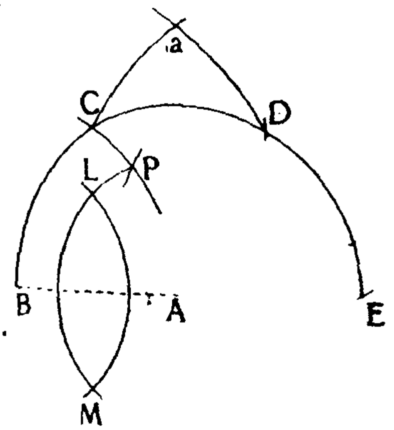


Fig. 370.

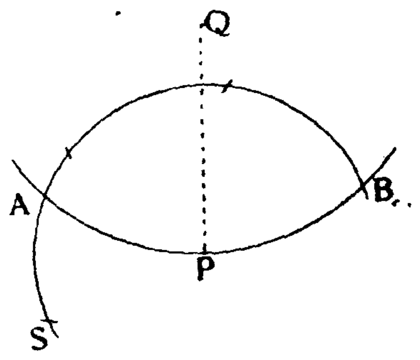


Fig. 371.

X. — *Trovare una terza proporzionale a due distanze $Q\,p$, $M\,N$ delle quali la prima $Q\,p$ maggiore della seconda.* Si descriva (fig. 371) un arco $A\,p\,B$ di centro Q e di raggio $Q\,p$; dal centro p, con raggio $M\,N$ si descriva la semi-circonferenza $B\,A\,S$; la distanza $A\,S$ sarà la terza proporzionale domandata, cioè si avrà:

$$p\,Q : p\,A = p\,A : A\,S$$

XI. — *Dato il lato AB costruire un poligono regolare di numero dato di lati, fra quelli che si possono iscrivere nel cerchio.* Si descriva (fig. 372) con raggio $A\,B$ la circonferenza di centro A e vi si iscriva nel modo indicato un poligono regolare simile a quello richiesto, per esempio un pentagono, e sia $B\,b$

il lato di questo poligono. Si cerchi una terza proporzionale fra $B\,b$ e il raggio $A\,B$ (vedi N. X.) vale a dire dai centri A, E con raggio $B\,b$ si descrivono due archi segantisi in X; il

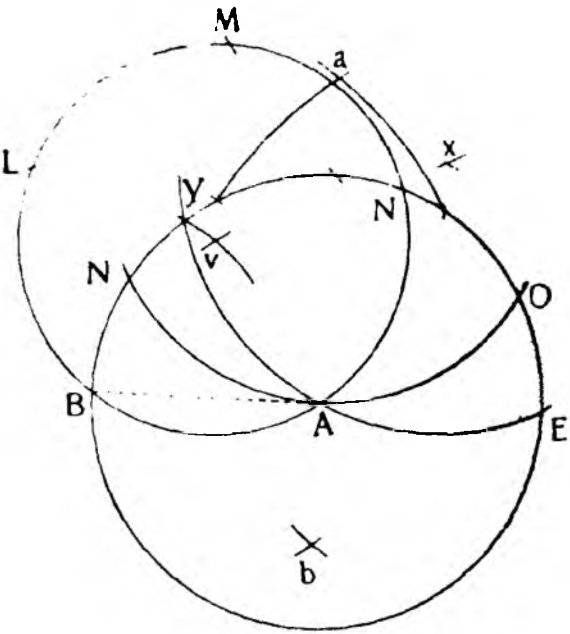


Fig. 372.

circolo di centro X e di raggio $B\,b$ segherà in Y il circolo $A\,B$ e risulterà:

$$X\,A : A\,B = A\,B : B\,Y$$

Con $B\,Y$ come raggio e dai centri A e B si determina il punto V. Il circolo descritto da V con raggio $B\,Y$ sarà il circolo circoscritto al pentagono $A\,B\,L\,M\,N$ di lato $A\,B$.

XII. — *Costruzioni di radici quadrate.* Segniamo i vertici B, C, D, E, H, G dell'esagono regolare iscritto. Con il raggio $B\,D$ descriviamo gli archi $M\,D\,H\,N$, $M\,C\,G\,N$, $D\,V$, $H\,V$. Portiamo $A\,M$ in $B\,F$ ed $A\,B$ in $F\,T$ (fig. 373). Avremo:

$A\,B = 1$ $\qquad$ $A\,M = \sqrt{2}$ $\qquad$ $B\,D = \sqrt{3}$

$B\,E = \sqrt{4} = 2$ $\qquad$ $E\,T = \sqrt{5}$ $\qquad$ $M\,V = \sqrt{6}$ $\qquad$ $C\,V = \sqrt{7}$

$M\,N = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ $\qquad$ $B\,V = \sqrt{9} = 3$ $\qquad$ $T\,V = \sqrt{10}$

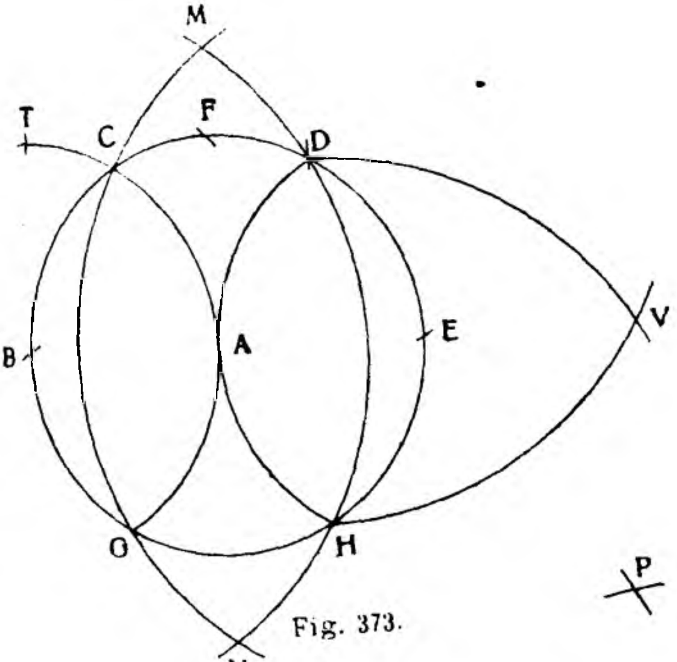


Fig. 373.

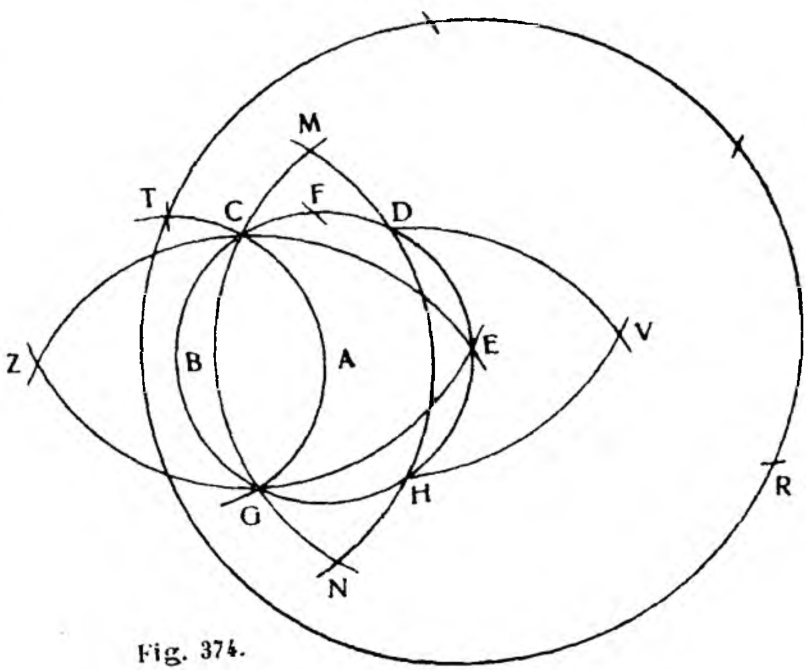


Fig. 374.

Volendo costrurre la $\sqrt{n}$ si sottrae n dal *quadrato* immediatamente superiore m^2 e sia $m^2 - n = k$.

Si descrive allora un circolo con raggio $\sqrt{k}$ di centro E, e dagli estremi d'un suo diametro T, R si tracciano con raggio m due archi che determinano P; sarà $EP = \sqrt{n}$.

Esempio. — Abbiasi la fig. 374 tracciata come la fig. 373 e vogliasi trovare $\sqrt{11}$. Si ha $16 - 11 = 5$; quindi da E con raggio $ET = \sqrt{5}$ si descrive il circolo e se ne segna l'altro estremo R del diametro TER. Da T ed R con raggio $VZ = 4 = \sqrt{16}$ si determina P e si ha così $EP = \sqrt{11}$.

XIII. — *Dati i punti di mezzo dei lati d'un poligono convesso, di numeri dispari di lati trovarne i vertici.* Se si costruisce il parallelogramma $FGHI$ sarà I il punto di mezzo

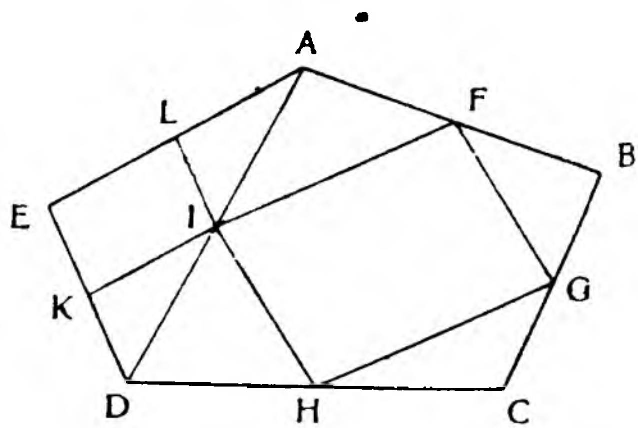


Fig. 375.

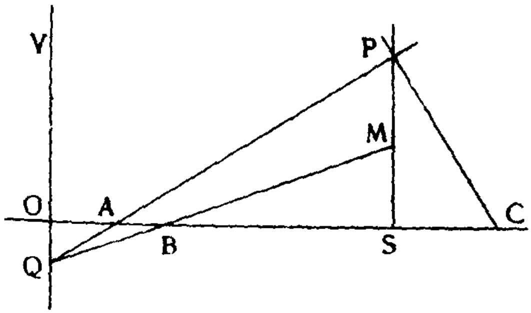
della diagonale AD. Si avrà quindi E come vertice opposto ad I nel parallelogramma $KILE$, AD come parallela a KL, ecc. Come si vede, il punto I si puc ottenere col compasso coi raggi FG, GH; parimente E; D coi raggi $ID = LK$ e $KD = KE$, ecc.

Analogamente si procederebbe per numero maggiore di lati.

Con riga e squadra.

Usando solamente riga e squadra si possono tracciare per punti molte curve quali le cubiche unicursali, le quartiche unicursali, ecc: Indicherò per alcune fra le più note di tali curve il *modo* di generazione che meglio si presta per costruirle con l'uso di detti strumenti esclusivamente. In generale è possibile del pari, imponendosi tale vincolo grafico, costruire la tangente, o le *tangenti*, in un punto dato della curva (1).

Fig. 376.



Consideriamo due rette ortogonali y e OC e su questa i punti A, B, C dati. Conduciamo per C una retta qualunque CP e da A la perpendicolare ad essa AP che segherà y in Q; la congiungente QC segherà la perpendicolare abbassata da P sulla OC in un punto M il cui luogo ha per equazione polare;

$$\rho \cos \omega = a - b + \frac{a^2 c}{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \omega}$$

nella quale:

$OA = a$ $\qquad OB = b$ $\qquad AC = c$ $\qquad BM = \rho$ $\qquad M\widehat{B}C = \omega$

L'equazione riferita ad assi ortogonali è:

$$x (a^2 x^2 + b^2 y^2) = (a + c - b)\, a^2 x^2 + (a - b)\, b^2 y^2$$

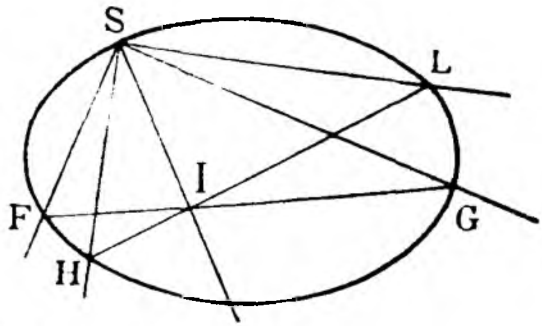
Essa è l'equazione generale delle cubiche unicursali rette, quando si assumono per origine il punto doppio e per asse

(1) G. de Longchamps « *Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre* ».

delle y l'asse di simmetria. Si possono ottenere molte cubiche notevoli, facendo variare la disposizione dei punti O, A, B, C.

La tangente in un punto M della curva si può determinare assai facilmente notando che le tangenti in P ed M ai luoghi descritti da questi punti si segano sulla retta QS (1).

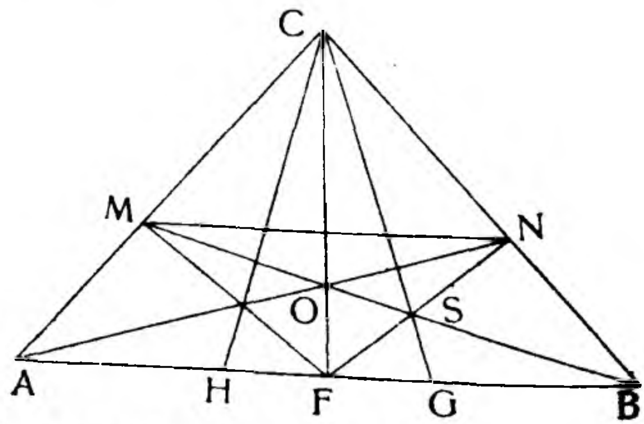
Fig. 377.



I. — *Condurre la normale in un dato punto S d'una conica.* È noto che se un angolo retto ruota attorno ad un punto S d'una conica come vertice, la corda intercetta nella conica passa per un punto fisso I situato sulla normale in S alla conica (fig. 377).

Basterà dunque considerare due posizioni FSG, HSL dell'angolo retto, per avere il punto I come intersezione delle corde FG, HL. La SI sarà la normale in S.

Fig. 378.



II. — *Dato un segmento di retta AB, dividerlo in tre parti uguali usando solamente riga e squadra.* Conduco (fig. 378) due

---

(1) Vedasi per altri esempii il § sulle « *Curve notevoli* ».

rette qualunque $A\,C$, $B\,C$ ed una parallela ad $A\,B$ che le sega in M, N. Unendo il punto O intersezione di $M\,B$, $N\,A$ con C si ha F punto medio di $A\,B$; e unendo S, intersezione di $M\,B$ ed $N\,F$, con C si ha G tale che $B\,G = \frac{1}{3}\,A\,B$. In modo analogo si trova l'altro punto H di trisezione di $A\,B$.

Osservazione. – Evidentemente, si ha $F\,G = \frac{1}{6}\,A\,B$. Applicando lo stesso procedimento alla trisezione di $B\,G$ si potrà dividere $A\,B$ in 9 parti uguali, in 18, ecc.

DIVISIONE DELLA CIRCONFERENZA IN PARTI UGUALI

Il problema della divisione della circonferenza del circolo in parti uguali venne studiato fin dalla più remota antichità, come era ben naturale.

Gauss ha dimostrato che tale divisione è possibile, con riga e compasso, per ogni numero primo della forma

$$p = 2^{2^m} + 1$$

mentre ò impossibile per tutti gli altri numeri primi e per tutte le potenze di numeri primi.

Così, per esempio, per $m = 2$ si ha $p = 2^{2^2} + 1 = 16 + 1 = 17$ dunque il poligono regolare di 17 lati si può iscrivere nel circolo con riga e compasso.

Così pure quello di $2^{2^3} + 1 = 257$ lati, quello di $2^{2^4} + 1 = 65537$ lati. Per:

$$m = 5 \qquad m = 6 \qquad m = 7$$

non si hanno numeri primi. Finora non si è constatato se per $m = 8$ si abbia o no un numero primo, e tanto meno lo si è fatto per $m > 8$.

La costruzione dei poligoni regolari di 7, 9, 13 lati, ecc., dipende da problemi di terzo grado, e siccome si dimostra che tutti i problemi di terzo grado si riducono a quello della trisezione dell'angolo, ne segue che i detti poligoni si possono costruire mediante riga, compasso ed un trisettore.

Per questi poligoni, ed anche per quello di 17 lati la cui costruzione regolare è eccessivamente lunga, si ricorre in pratica a costruzioni empiriche approssimate. Ma prima di passare a queste ne indicherò alcune di rigorose poco note, due relative al pentagono (1) ed una relativa al decagono.

Pentagono regolare.

Costruzione di Schroeter.

I. — Siano AB, CD due diametri ad angolo retto, in una circonferenza di centro O; $Cc = 4\,OA$ una parallèla ad AB;

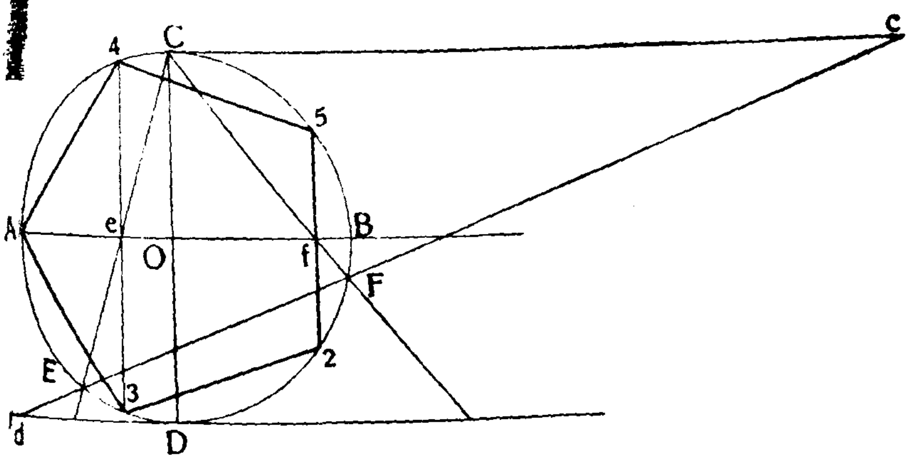


Fig. 379.

$Dd = BO$ una parallela ad AB; cd una retta che seghi la circonferenza in E, F; CE, CF delle rette seganti AB in e, f. Per questi punti conduciamo le corde $3\,e\,4$, $2\,f\,5$ perpendicolari ad AB. La figura $A\,3254$ è un pentagono regolare.

II. — Il triangolo formato da due lati adiacenti d'un pentagono regolare e dalla diagonale, è isoscele, e ciascuno dei lati uguali è uguale al segmento maggiore della base diviso in media ed estrema ragione.

Basta quindi prendere sopra una retta *qualunque* un segmento qualunque, dividerlo in media ed estrema ragione e co-

(1) Vedasi pure a pag. 407 la costruzione eseguita con sola riga.

struire un triangolo isoscele aven e la retta considerata come base e di cui gli altri due lati siano uguali al segmento maggiore della base. L'angolo al vertice O di questo triangolo sarà l'angolo d'un pentagono regolare. Ma per semplificare la costruzione si potrà prendere in luogo d'una retta *qualunque*, una retta particolare della figura. Ecco una costruzione che dà il lato cercato.

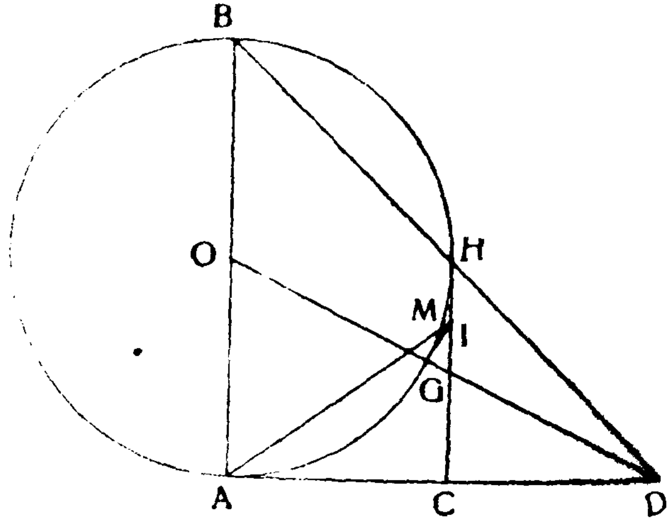


Fig. 380.

All'estremità A del diametro $A\,O\,B$ si conduce la tangente, sulla quale si portano le lunghezze $A\,C$ e poi $D\,D$ uguali al raggio. Si conducono le rette $D\,O$, $D\,B$ che segano la circonferenza rispettivamente in G ed H; si tracciano la retta $C\,H$ e la circonferenza di centro D e di raggio $D\,G$ che incontra $C\,H$ in I; la retta $A\,I$ sega la circonferenza data in M; $A\,M$ è il lato del pentagono.

Decagono regolare.

È ben nota la costruzione che serve ad ottenere il lato del decagono regolare come segmento maggiore del raggio diviso in media ed estrema ragione. Meno nota è forse la costruzione, che vuolsi conosciuta dai matematici greci, indicata nella figura 381; la perpendicolare sul punto di mezzo di $B\,V$ nella Chiocciola trisettrice di Pascal sega la curva stessa in

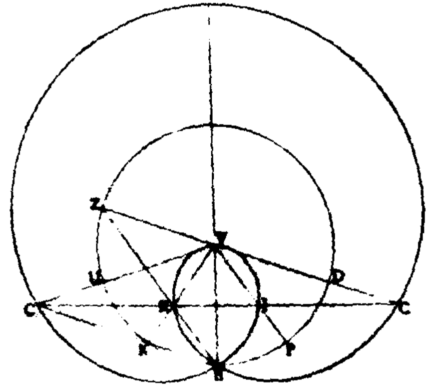


Fig. 381.

quattro punti C, C_1, J, R che proiettati da V sulla circonferenza di centro V e di raggio $V\,B$, danno:

$$\widehat{DP} = \widehat{PB} = \widehat{KU} = \widehat{UZ} = 36^{0}$$

come è facile dimostrare (V. *Trisezione dell'angolo*).

COSTRUZIONI APPROSSIMATE.

Metodi generali. — Varii sono i metodi cosidetti *generali*, per dividere la circonferenza in parti uguali, proposti e molte volte dati come esatti (!) nei Corsi di Disegno geometrico, nei Manuali di Geometria applicata alle industrie, ecc.

Esporrò qualcuno di tali procedimenti, con l'indicazione dei casi particolari nei quali essi danno risultati geometricamente esatti e dell'approssimazione che permettono di ottenere negli altri.

Metodo Rinaldini (1). — Consiste nel dividere il diametro $A\,B$ in tante parti uguali quante sono quelle nelle quali si vuol

(1) Questo metodo è riprodotto nelle Nouvelles Annales de Mathématiques, Vol. XII (1853) pag. 77 in un articolo di Housel senza indicarne l'autore; e nel Trattato di Geometria di Catalan (pag. 277) è indicato come dovuto a Bion: ma la costruzione è d'un nostro Geometra, il Rinaldini.

divisa la circonferenza e nel congiungere il *secondo* punto di divisione col vertice C del triangolo equilatero ABC; tale congiungente determina l'arco BD cercato. Poniamo:

$$AMC = \alpha \qquad ACM = \varepsilon \qquad DOB = \gamma \qquad r = 1$$

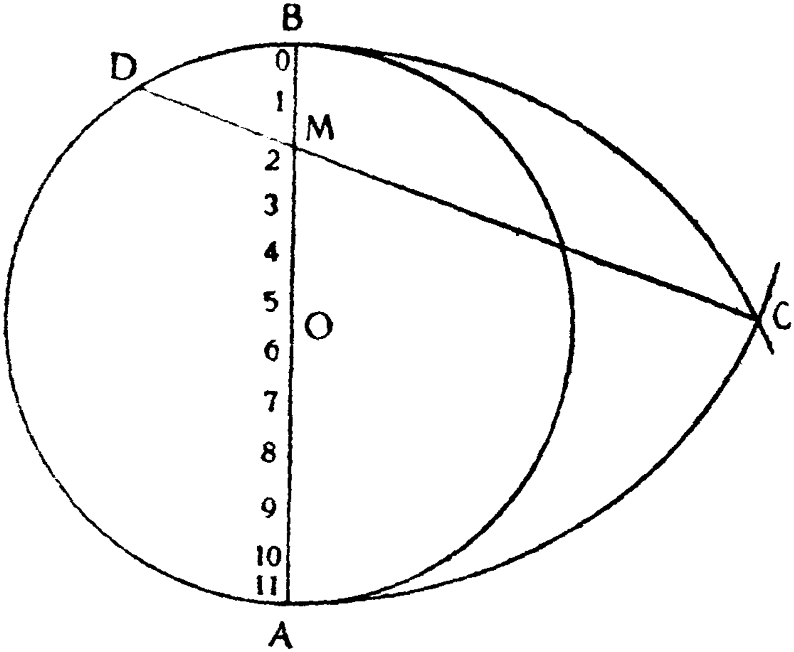


Fig. 382.

Dal triangolo MCA si ha:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \varepsilon} = \frac{1}{1 - \frac{2}{n}} \tag{1}$$

e dal triangolo DMO:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } (\alpha - \gamma)} = \frac{1}{1 - \frac{4}{n}} \tag{2}$$

Si ha quindi:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } (120^0 - \alpha)} = \frac{1}{1 - \frac{2}{n}} \tag{3}$$

Dividendo la (3) per sen α si ottiene:

$$\frac{1}{\operatorname{sen} 120^0 \cot \alpha - \cos 120^0} = \frac{1}{1 - \frac{2}{n}}$$

Ora:

$$\operatorname{sen} 120^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 120^0 = -\frac{1}{2}$$

quindi, sostituendo e semplificando:

$$\cos \alpha = \frac{n-4}{n\sqrt{3}}$$

e dividendo la (2) pure per sen α:

$$\frac{1}{\cos \gamma - \operatorname{sen} \gamma \cot \alpha} = \frac{1}{1 - \frac{4}{n}}$$

ossia:

$$\cos \gamma - \frac{(n-4) \operatorname{sen} \gamma}{n\sqrt{3}} = \frac{n-4}{n}$$

e ponendo $\cos \gamma = x$ sarà l'equazione di secondo grado:

$$\frac{(1-x)^2 (n-4)^2}{3 n^2} = \frac{(n-4)^2}{n^2} + x^2 - \frac{2 x (n-4)}{n}$$

da cui:

$$[3 n^2 + (n-4)^2] x^2 - 6 n (n-4) x + 2 (n-4) = 0$$

Risolvendo:

$$x = (n-4) \frac{3 n + \sqrt{n^2 + 16 (n-2)}}{3 n^2 + (n-4)^2}$$

Si rigetta il segno negativo che darebbe coseni negativi per valori di n sufficientemente piccoli.

Nella seguente tabella sono indicati i valori dell'angolo γ esatti e quelli approssimati che si ottengono col metodo Rinaldini, per valori di n fra il 3 e il 17 inclusivamente.

Il metodo è *esatto* per il triangolo, il quadrato e l'esagono, ma per gli altri poligoni è assai meno esatto del metodo Bardin che ora indicherò.

n	Valori di γ esatti	Valori di γ approssimati	Differenze angolari
3	120°	120°	0
4	90°	90°	0
5	72°	71° 57′ 12″	— 5′ 48″
6	60°	60°	0
7	51° 25′ 43″	51° 31′ 5″	5′ 22″
8	45°	45° 11′ 14″	11′ 14″
9	40°	40° 16′ 40″	16′ 40″
10	36°	36° 21′ 24″	21′ 24″
11	32° 43′ 38″	33° 8′ 52″	25′ 14″
12	30°	30° 29′ 45″	29′ 45″
13	27° 42′ 32″	28° 12′ 30″	31′ 58″
14	25° 42′ 52″	26° 15′ 48″	32′ 56″
15	24°	24° 34′ 30″	34′ 30″
16	22° 30′	23° 5′ 54″	35′ 54″
17	21° 10′ 35″	21° 47′ 12″	36′ 37″

Metodo Bardin. — Si divide il diametro $A\,B$ in tante parti uguali (n) quale sono quelle nelle quali si vuole divisa la circonferenza. Si conduce il diametro $C\,D$ perpendicolare ad $A\,B$ e si porta una delle n parti del diametro sul prolungamento di tali diametri, in M ed N. La retta $M\,N$ segherà la circonferenza in P; unendo questo punto col *terzo* punto di divisione del diametro a partire da A si avrà il lato del poligono regolare iscritto di n lati, esatto od approssimato a seconda del valore di n (fig. 383).

La formola generale che rappresenta tale segmento è:

$$l = \frac{1}{n}\sqrt{n^2 - 8\,n + 48 - (n - 6)\sqrt{n^2 - 4\,n - 4}}$$

Il radicale $\sqrt{n^2 - 4\,n - 4}$ diviene immaginario per valori di n inferiori al 5, quindi il metodo Bardin non è applicabile che per $n \geqq 5$.

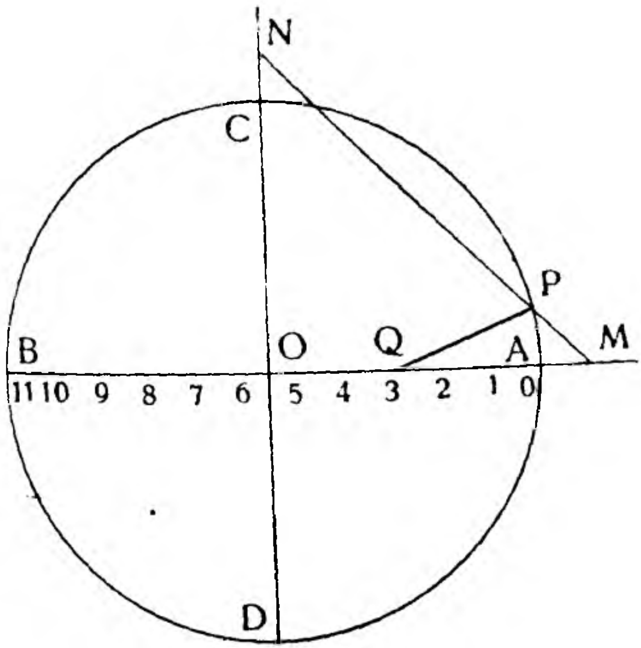


Fig. 383.

Nella seguente tabella sono indicati i valori dei lati dei poligoni che si ottengono con tale metodo per valori di n dal 5 al 30 inclusi, con le relative differenze dai lati *esatti*; vi sono pure indicate le differenze fra gli archi di $\frac{360^\circ}{n}$ e gli archi sottesi dalle corde approssimate (1).

Come si vede il metodo dà risultato *esatto* soltanto per $n = 6$.

---

(1) Nel periodico *Mathesis* (1909 pag. 156) è indicata una costruzione che non accenno qui perchè troppo poco approssimata.

Valori di n	Lunghez. esatta o calcolata del lato ($r = 1$)	Lunghez. approssimata del lato	Differenza in più o in meno	Differenza tra l'arco $\frac{360°}{n}$ e l'arco che sottende la corda appross.
5	1,1755705	1,1661904	— 0,0093801	39′ 46″ , 58
6	1,0000000	1,0000000	— 0,0000000	—
7	0,8677673	0,8675193	— 0,0002480	56″ , 86
8	0,7653669	0,7646179	— 0,0007490	2′ 47″ , 22
9	0,6840400	0,6831215	— 0.0009185	3′ 21″ , 66
10	0,6180340	0,6169825	— 0,0010515	3′ 48″ , 02
11	0,5634651	0,5624619	— 0,0010032	3′ 35″ , 68
12	0,5176380	0,5167340	— 0,0009040	3′ 13″ , 06
13	0,4786312	0,4778463	— 0,0007848	2′ 46″ , 78
14	0,4450417	0,4443797	— 0,0006620	2′ 17″ , 90
15	0,4158233	0,4152793	— 0,0005441	1′ 54″ , 76
16	0,3901806	0,3897460	— 0,0004346	1′ 29″ , 40
17	0,3674989	0,3671638	— 0,0003351	1′ 10″ , 32
18	0,3472964	0,3470503	— 0,0002461	51″ , 54
19	0,3291890	0,3290223	— 0,0091667	34″ , 90
20	0,3128690	0,3127721	— 0,0000968	20″ , 24
21	0,2980844	0,2980495	— 0,0000349	7″ , 30
22	0,2846297	0,2846491	+ 0,0000194	4″ , —
23	0,2723331	0,2724006	+ 0,0000675	14″ , 04
24	0,2610524	0,2611618	+ 0,0001094	22″ , 76
25	0,2506664	0,2508129	+ 0,0001464	30″ , 46
26	0,2410732	0,2412522	+ 0,0001791	37″ , 20
27	0,2321858	0,2323932	+ 0,0002074	43″ , 10
28	0,2239288	0,2241614	+ 0,0002326	48″ , 26
29	0,2162379	0,2165042	+ 0,0002663	55″ , 24
30	0,2090570	0,2093303	+ 0,0002733	56″ , 70

Soluzioni meccaniche.

1. – *Il circolo-divisore.* — È uno strumento assai semplice che può essere utile a chi abbia frequente occasione di dividere circonferenze in parti uguali (disegni di ingranaggi, ad esempio).

Consiste in un regolo *A* sul quale sono segnati dei gradi: 1, 2 . . . . . . 23. Questo regolo può rotare attorno ad un pernio

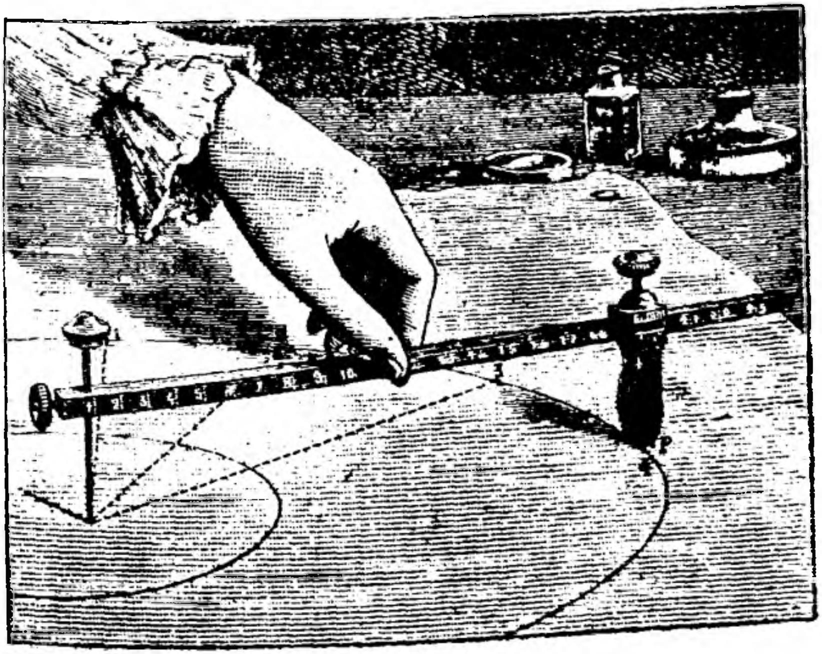


Fig. 384.

che si collocherà nel centro del circolo da dividere. Un corsoio scorrevole sul regolo porta un tratto inciso che si fa corrispondere, per esempio, col 9 del regolo se in 9 parti si vuol dividere la circonferenza. Il corsoio porta un piccolo galetto *E* contenuto in una staffa e girevole attorno ad un asse *g* come una ruota. Questo piccolo galetto è munito d'una punta che serve a tracciare, a ciascuna sua rivoluzione, i punti che indicano le divisioni della circonferenza.

II. — Quest'altro apparecchio è dovuto ad un tedesco, secondo la *Revue du Génie militaire.*

Essendo dato un angolo MON (fig. 385), supponiamo che si applichino su questo angolo due serie identiche di parallele equidistanti $A, B, C, D, \ldots$ ed $a, b, c, d, \ldots$ tracciate su due fogli di carta trasparente e in modo tale che la prima

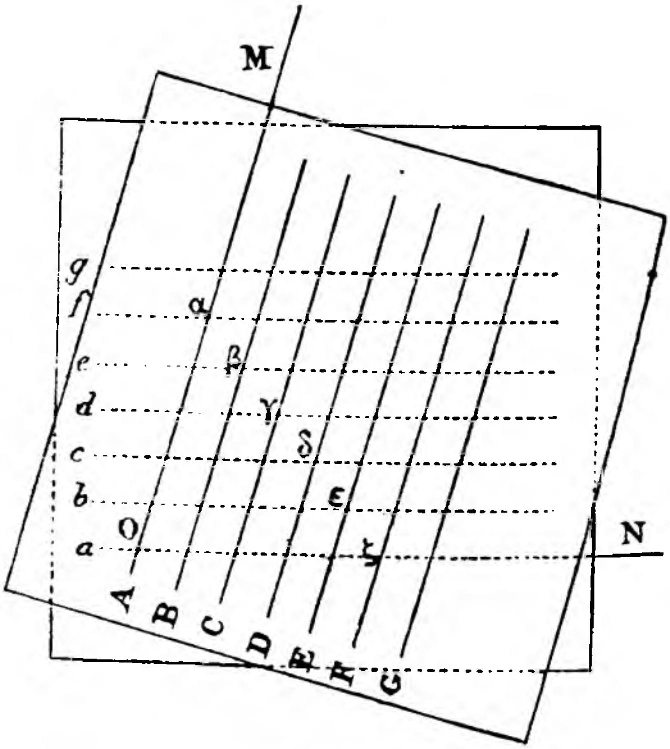


Fig. 385.

parallela di ciascuna serie si sovrapponga ad uno dei lati dell'angolo; le altre linee si segheranno formando un reticolato di losanghe tutte identiche i cui vertici saranno ripartiti regolarmente su rette rispettivamente parallele e perpendicolari alla bisettrice dell'angolo dato. Basterà, per esempio, di riferirsi al quinto rango per trovare $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, punti di divisione in cinque parti uguali della corda $\alpha\,\zeta$.

Il procedimento seguito per la divisione degli archi è assolutamente analogo; la sola differenza consiste nel sostituire le rette parallele con linee curve $B\,C\,D\,E$ (fig. 386) che intercettano su degli archi descritti da un centro comune O e a partire da una retta A, degli archi tutti uguali ad una lunghezza arbitraria. Si opera nello stesso modo a partire da una seconda retta a, il che dà le curve b, c, d, e, ...

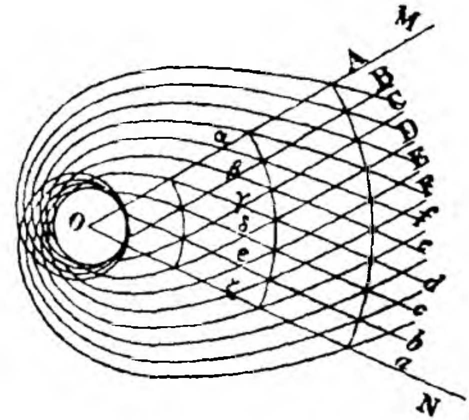


Fig. 386.

Ciò fatto, per dividere l'angolo MON in un numero qualunque di parti uguali basta sovrapporre i due fogli in modo da far coincidere i centri O, o col vertice dall'angolo e le rette A ed a con i lati OM ed ON. I due sistemi di curve formano un reticolato di losanghe curvilinee, i cui vertici sono regolarmente distribuiti su degli archi concentrici col vertice dell'angolo; basta dunque cercare la serie che contiene $n+1$ di questi vertici per trovarvi i punti di divisione dell'arco in n parti uguali.

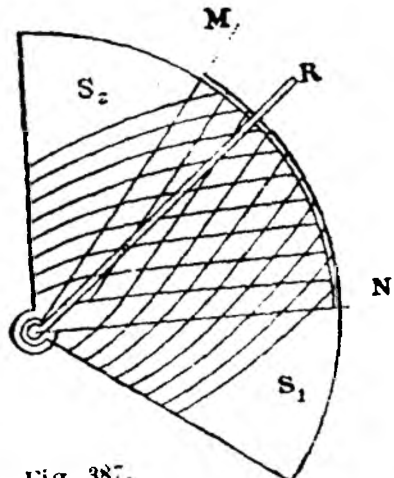


Fig. 387.

L'inventore costruisce le dette curve su dei settori trasparenti SS_1 (fig. 387), attraversati nei loro centro da un pernio attorno al quale gira un'alidada, ma è chiaro che si può adottare qualsiasi altra disposizione, come — per esempio — quella che consiste nel servirsi semplicemente di due fogli di carta da calco il che permetterebbe di stabilire più esattamente la coincidenza dei centri.

Ettagono.

1. — È noto che l'iscrizione dell'ettagono regolare si riconduce alla soluzione di due equazioni, l'una di secondo grado e l'altra di terzo. Ora, la soluzione di una equazione di terzo grado (che ha le sue tre radici reali) può sempre ricondursi alla trisezione d'un angolo. Su tali considerazioni è basata la seguente costruzione di Collins.

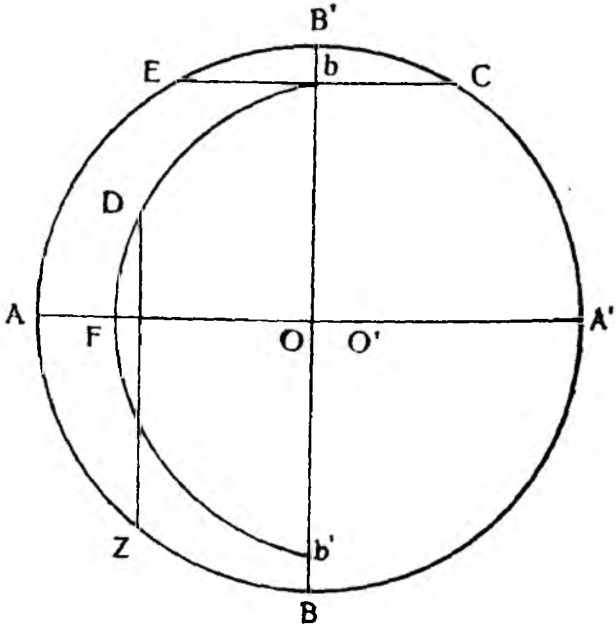


Fig. 388.

Siano $A\,O\,A'$ e $B\,O\,B'$ due diametri derpendicolari l'uno all'altro; prendiamo dal lato di A', $O\,O' = \frac{1}{6}\,O\,A'$; sia $A\,E$ il sesto della circonferenza; conduciamo $E\,C$ parallela ad $A\,A'$ e che incontri BB' in b; dal punto O' come centro descriviamo l'arco $b\,F\,b'$ (essendo b' su $B\,B'$). Sia $b\,D$ il terzo di quest'arco. Prolungando fino all'incontro del primo circolo in Z, una perpendicolare abbassata da D su $A\,A'$, l'arco $A\,Z$ sarà approssimativamente il settimo della circonferenza proposta.

II. — Costruzione dell'Autore. Il lato dell'ettagono stellato $\left(\text{corda dell'arco } \frac{2}{7} \times 360^\circ\right)$ corrisponde ad $l = 1,5636627$ e quello dell'undecagono a $l_1 = 0,5634651$. La differenza è:

$$l - l_1 = 1,0001976$$

Trovato dunque un segmento che si approssimi al lato dell'undecagono basterà aggiungervi il raggio per avere il lato dell'ettagono stellato da cui sarà facile ottenere quello dello ettagono convesso dividendo per metà l'arco da esso sotteso.

E inversamente, trovato un segmento che approssimativamente corrisponda al lato dell'ettagono stellato di cui sopra basterà diminuirlo del raggio per avere il lato dell'undecagono approssimato.

Applicando questo metodo ho trovato che il lato dell'undecagono ottenuto con la costruzione Pasquini (vedi fig. 391 a pag. 439) aumentato di 1, è 1,5636970 che differisce da quello dell'ettagono stellato per + 0,0000343. Il lato dell'ettagono convesso corrispondente risulta differente dal calcolato per soli + 0,0000247 cioè per un angolo di 5'', 66.

Ennagono.

I. — Il lato dell'ennagono convesso è uguale alla differenza dei lati dei due ennagoni stellati.

II. — Il cubo del lato del triangolo equilatero è uguale al triplo prodotto dei lati dei tre ennagoni regolari iscritti nella stessa circonferenza.

III. — L'apotema dell'ennagono regolare convesso è uguale alla somma degli apotemi degli ennagoni regolari stellati.

IV. — Il cubo dell'apotema del triangolo equilatero è uguale al prodotto dagli apotemi dei tre ennagoni regolari iscritti nella stessa circonferenza.

V. — La somma dei quadrati dei lati dei tre ennagoni è uguale al sestuplo del quadrato del raggio.

VI. — La somma dei quadrati degli apotemi è uguale a tre volte la metà del quadrato del raggio.

VII. — Costruzione di Howe (1). Sia:

$$ACB = 60^\circ \qquad AD = 37^\circ \qquad DM = 15^\circ \qquad DE = EF = CD$$

(1) Inserita nel fascicolo I (Agosto) del Vol. V. (1889) pag. 12 degli *Annals of Mathematics* dell'Università dello stato di Virginia (S. U.).

Descrivansi gli archi EL, FG di centro C e si conduca HI parallela alla CG. Unendo I con C risulterà:

$$I\widehat{C}G = 4^\circ\ 59'\ 31'',39$$

e quindi:

$$A\widehat{C}M = 40^\circ\ 0'\ 28'',61$$

La differenza è dunque di $28'',61$ e, per tutto il perimetro, di $4'\ 17'',49$. La lunghezza del lato dell'ennagono risulta eccedente per 0,0000249.

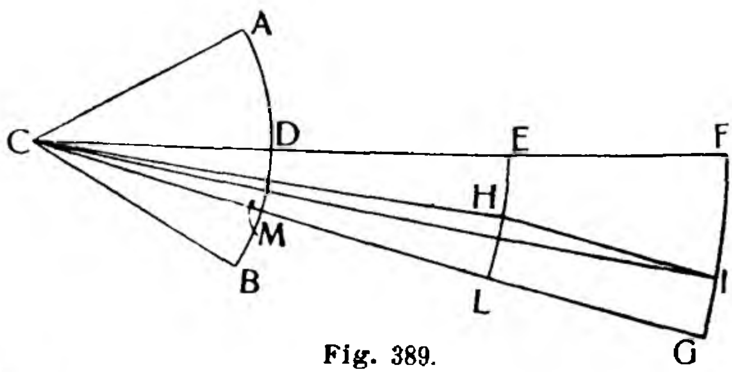


Fig. 389.

VIII. — **Costruzioni dell'Autore.** Rettificando la circonferenza col mio procedimento (vedi *Rettificazione approssimata della circonferenza)*, dividendola in 9 parti uguali e determinando col procedimento Péraux l'arco che corrisponde ad uno di tali segmenti si trova per questo arco il valore:

$$39^\circ\ 59'\ 52'',47$$

ossia una differenza in meno, da 40°, di $7'',53$. La corda corrispondente risulta 0,6840060 che differisce in meno dal lato dell'ennagono regolare per 0,0000340.

IX. — Siano A, C, N tre vertici consecutivi dell'esagono iscritto e D il punto medio del raggio MN. Conduco DA ed NA; questa retta sega DC nel punto O dal quale come centro descrivo un circolo di raggio $\frac{r}{2}$ ossia DM. Questo circolo sega la AD in B tale che si ha:

$$AB = 0,6840257$$

con differenza, in meno, dal lato dell'ennagono di 0,0000143.

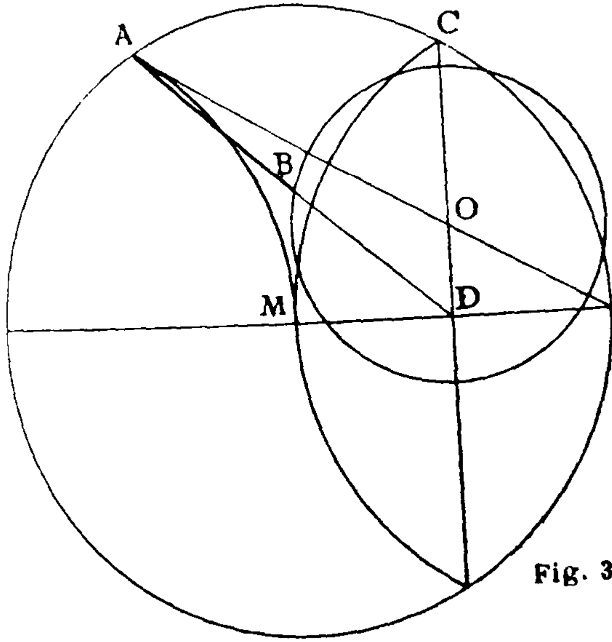


Fig. 390.

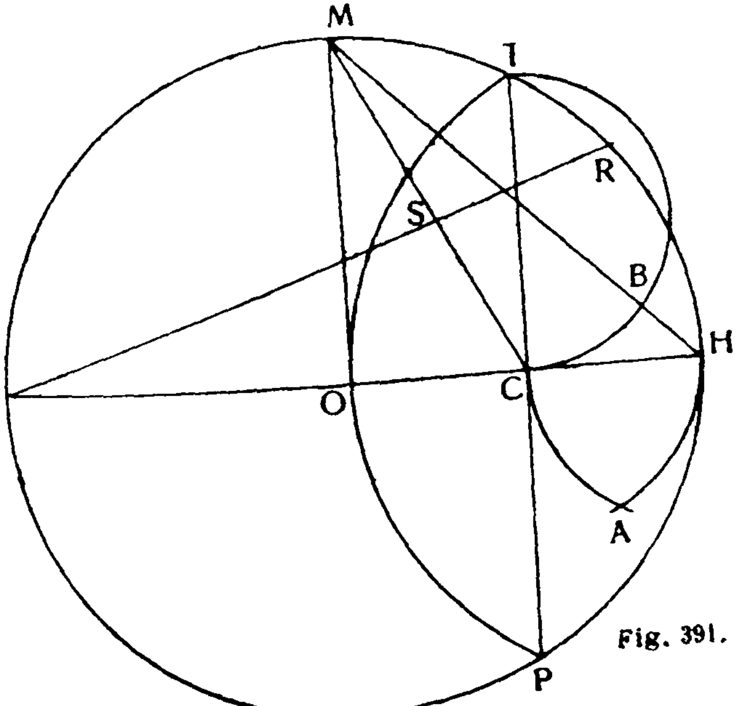


Fig. 391.

X. — Descritti (fig. 391) gli archi POT, CA, AH, CBT, tracciato il raggio OM perpendicolare ad FH e condotte la MH e la MC, si porta su questa il segmento AB da M in S. La retta FS determinerà R tale che, approssimativamente:

$$TR = \frac{1}{3} TH$$

Sarà dunque RH il lato approssimato dell'ennagono. L'arco RH risulta di $39^\circ\, 59'\, 59''$, 906 con differenza, in meno da 40°, di $0''$, 094 corrispondente ad $\frac{1}{13787234}$ dell'intera circonferenza.

Il lato RH dell'ennagono così trovato differisce da quello calcolato di soli 0,0000004 per difetto.

Portando RH nove volte sulla circonferenza l'errore totale risulterebbe di $\frac{1}{1.531.915}$ di essa circonferenza, per difetto, e corrisponderebbe ad un centimetro in una circonferenza di 15319 metri, ossia a mm. 0,1 in una circonferenza di m. 153 circa.

Mi pare possa quindi ritenersi la mia costruzione come la più approssimata fra quelle finora proposte, compresa quella del Prof. H. A. Howe già indicata a pag. 435, sulla quale ha pure il vantaggio d'una possibilità maggiore di esattezza grafica.

Poligono di 11 lati.

I. — Costruzione P. Pasquini. Nella fig. 392 il circolo di centro S e di raggio SK determina sulla circonferenza data il punto T tale che si ha $BT = 0{,}5636970$ con differenza in più dal calcolato di 0,0002319.

II. — Costruzioni dell'Autore. È facile a costruire geometricamente un'espressione numerica la quale fornisce un valore del lato dell'undecagono iscritto che differisce dal calcolato per — 0,00001328. L'espressione è:

$$\frac{1}{9}\left(5\sqrt{2}-2\right) \qquad \text{ossia} \qquad \frac{5}{9}\sqrt{2}-\frac{2}{9}$$

III. — La costruzione già indicata sopra per l'ennagono (fig. 391) può servire, con un piccolo tracciato supplementare, ad ottenere un segmento HE che differisce dal lato dell'undecagono, per difetto, di soli 0,00001336 (fig. 393).

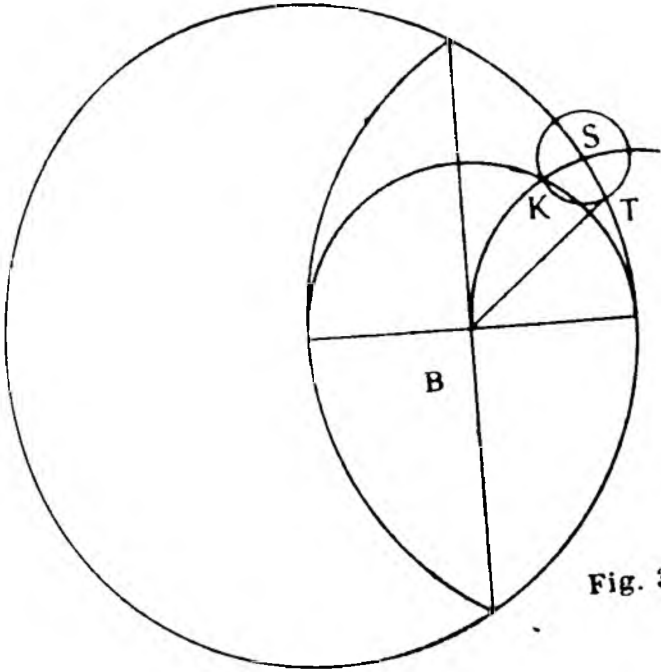


Fig. 392.

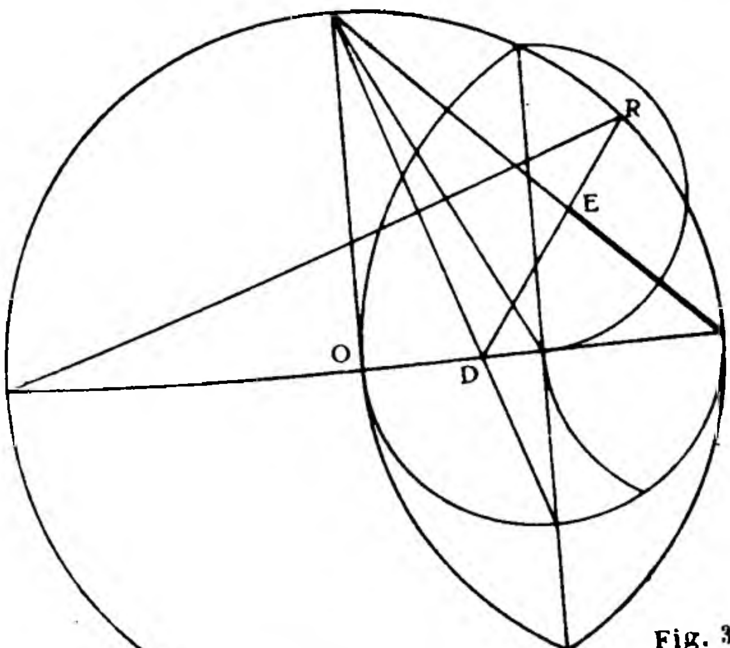


Fig. 393.

IV. — Si può ottenere sufficiente approssimazione con questa costruzione assai semplice. Sia BQ un arco di 90° e QC uno di 60 (fig. 394).

Conduciamo la perpendicolare CS sul mezzo del raggio OQ e portiamo la corda di BC (lato del dodecagono) da O in A sul raggio OB. La AQ segherà la CS in R e risulterà:

$$RQ = \sqrt{\overline{RS}^2 + \overline{SQ}^2} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3-\sqrt{3}}$$

$$RQ = 0{,}56301625$$

che differisce dal lato dell'undecagono per 0,00044886 in difetto.

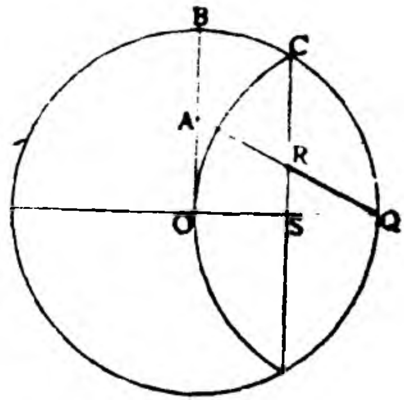


Fig. 394.

V. — Costruzioni Howe. Sia $AB = 30°$, $CD = \frac{11}{12} CA$ e descrivasi da C come centro l'arco DE fino all'intersezione in E con la parallela condotta da B al raggio CA. Risulterà $D\widehat{C}E = 33°\ 3'\ 20''$ (fig. 395).

Il Prof. Howe osserva (1) che se si fosse preso come raggio $\frac{111}{120}$ del raggio anzichè 110 si sarebbe trovato $DCE = 32°\ 43'\ 13'',60$ minore di $\frac{360°}{11}$ per solo $\frac{1}{4793}$.

---

(1) Annals of Mathematics (University of Virginia) 1889, Vol. V. - pag. 14.

Questa costruzione offre un esempio di quei tentativi del genere, *di nessuna praticità*, che tanto abbondano. Infatti, come ottenere quei $\frac{111}{120}$ del raggio?

La costruzione seguente pecca pure alquanto in tal senso.

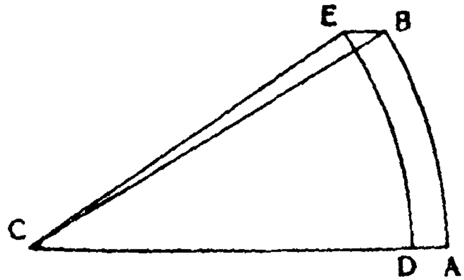


Fig. 395.

VI. — Se un triangolo ha per lati 6, 10 e 11, l'angolo opposto al lato 6 riesce di $32^\circ\, 45'\, 50''$, che differisce da $\frac{360^\circ}{11}$ per $2'\, 11'', 818$.

Poligono di 13 lati.

Costruzione dell'Autore. — L'espressione:

$$\frac{1}{8}\left(2\sqrt{2}+1\right) = 0{,}4785634$$

differisce alla corda dell'arco $\frac{360^\circ}{13}$ per soli $-\,0{,}00007881$.

La costruzione è facilissima

Poligono di 17 lati.

Costruzione dell'Autore. — La costruzione assai semplice indicate nella fig. 396 ci dà:

$$HS = 1 - \frac{1}{5}\sqrt{10} = 0{,}367544468$$

La differenza con la corda dell'arco $\frac{360°}{17}$ è di $+ 0,0000456$ con una differenza angolare di $9'' , 54$; cioè, per tutta la circonferenza, di $2' \; 42'' , 18$.

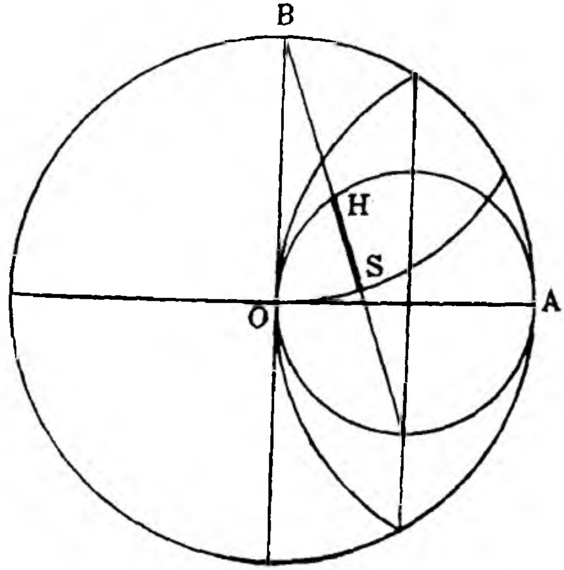


Fig. 396.

Per una circonferenza di un metro di raggio l'errore totale sarebbe di metri 0,000403.

Osservazione. — La formola:

$$1 - \frac{1}{5}\sqrt{10}$$

può essere costruita, più semplicemente col procedimento della Prof. Sig.ra Ersilia Bisson Minio che consiste nel dividere in 5 parti uguali due raggi perpendicolari, e considerare la congiungente del primo punto di divisione dell'uno col terzo punto di divisione dell'altro, o, in altri termini, l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo di cateti $\frac{1}{5}$ e $\frac{3}{5}$ del raggio 1; tale ipotenusa sarà espressa da $\frac{1}{5}\sqrt{10}$ epperò il lato cercato si avrà come differenza tra il raggio e l'ipotenusa stessa.

Poligono di 19 lati.

I. – Costruzioni dell'Autore. Le costruzioni della fig. 397, facilissime ad eseguire, ci permettono di ottenere, in quattro

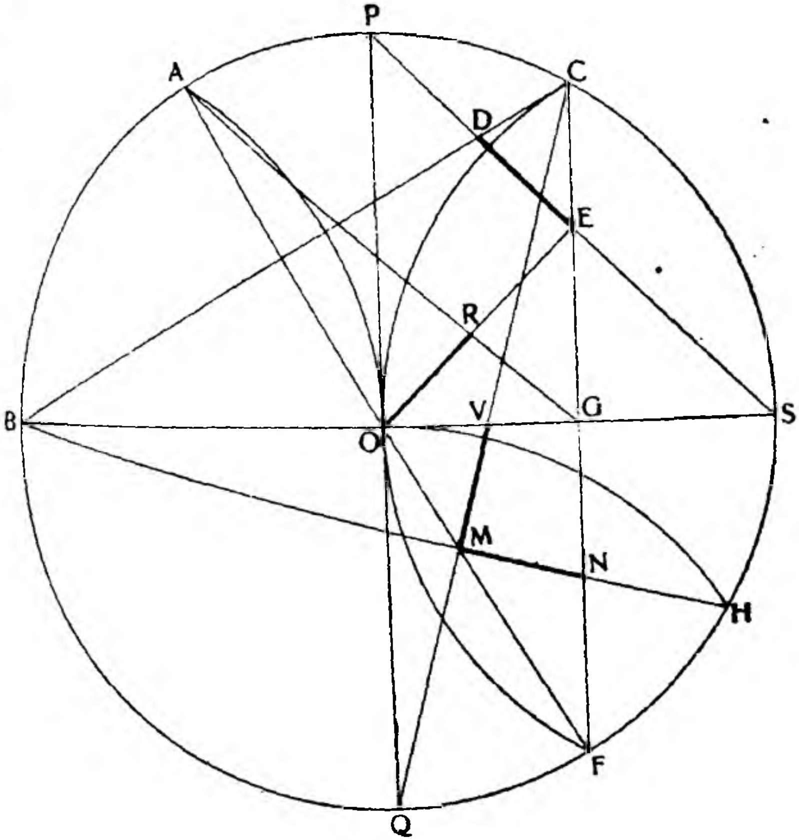


Fig. 397.

modi diversi, uno stesso segmento le cui espressioni calcolate sono, per $r = 1$, le seguenti:

$$\overline{DE} = \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}\,(1 + \sqrt{3})} \qquad \overline{OR} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\,(2 + \sqrt{3})}$$

$$\overline{MV} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2\,(2 + \sqrt{3})} \sqrt{2 - \sqrt{3}} \qquad \overline{MN} = \frac{\sqrt{6}}{2\,(2 + \sqrt{3})}$$

che corrispondono a 0,328169388 e differiscono quindi dal lato del poligono regolare di 19 lati, per 0,0010186 in meno.

Nella figura sopraindicata è facile dimostrare geometricamente l'uguaglianza dei triangoli CDE, OVM, CMN, BVM e quindi quella dei loro lati DE, VM; MN, VM, ecc.

Come si vede nella fig. 396 le costruzioni relative saranno i due diametri perpendicolari BS, PQ, e poi, rispettivamente:

Per DE: Arco COF, corde CF, CB, SP.

Per MN: Arco COF, arco OH, corde CF, CQ, BH.

Per VM: Come per MN oppure: arco COF, arco OA, corde CF, CQ, AF.

Per OR: Arco COF, arco OA, corde CF, PS e congiungenti di E con O e di A con G.

II. — Si sa costrurre esattamente l'icosagono regolare iscritto, il cui angolo al centro è $\frac{360^\circ}{20} = 18^\circ$; si conosce quindi la corda m dell'arco di $\frac{9}{20}\,360^\circ$ ossia di 162°, che sarebbe il lato dell'icosagono stellato di terza specie. Ora si ha $\frac{m}{6} = 0{,}32922938$ mentre il lato del poligono di 19 lati è 0,3291890; dunque $\frac{m}{6}$ differisce per soli $+\ 0{,}00004038$ dalla corda dell'arco $\frac{360^\circ}{19}$.

Poligono di 21 lati.

Costruzione dell'Autore. — L'espressione:

$$l = \frac{4}{5}\sqrt{2} - \frac{5}{6}$$

di facile costruzione, corrisponde a $l = 0{,}2980475$ mentre la corda dell'arco $\frac{360^\circ}{21}$ è $c = 0\,2980844$. Quindi $c - l = 0{,}00004687$.

LA TRISEZIONE DELL'ANGOLO

Dividere un dato angolo in tre parti uguali.

Questo problema famoso fino dalla remota antichità, non si può risolvere con *riga e compasso* cioè con *rette e circoli.*

Per il teorema di Moivre (1), le radici dell'equazione:

$$x^3 = \cos \alpha + i \text{ sen } \alpha \qquad (^*)$$

sono:

$$x_1 = \cos \frac{\alpha}{3} + i \text{ sen } \frac{\alpha}{3}$$

$$x_2 = \cos \frac{\alpha + 2\pi}{3} + i \text{ sen } \frac{\alpha + 2\pi}{3}$$

$$x_3 = \frac{\cos \alpha + 4\pi}{3} + i \text{ sen } \frac{\alpha + 4\pi}{3}$$

le quali (fig. 398) geometricamente sono i vertici d'un triangolo equilatero iscritto nel circolo di raggio 1 e col centro nell'origine. L'equazione (*) è dunque l'enunciazione analitica della trisezione dell'angolo.

Se l'equazione (*) fosse riducibile, cioè si potesse scomporla nel prodotto di due polinomii a coefficienti razionali, dovrebbe essere possibile di esprimere una sua radice in funzione razionale di cos α e sen α; funzione che non si altererebbe mu-

(1) V. Klein - Giudice. Conferenze sopra alcune questioni di geometria elementare, pag. 13.

tando α in $\alpha + 2\pi$. Ora nessuna delle tre radici rimane ina-terata quando, *variando in modo continuo*, α passa al valore $\alpha + 2\pi$ poichè allora x_1 passa in x_2, x_2 in x_3 ed x_3 in x_1; abbiamo cioè una permutazione ciclica delle radici. Nessuna di esse può dunque rappresentarsi come funzione razionale di $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$. Ne segue che $x^3 = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$ è irriducibile cioè non può risolversi con numero finito di radici quadrate,

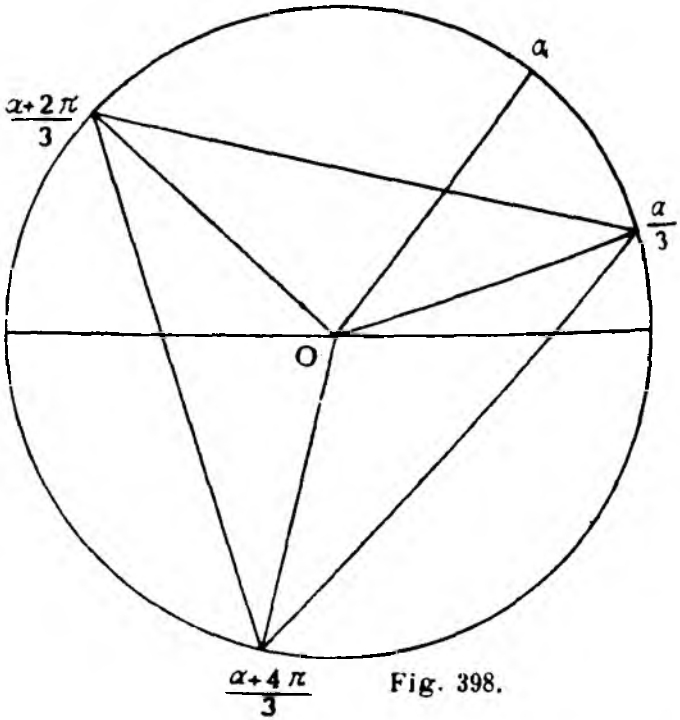


Fig. 398.

epperò la trisezione dell'angolo non è eseguibile, *in via generale*, con riga e compasso, ma solo per taluni valori particolari di α, come $\frac{\pi}{2}$, π, ecc.

Ma questa *impossibilità* si ha solamente con tale limitazione chè il problema può risolversi graficamente ricorrendo alle coniche, o ad altre curve, che tutte si possono tracciare coi istrumenti speciali in sostituzione del comune compasso di circoli.

Del resto la soluzione *grafica* di questo, ed altri simili problemi, ha interesse più che altro scientifico, teorico; chè in *pratica*, nei rari casi in cui occorra applicarla, ben difficil mente chi deve farlo è in grado di ricorrere ad alcuno dei tanti metodi noti, i quali in ogni modo riescono generalmente assai più lunghi e fecondi di inesattezze grafiche, delle semplici soluzioni per tentativi

Questo problema venne risolto dai geometri dell'antichità per mezzo di varie curve quali l'iperbole, l'elica, la spirale, la quadratrice, la concoide; forse anche con la chiocciola, la cicloide ed altre curve.

Indicherò alcune soluzioni fra le tante che il problema comporta, cominciando dalle due citate da Pappo, di autori ignoti.

I. — Sia ABC l'angolo dato; da un punto qualunque M di BC si abbassa la perpendicolare MN su AB. Sia O un punto di MN

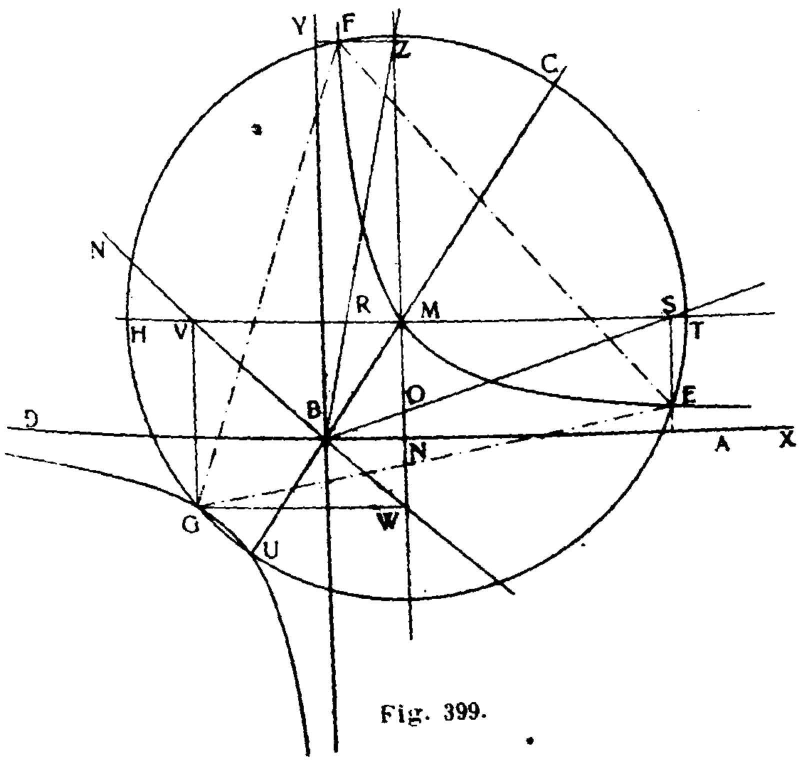


Fig. 399.

tale che la BO segando in S la parallela da M ad AB risulti $OS = 2\,BM$; si avrà allora $ABS = \frac{1}{3}\,ABC$.

Tutto si riduce dunque alla determinazione del punto S il che può farsi mediante una costruzione rappresentata analiticamente. Sia $\frac{b}{a}$ la tangente dell'angolo dato; costruiamo l'iperbole $xy = ab$ ed il circolo:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 4 (a^2 + b^2)$$

Se indichiamo con x la maggiore delle ascisse dei punti di intersezione, si ha $MS = x - a$ e $\frac{b}{x}$ rappresenta la tangente dell'angolo uguale al terzo dell'angolo dato:

L'altro punto d'intersezione F del ramo M dell'iperbole col circolo determina il punto Z tale che:

$$Y\widehat{B}Z = \frac{1}{3} Y\widehat{B}C$$

ossia ci dà la trisezione dell'angolo *complemento* del dato, mentre il terzo punto d'intersezione G dell'iperbole col circolo ci dà il punto V (o W) cui corrisponde l'angolo:

$$D\widehat{B}N = \frac{1}{3} D\widehat{B}C$$

ossia uguale al terzo del *supplemento* dell'angolo dato. I punti E, F, G costituiscono il solito triangolo equilatero. Il quarto punto d'intersezione U dell'iperbole col circolo non giova poichè non è altro che il simmetrico di M rispetto a B.

Nota. — Si può osservare che nel circolo M si hanno queste relazioni fra i varii archi considerati, indicando con α l'angolo dato TMC:

$$ET = \frac{1}{3} TC$$

$$FH = \frac{1}{3} TFU = \frac{1}{3} (\pi + \alpha)$$

$$GT = \frac{1}{3} TFUC = \frac{1}{3} (2\pi + \alpha)$$

II. — **Soluzioni di Pappo e di Newton.** Si tracci una iperbole d'eccentricità 2. Siano O il suo centro, A, N i vertici e B, M i fochi. Il cerchio descritto su AB come corda, in modo che il segmento AFB sia capace dell'angolo dato, segherà la iperbole nei punti E, F, T (vertici d'un triangolo equilatero) ai quali corrispondono le tre soluzioni del problema, cioè:

$$B\widehat{F}E = \frac{1}{3}\, B\widehat{F}A$$

$$B\widehat{A}F = \frac{1}{3}(\pi - B\widehat{F}A) \qquad\qquad B\widehat{F}T - \frac{1}{3}(\pi - B\widehat{F}A)$$

Sia D il punto d'intersezione del circolo $AEBF$ con la perpendicolare condotta sul punto di mezzo di AB, e si descriva

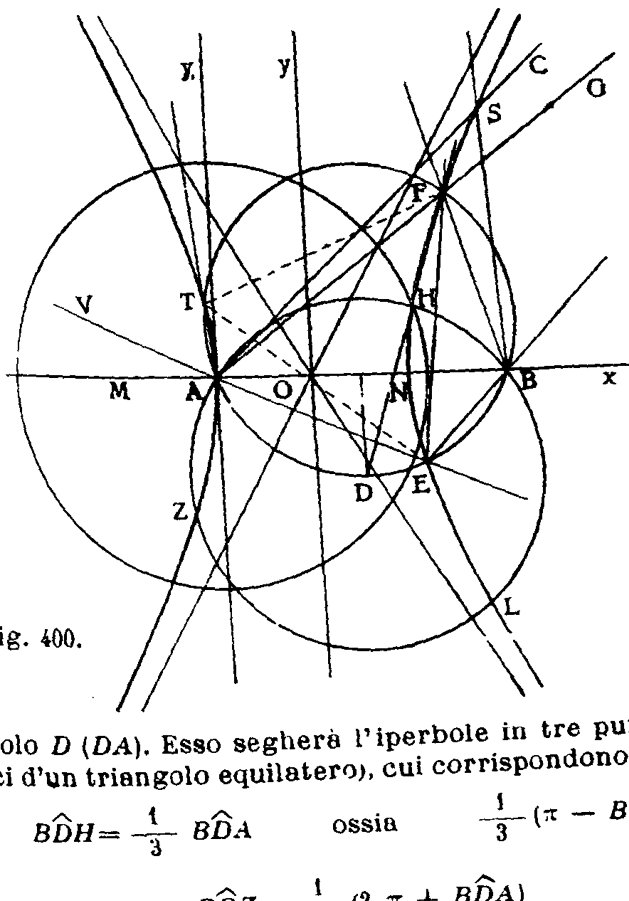


Fig. 400.

il circolo D (DA). Esso segherà l'iperbole in tre punti H, Z, L (vertici d'un triangolo equilatero), cui corrispondono gli angoli:

$$B\widehat{D}H = \frac{1}{3}\, B\widehat{D}A \qquad \text{ossia} \qquad \frac{1}{3}(\pi - B\widehat{F}A)$$

$$B\widehat{D}Z = \frac{1}{3}(2\,\pi + B\widehat{D}A)$$

$B\widehat{D}L$ (corrispondente all'arco BZL) $= \frac{1}{3}(4\,\pi + B\widehat{D}A)$

III. — Si può considerare l'iperbole di cui nelle soluzioni precedenti, come luogo dei punti S che si ottengono conducendo dai due punti fissi A, B delle rette come AC, tali che $B\widehat{A}C = \alpha$ e come BS, tali che $A\widehat{B}S = 2\,\alpha$. Naturalmente si ha:

$$MA = AO = ON = NB = a$$

essendo M e B i fochi, O il centro ed A, N i vertici della iperbola. La sua equazione in coordinate polari (polo A) è:

$$\rho = 3\,a\,\frac{\operatorname{sen} 2\,\omega}{\operatorname{sen} 3\,\omega} = \frac{6\,a \operatorname{sen} \omega \cos \omega}{3 \operatorname{sen} \omega \cos^2 \omega - \operatorname{sen}^3 \omega}$$

e in coordinate cartesiane (assi $A\,x$, $A\,y_1$):

$$y^2 = 3\,x\,(x - 2\,a)$$

Riferita invece al suo centro O e ai suoi assi principali Ox, Oy è:

$$y^2 = 3\,(x^2 - a^2)$$

Gli assintoti hanno per equazione:

$$y = \pm\,x\sqrt{3}$$

La circonferenza descritta su AB come corda, in modo che il suo segmento ADB sia capace dell'angolo da trisecare, segherà l'iperbole in altri tre punti E, F, T ai quali corrispondono (essendo $B\widehat{F}G = \alpha$ l'angolo dato):

$$B\widehat{A}F = \frac{\alpha}{3} \qquad\qquad B\widehat{A}T = \frac{\alpha + \pi}{3}$$

ossia:

$$M\widehat{A}T = \frac{2\,\pi - \alpha}{3} \qquad\qquad B\widehat{A}V = \frac{\alpha + 2\,\pi}{3}$$

ossia:

$$B\widehat{A}E = \frac{\pi - \alpha}{3} = \frac{A\widehat{F}B}{3}$$

Questa soluzione, le due precedenti e quella *classica* del Chasles (V. pag. 452, N. VI) sono le più semplici.

IV. — Soluzione di Descartes. Questa soluzione si riduce alla determinazione dei punti d'intersezione d'un circolo e di una parabola le cui equazioni sono rispettivamente:

$$x^2 + y^2 - \frac{13}{4}x + 4\,my = 0 \qquad\qquad y^2 = \frac{1}{4}x$$

Le ordinate di tali punti sono date dall'equazione:

$$4\,y^3 = 3\,y - m$$

di cui la minore delle radici positive è il seno di $\frac{1}{3}$ dell' angolo il cui seno e uguale ad m.

V. — La seguente soluzione viene attribuita a Clairaut.

Sia PQR l'angolo dato; si prendano sui suoi lati lunghezze uguali QA, QB e da Q come centro si descriva un circolo di

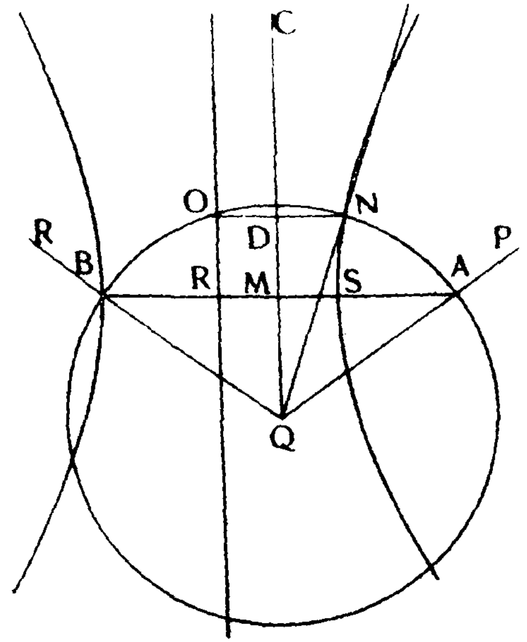


Fig. 401.

raggio QA. Si tracci la corda AB e la si divida in tre parti uguali nei punti R, S; si conduca la bisettrice QC dell'angolo AQB. Si avrà:

$$SM = \frac{1}{3}\,A\,S$$

Si descriva allora un'iperbola avente un foco in A, il vertice corrispondente in S e per direttrice la QC. Sia N il punto di intersezione del ramo S dell'iperbola col circolo Q. Si conduca da N la perpendicolare sulla QC; essa segherà in O la circonferenza Q. Si avrà allora, per le proprietà della direttrice e del foco:

$$\frac{AN}{ND} = \frac{AS}{SM} = \frac{2}{1}$$

da cui $AN = 2\ ND$ e, per simmetria, $AN = NO = OB$ e quindi:

$$A\widehat{Q}N = N\widehat{Q}O = O\widehat{Q}B$$

VI. — Soluzione di Chasles. — È la soluzione classica, che si ottiene coi metodi della Geometria proiettiva, e che si può ricondurre a questa proposizione:

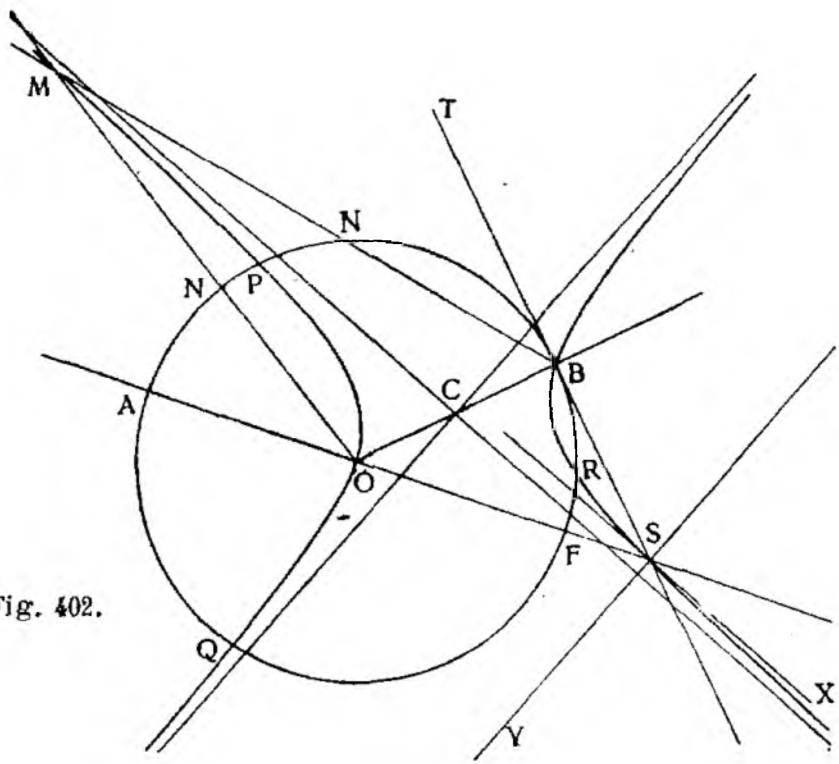


Fig. 402.

L'arco di circolo AB, di centro O, è diviso in tre parti uguali, nella sua intersezione con l'iperbola equilatera che ha per diametro OB e che passa per il punto d'intersezione di OA con la tangente al cerchio in B.

Ecco ora la relativa costruzione data dal Cremona nel suo celebre trattato di Geometria proiettiva.

Nella circonferenza data (fig. 402), prendasi, a partire da A, un arco arbitrario AN, e a partire da B, ma in senso opposto, un arco doppio BN'. Condotta la tangente BT, gli angoli AON, TBN' sono uguali ed opposti di senso; ossia, se i punti N, N' variano simultaneamente, i raggi ON, BN' generano due fasci inversamente uguali Il luogo del punto M ad essi comune sarà dunque un'iperbola equilatera i cui assintoti hanno le direzioni delle bisettrici SX, SY degli angoli delle AO, BT; giacchè queste rette sono raggi corrispondenti (sono quelle posizioni de' raggi mobili ON, BN', per le quali gli archi AN, BN' sono nulli). Il centro dell'iperbola è il punto di mezzo C della retta OB congiungente i centri dei due fasci. Costruita l'iperbola, per mezzo del teorema di Pascal, si ottiene un punto P ove essa attraversa l'arco dato AB; ivi coincidono due punti corrispondenti N, N', epperò P è il panto cercato di trisezione dell'arco dato; l'arco AP è la metà di PB.

L'iperbola incontra la circonferenza in due altri punti R, Q; il punto R dà la trisezione dell'arco BF che con AB completa la semi-circonferenza. Il punto Q da la trisezione dell'arco che si ha togliendo AB dalla circonferenza intera, cioè di AFB.

VII. — **Soluzione di Bourdon.** La formula trigonometrica per calcolare il seno del *terzo* d'un arco in funzione del seno di quest'arco è:

$$4 \operatorname{sen}^3 \frac{1}{3} \alpha - 3 \operatorname{sen} \frac{1}{3} \alpha + \operatorname{sen} \alpha = 0$$

Ponendo:,

$$\operatorname{sen} \frac{1}{3} \alpha = x \qquad \operatorname{sen} \alpha = s$$

e ristabilendo l'omogeneità, si ha:

$$4 x^3 - 3 r^2 x + r^2 s = 0 \tag{1}$$

Facendo allora:

$$x^2 = r y \tag{2}$$

risulterà:

$$4 xy - 3 r x + rs = 0 \tag{3}$$

Conduciamo pel centro O (vertice dell'angolo) due rette ortogonali, una delle quali OX passi per l'estremo A dell'arco AB dato.

L'equazione (2) è quella d'una *parabola* coll'asse principale diretto secondo OY ed il cui parametro è uguale ad r; questa curva è tangente in O all'asse delle ascisse. La sua costruzione è facile poichè si hanno per $y = 0\ ,\ r\ ,\ 2r \cdots\cdots$ i seguenti valori di x:

$$x = 0 \qquad \pm r \qquad \pm r\sqrt{2} \cdots\cdots$$

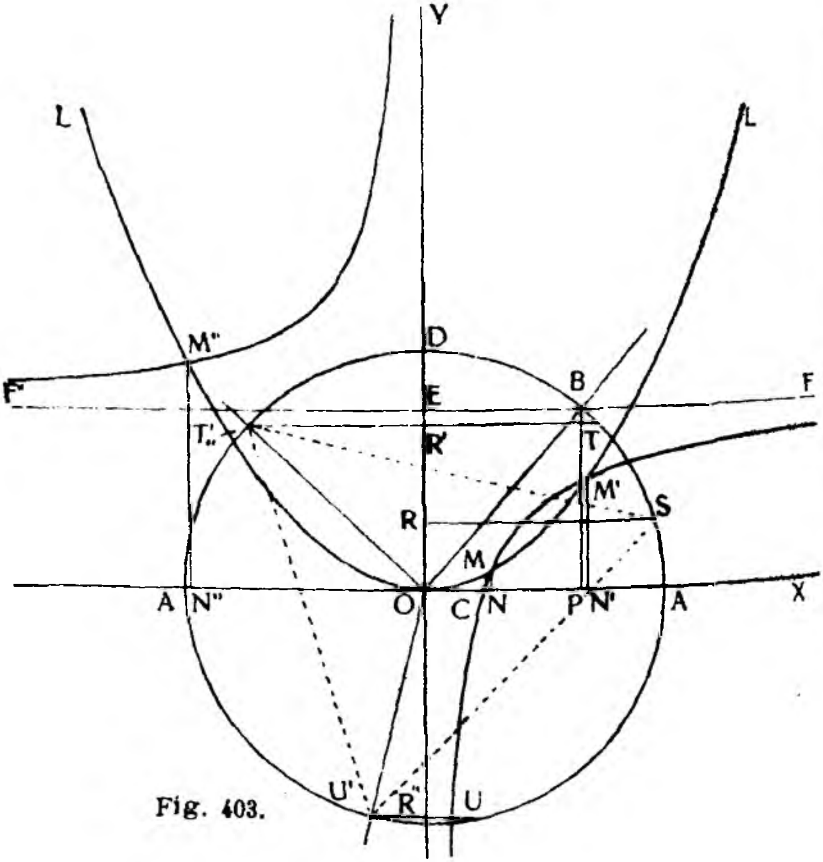


Fig. 403.

L'equazione (3) è quella d'una iperbola avente per assintoti le rette:

$$x = 0 \qquad y = \frac{3\,r}{4}$$

ossia l'asse delle y ed una parallela all'asse delle x distante da esso di:

$$OE = \frac{3\,r}{4} = \frac{3}{4}\,OD$$

Facendo nell'equazione (3) $y = o$ si ha:

$$x = \frac{s}{3} = \frac{BP}{3} = OC = \frac{1}{4} OD$$

È dunque facile costruire anche questa conica, mediante le seganti uscenti da C.

Il ramo inferiore dell'iperbola sega la parabola in due punti M, M', mentre il ramo superiore la sega in un punto solamente M''. Abbassando le perpendicolari da tali punti sull'asse delle x, si hanno in ON, ON', ON'' le tre radici dell'equazione (1).

Questi valori, due positivi e uno negativo, esprimono dei seni; occorre quindi riportarli sull'asse OY da O rispettivamente in R, R', R'' e condurre poi le parallele RS, $R'T$, $R''U$ all'asse OX. Gli archi AS, AT, AU rappresentano:

$$\frac{\alpha}{3} \qquad \frac{\pi - \alpha}{3} \qquad -\frac{\pi + \alpha}{3}$$

che sono i *tre* valori della terza parte d' un arco di dato seno.

I punti S, T', U' costituiscono i vertici del triangolo equilatero di cui si è trattato precedentemente (vedi pag. 446) e vi corrispondono:

$$AS = \frac{\alpha}{3} \qquad ABT' = \frac{\alpha + 2\pi}{3} \qquad ABU' = \frac{\alpha + 4\pi}{3}$$

VIII. — **Soluzione di Delbœuf.** — Sia $YAX = \theta$ l'angolo dato (fig. 404). Tutto si riduce a costruire un triangolo AKL nel quale θ sia l'angolo esterno, e l'angolo K doppio di L. La bisettrice di K incontra AX in un punto B equidistante da K e da L; le perpendicolari BC, BG abbassate su AK, KL sono uguali. Se si dà il punto B, e si considera solamente la condizione $BK = BL$ il punto G descrive un luogo geometrico definito da questa costruzione:

Dal punto B come centro, con raggio arbitrario, si descrive una circonferenza $DEE'D'$; si prendono i punti di mezzo M, Z, T, P delle corde DE, ED', $D'E'$, $E'D$ che uniscono i punti d'intersezione della circonferenza coi lati dell'angolo YAX. Questi punti determinano un'iperbola equilatera che sega in G il cerchio descritto da B come centro, tangente ad AY; la perpendicolare BG in G sarà la base del triangolo cercato AKL.

La curva ausiliaria è un'iperbola equilatera perchè la CM, congiungendo i punti di mezzo delle corde DD', DE, si ha:

$$DCM = DD'E = \frac{1}{2} DBE = MBE$$

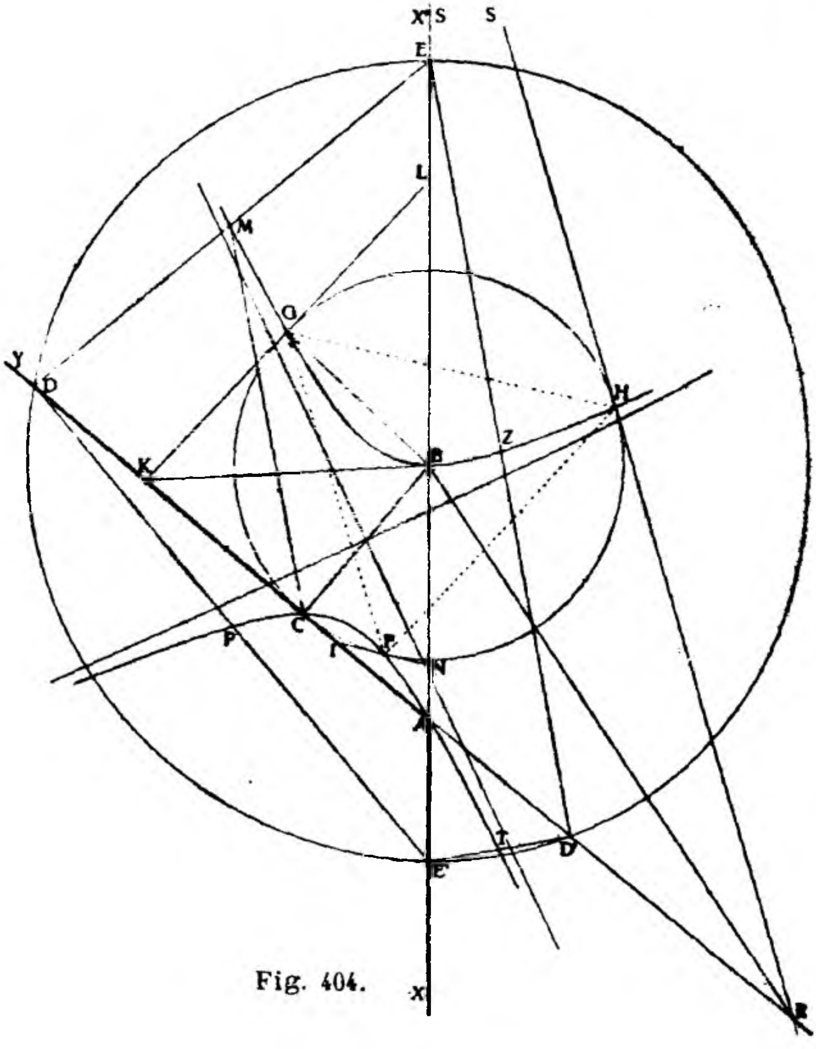


Fig. 404.

dunque le rette CM, BM ruotano con la stessa velocità, in senso contrario, attorno a C e B. Quando il cerchio $DEE'D'$ passa per A i punti di mezzo delle corde $D'E$, $D'E'$, DE' coincidono rispettivamente con B, A, C. Essendo AB e AC due corde supplementari dell'iperbola, gli assintoti sono paralleli alle bisettrici degli angoli YAX, YAX'; essi fanno dunque con BC gli angoli:

$$\frac{1}{2}\theta\,,\quad \frac{1}{2}(\pi+\theta)$$

Consideriamo ora gli altri due punti d'incontro del circolo coll'iperbola, diversi da C avremo:

$$B\hat{S}R = B\hat{R}S = B\hat{R}A' = \frac{1}{3}\,Y\hat{A}B = \frac{\pi-\theta}{3}$$

$$F\hat{N}B = F\hat{I}B = C\hat{I}B = \frac{2\pi-\theta}{3}$$

Dunque le basi dei tre triangoli AKL, ARS, AIN formano con AX' gli angoli:

$$\frac{1}{3}\theta\,,\quad \frac{1}{3}(\pi-\theta),\ (2\pi-\theta)$$

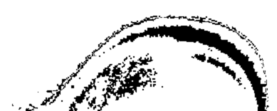
ossia l'iperbola è trisettrice dei tre angoli θ, $\pi-\theta$, $2\pi-\theta$.

Questa soluzione differisce da quella classica di Chasles (vedi fig. 402, pag. 452) solamente per il punto di partenza, ma in sostanza è identica ad essa.

Gli angoli GBL, GBK, KBC essendo uguali tra loro, l'iperbola realizza la trisezione dell'angolo CBX' che indicherò con θ'. Parimente l'angolo $CBA = \pi - \theta'$ e l'angolo rientrante $CBX' = 2\pi - \theta'$ sono divisi in tre parti uguali da BI e BF, BR e BH. I punti F, G, H sono vertici d'un triangolo equilatero come già si è veduto (vedi pag. 446).

Quando l'iperbola equilatera è data, si traccerà il diametro BC facente con un assintoto l'angolo $\frac{1}{3}\theta'$ si condurrà CA perpendicolare a CB, nonchè la corda AB, ecc.

IX. — Con la chiocciola di Pascal. — Sia l'angolo CAB da dividere in tre parti uguali (fig 405). A destra e sinistra del vertice A, sopra AC e il suo prolungamento, si prendono lunghezze uguali AO e AD; dal punto O come centro e con raggio OA si descrive una circonferenza; poi si descrive la sua pedale rispetto al punto D; questa è la chiocciola di Pascal.



Dal punto B in cui il lato AB incontra tale curva, si conduce una tangente BT alla circonferenza OA; la retta AT che unisce il vertice dell'angolo al punto di contatto forma l'angolo:

$$C\widehat{A}T = \frac{C\widehat{A}B}{3}$$

Infatti, il punto B della pedale è il piede della perpendicolare abbassata da D sulla tangente BT; ora, se si prolunga il raggio OA d'una lunghezza uguale alla sua e se dal punto D

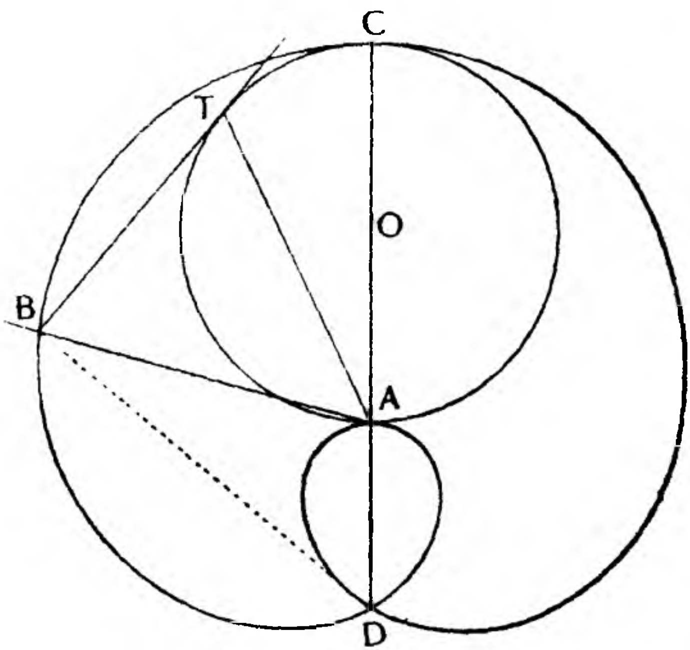


Fig. 405.

così ottenuto si abbassa una perpendicolare sopra una tangente BT, congiungendo il piede B al punto A si ottiene appunto un angolo:

$$A\widehat{B}D = \frac{1}{3}\ O\widehat{A}B$$

poichè il triangolo BAT riesce isoscele, epperò:

$$A\widehat{B}D = \frac{B\widehat{A}T}{2} = A\widehat{T}O = C\widehat{A}T$$

(Vedasi oltre: *Soluzioni dell'Autore*).

X. – Sia POQ l'angolo dato. Descriviamo, dal vertice come centro, un circolo che segherà OP in A e OQ in B e il suo prolungamento in C. Se si potesse determinare su CP un

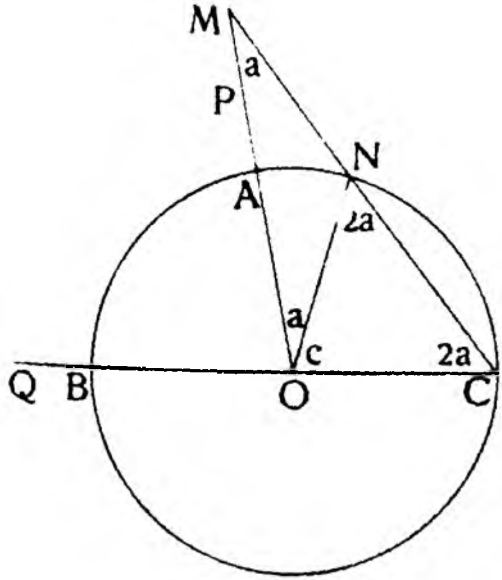


Fig. 406.

punto M esterno al cerchio, tale che sulla segante MCN risultasse il segmento MN uguale al raggio OA, sarebbe risolto il problema, poichè si avrebbe:

$$O\hat{M}C = \frac{1}{3} M\hat{O}Q$$

Infatti, essendo isosceli i due triangoli MNO, NOC, si ha:

$$c = \pi - 4a \qquad \text{ossia} \qquad c + a = \pi - 3a = \pi - M\hat{O}Q$$

da cui:

$$a = \frac{1}{3} M\hat{O}Q$$

La posizione del punto M, che gli antichi determinavano mediante la concoide, si può ottenere del pari con le coniche come vedremo.

XI. — Con la trisettrice di Maclaurin. — Riferiamoci alla costruzione indicata a pag. 348 fig. 303.

Dato un angolo POB, per trisecarlo si traccerà con centro nel suo vertice O una circonferenza rispetto alla quale si descriverà la trisettrice nel modo sopra indicato. Essa segherà in P il lato OP dell'angolo dato e conducendo da esso la tangente al circolo, si avrà:

$$P\widehat{O}M = \frac{1}{3} \; P\widehat{O}B$$

Si avrebbe parimente:

$$P\widehat{\omega}B = \frac{1}{3} \; P\widehat{O}B$$

e siccome OP sega la trisettrice in altri due punti che diremo α e β si avrebbero da essi le altre due soluzioni del problema come ho indicato in soluzioni precedenti.

XII. Con la strofoide (1). — Si è già scoperto un gran numero di belle proprietà della strofoide e si sono anche indicate molte questioni nelle quali essa rende grandi servizii. Ma credo che non sia stato finora osservato come si possa applicarla alla trisezione dell'angolo e alla soluzione del problema di Delo (2); vale a dire come essa appartenga ad un tempo alla categoria delle *curve settrici* e a quella delle *curve duplicatrici*.

Il che si rileva da uno studio attento di due passaggi della inesauribile corrispondenza di Cr. Huygens.

Nella lettera indirizzata dal matematico tedesco Kinner a Cr. Huygens il 18 luglio 1653 si legge il seguente procedimento per dividere un angolo in tre parti uguali: « Sia ABC l'arco « dato; si applichi una riga passante pel centro D di quest'arco « in modo che essa seghi la corda AC in E e l'arco ABC in F, « così da avere $CE = CF$. Dico che l'arco CA è il triplo di CF ».

Chiamiamo infatti G la seconda estremità del diametro FD (fig. 407) e uniamo il punto A ai punti F e G. Ponendo:

$$C\widehat{E}F = C\widehat{F}E = \alpha \qquad \text{si avrà} \qquad E\widehat{C}F = \pi - 2\alpha \qquad G\widehat{E}A = \alpha$$

$$C\widehat{A}F = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi - 2\alpha}{2} = \frac{1}{2} \, A\widehat{C}F$$

---

(1) Nota del Prof. Gino Loria in *Mathesis* 1898, pag. 265.
(2) Vedi: *Duplicazione del cubo.*

Quindi l'arco di AF è doppio di CF, ossia CF è il terzo di AC come Kinner aveva asserito.

Per applicare questa osservazione alla trisezione dell'arco ABC, è evidentemente sufficiente trovare l'intersezione del

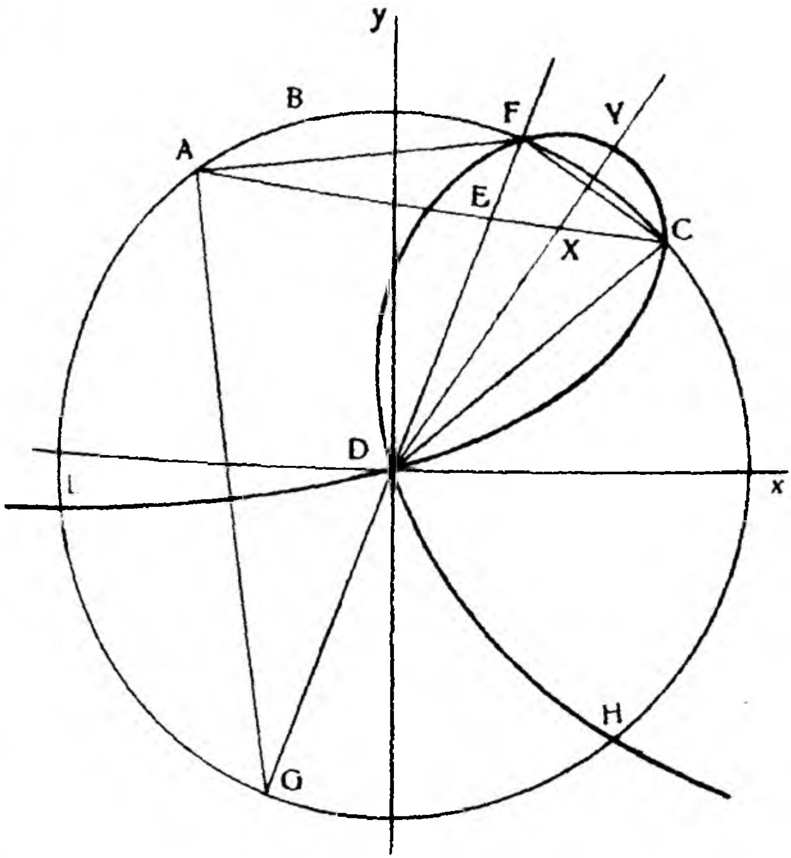


Fig. 407.

circolo D con una curva generata nel seguente modo: « Con-« dotta per D una trasversale arbitraria che seghi in X la « corda AC, si prende su questa trasversale un punto Y tale da « avere $CY = CX$; il luogo di Y è la curva di cui si tratta »

L'equazione della curva, prendendo l'origine in D e l'asse delle x parallelo ad AC, è:

$$(x^2 + y^2)\, y + bx^2 - 2\, axy - by^2 = 0$$

nella quale a e b sono le coordinate del punto fisso C.

Siccome il luogo rappresentato è una cubica circolare con un punto doppio a tangenti rettangolari, la curva trisettrice è una strofoide; essa sega il circolo, oltre che in C e nei punti circolari all'infinito, in altri tre punti L, F, H, il che corrisponde al grado del problema della trisezione d'un arco. Infatti si ha:

$$\widehat{CF} = \frac{1}{3}\,\widehat{CA}$$

$$C\widehat{B}L = \frac{1}{3}\,(\widehat{CA} + 2\,\pi) \qquad C\widehat{B}H = \frac{1}{3}\,(\widehat{CA} + 4\,\pi)$$

I punti F, L, H sono i vertici d'un triangolo equilatero, come già si è detto.

XIII. — Con la Concoide di Nicomede. — Abbiansi un punto fisso O (fig. 408) ed una retta fissa m, distante da esso $OE = a$. Su di un raggio uscente da O, e segante la m in S, portiamo da S, nei due sensi, un segmento *costante* $ST = SU = b$. Il luogo dei punti T, U, quando varia il raggio uscente da O, sarà la Concoide di Nicomede.

Se $b = a$ la curva presenta in O una cuspide; se $a > b$ si ha in O un nodo, come nella figura; se $b < a$ la curva non ha nodo nè cuspide, ma un punto doppio *isolato* in O.

L'equazione della curva è:

$$(x^2 + y^2)^2\,(x - a)^2 = b^2\,x^2$$

Quella dell'assintoto, comune ai due rami della curva, è $x = a$. La presenza del fattore $(x^2 + y^2)$ ci dice che la curva passa all'infinito pei punti ciclici.

Sia YOC (ossia ABN) l'angolo da trisecare; tracciamo il circolo di centro B e di raggio BO. Esso sega la concoide in otto punti; di questi sono estranei alla soluzione i due che cadono nell'origine, i due immaginarii (punti ciclici) e il punto C che trovasi sul lato OB dell'angolo dato. Agli altri tre M, P, N, vertici del triangolo equilatero già precedentemente considerato, corrispondono le tre soluzioni del problema. Considerando infatti il punto M, si hanno i due triangoli isosceli OBM, MBR dai quali si rileva appunto essere l'angolo:

$$A\widehat{O}M = \frac{1}{3}\,A\widehat{O}C \qquad \text{ossia l'arco} \qquad \widehat{VM} = \frac{1}{3}\,\widehat{VA}$$

d'onde:

$$\widehat{VN} = \frac{1}{3}\,(2\,\pi - \widehat{VA}) \qquad V\widehat{N}P = \frac{1}{3}\,(4\,\pi - \widehat{VA})$$

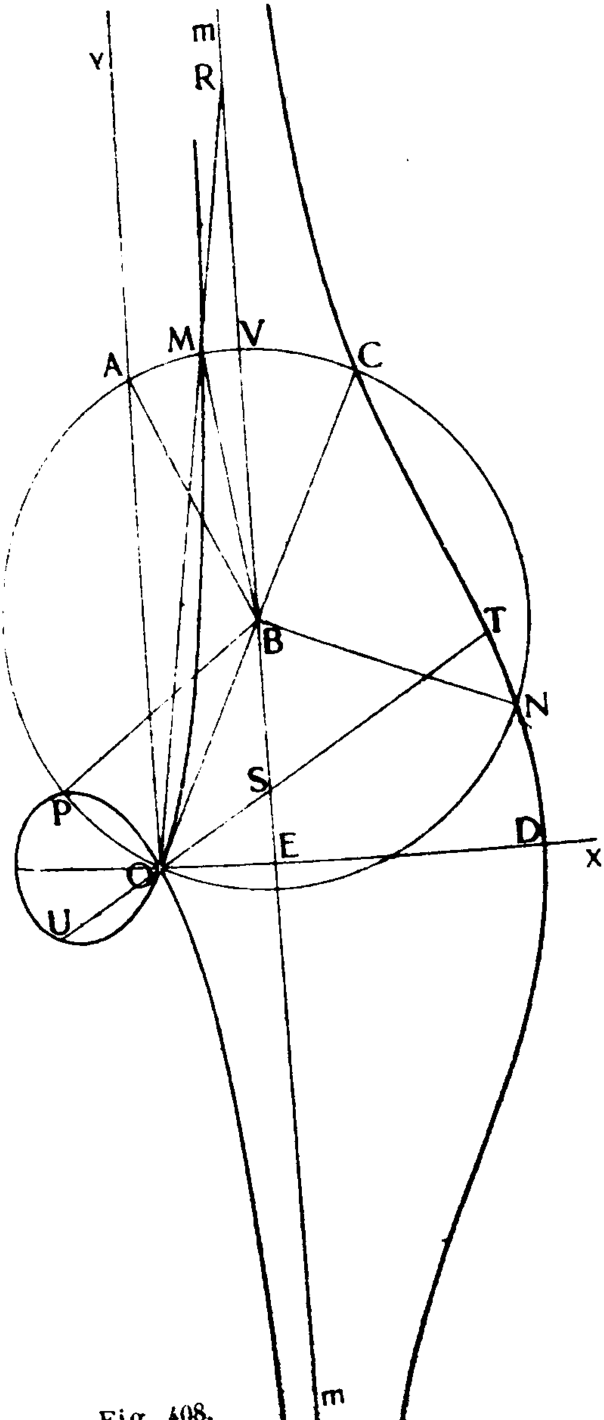


Fig. 408.

XIV. — Soluzioni dell'Autore. — Fra le tante soluzioni di questo problema varie ve ne sono dipendenti fra loro, che mai mi è occorso di vedere opportunamente coordinate, ma sempre esposte isolatamente. Pure, tale coordinazione o dipendenza, non essendo senza interesse, ho creduto farla qui rilevare, posto che ho toccato l'argomento.

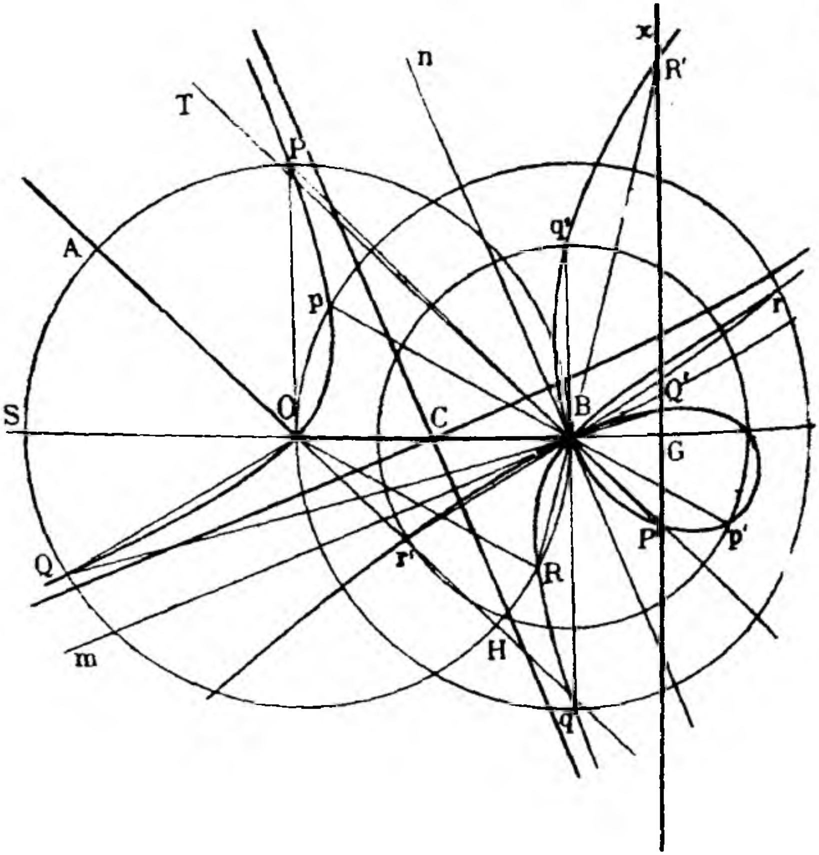


Fig. 409.

Cominciamo dalle soluzioni indicate dal Chasles (v. pag. 457 N. VI) e dal Loria (v. pag. 460 N. XII). Ripetiamo nella fig. 409 la prima costruzione (vedi fig. 402), con le stesse lettere, indicando con α l'angolo dato BOA.

Assumiamo come polo d'inversione il punto B, con una potenza arbitraria $-k^2$. Al circolo O (OA) corrisponderà una retta x perpendicolare ad OB, e l'iperbola equilatera si trasformerà in una strofoide obliqua, le cui tangenti m, n nel punto doppio B sono parallele agli assintoti dell'iperbola. Ai punti P, Q, R comuni al circolo OA e all'iperbola, che ci danno la trisezione degli angoli BOA, ecc., corrisponderanno i punti P', Q', R' comuni alla retta x e alla trofoide.

Dai triangoli $BR'G$, BOR abbiamo:

$$B\widehat{R'}G = \frac{1}{2}\, B\widehat{O}R = \frac{1}{3}\, B\widehat{O}H = \frac{1}{3}\, A\widehat{O}S = \frac{1}{3}(\pi - \alpha)$$

Analogamente si trova:

$$B\widehat{Q'}G = \frac{1}{2}\, B\widehat{O}Q = A\widehat{O}Q = \frac{1}{3}(2\pi - \alpha)$$

$$B\widehat{P'}G = \frac{1}{2}\, B\widehat{O}P = A\widehat{O}P = \frac{1}{3}\, \alpha$$

Cosicchè il risolvere il problema della trisezione dell'angolo mediante le intersezioni d'una retta con una strofoide rinviene al risolverlo mediante quella d'un circolo e d'una iperbola equilatera, secondo la *classica* soluzione.

— Osserviamo ancora, che se il circolo O (OA) fosse stato descritto dal centro B e si fosse considerato dato l'angolo:

$$T\widehat{B}S = \pi - \alpha = \beta$$

si sarebbero ottenute le soluzioni del problema mediante le intersezioni p, q, r del circolo con l'iperbola, simmetriche di P, Q, R rispetto al centro di essa C, per cui:

$$T\widehat{B}p = R\widehat{O}H = \frac{1}{3}\, \beta$$

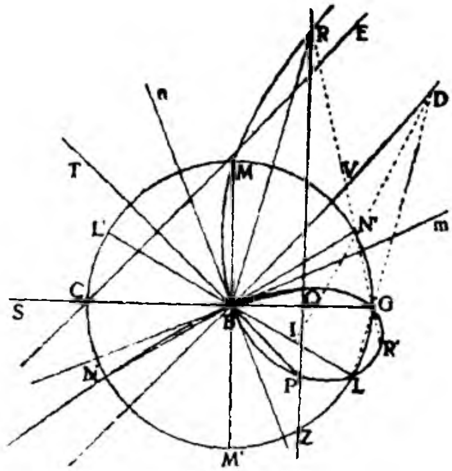
$$r\widehat{B}P' = A\widehat{O}Q = \frac{1}{3}(2\pi + \beta)$$

$$q\widehat{B}P' = A\widehat{O}P = \frac{1}{3}(4\pi + \beta)$$

L'inverso del circolo B (BO) sarà un circolo ad esso concentrico, segante la strofoide nei punti p', q', r' corrispondenti a p, q, r. Dunque la soluzione accennata dall'Huygens e sviluppata dal Loria (v. pag. 460 N. XII) si può ottenere essa pure, per inversione, da quella *classica*.

– La strofoide e la retta (o il circolo, rispetto a un dato angolo, sono individuati nel modo che risulta dalla inversione sopra considerata, ma possiamo usarli per la soluzione del problema, indipendentemente dalle linee dalle quali furono generate. Sia infatti $SBT = \alpha$ l'angolo dato. Descritta dal suo

Fig. 410.



vertice come centro una circonferenza, che sega SB in G e C, conduciamo per B e C due perpendicolari BD, CE al lato BT dell'angolo dato. Avremo in G il polo, in CE l'assintoto della strofoide, e in m, n, bisettrici dell'angolo;

$$P\widehat{B}D = \frac{\pi}{2} - \alpha \qquad \text{e} \qquad S\widehat{B}D = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

le tangenti nel suo punto doppio B. La curva segherà il circolo nei punti L, M, N tali che si avrà:

$$T\widehat{B}L' = \frac{1}{3}\alpha$$

$$T\widehat{B}M' = \frac{1}{3}(2\pi + \alpha) \qquad \text{(convesso)}\ T\widehat{B}N' = \frac{\pi}{2}(4\pi + \alpha)$$

Infatti si ha dai triangoli isosceli BDL, BGL e dal triangolo rettangolo BDI:

$$D\widehat{B}G + G\widehat{B}L + B\widehat{D}I = \frac{\pi}{2}$$

Ma:

$$B\hat{D}I = \frac{1}{2}\, G\hat{B}L \qquad \text{e} \qquad D\hat{B}G = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

per cui

$$\frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{3}{2}\, G\hat{B}L = \frac{\pi}{2} \qquad \text{ossia} \qquad G\hat{B}L = \frac{2}{3}\,\alpha$$

per cui:

$$T\hat{B}L' = \frac{1}{3}\,\alpha \text{ ecc.}$$

— Parimente, la strofoide sega la perpendicolare innalzata sul punto di mezzo di BP nei punti P , Q , R tali che si ha:

$$B\hat{R}Z = \frac{1}{3}\,\alpha$$

$$B\hat{Q}Z = \frac{1}{3}(2\,\pi + \alpha) \qquad B\hat{P}Z = \frac{1}{3}(4\,\pi + \alpha)$$

La dimostrazione è assai semplice: il punto R della strofoide si ottiene conducendo pel polo G la retta GR e portando su essa, a partire da V, i segmenti $VR = VR' = VB$. Ora abbiamo:

$$G\hat{B}D + D\hat{B}R + \frac{1}{2}\, B\hat{R}G = \frac{\pi}{2}$$

e siccome:

$$G\hat{B}D = \frac{\pi}{2} - \alpha \qquad D\hat{B}R = B\hat{R}G = 2\, B\hat{R}Z$$

avremo:

$$\frac{\pi}{2} - \alpha + 2\, B\hat{R}Z + B\hat{R}Z = \frac{\pi}{2} \qquad \text{ossia} \qquad B\hat{R}Z = \frac{1}{3}\,\alpha$$

e analogamente:

$$B\hat{Q}Z = B\hat{R}Z + \frac{2\,\pi}{3} = \frac{1}{3}(2\,\pi + \alpha)$$

$$B\hat{P}Z = B\hat{R}Z + \frac{4\,\pi}{3} = \frac{1}{3}(4\,\pi + \alpha)$$

— Passiamo ora a studiare l'inversa d'un'altra soluzione, quella di Pappo (fig. 400 a pag. 449). Sia dunque l'iperbola (fig. 411) d'eccentricità 2, della quale A ed N sono i vertici, B un foco, O il centro; l'angolo degli assintoti è di 60°, ecc.

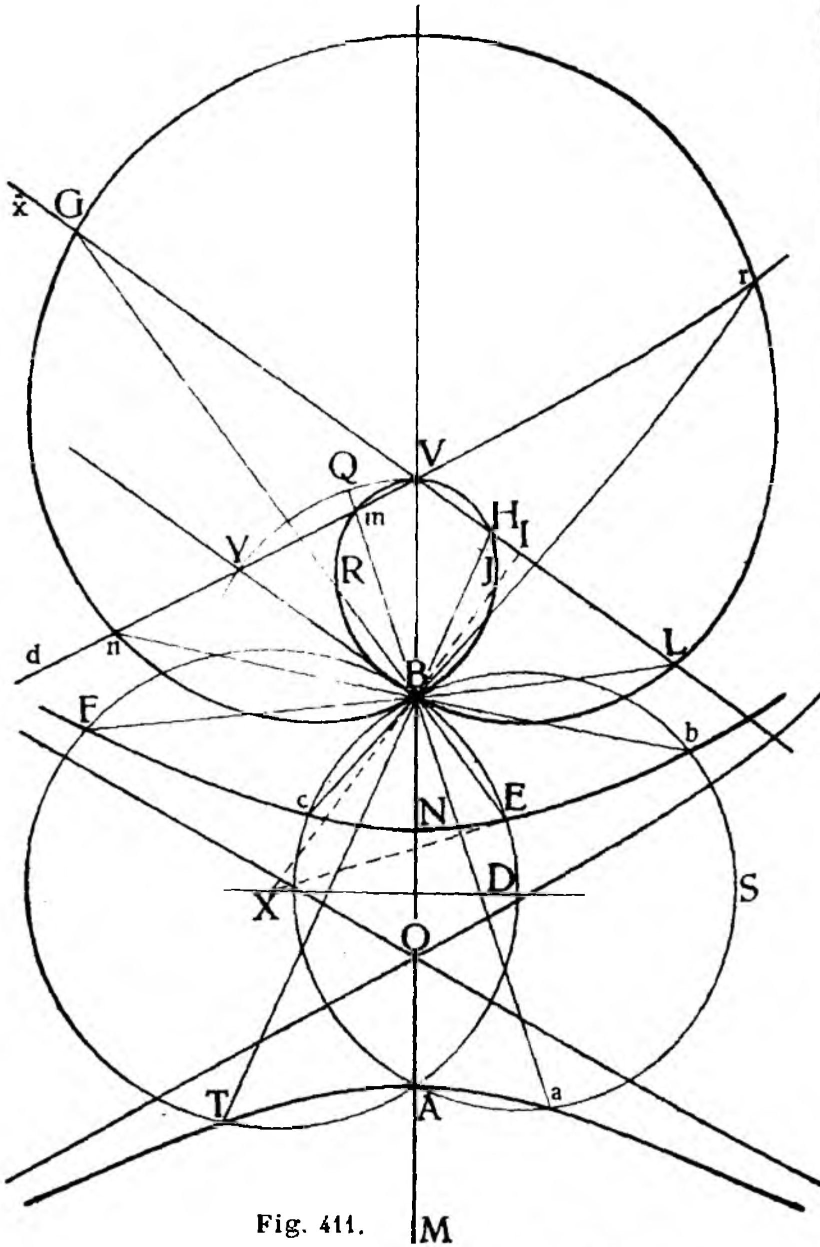


Fig. 411.

Sia AFB il segmento di circolo capace dell'angolo dato; le soluzioni del problema corrisponderanno ai punti d'intersezione del circolo con l'iperbola, A esclusa, cioè ad E, T, F. Si avrà:

$$B\widehat{E} = \frac{1}{3}\, B\widehat{E}A$$

$$B\widehat{E}T = \frac{1}{3}(2\pi + B\widehat{E}A) \qquad B\widehat{E}F = \frac{1}{3}(4\pi + B\widehat{E}A)$$

Ora, assumendo come polo d'inversione il foco B, si otterrà il circolo ABF invertito in una retta x, e l'iperbola in una chiocciola di Pascal; le intersezioni G, H, L di questa curva con la retta x risolveranno il problema, eccettuando V corrispondente ad A. Si avrà quindi:

$$B\widehat{G}V = \frac{\alpha}{3} \qquad B\widehat{H}V = \frac{1}{3}(2\pi - \alpha) \qquad B\widehat{L}V = \frac{1}{3}(\pi - \alpha)$$

Infatti, dai triangoli BGI, BXE si ha:

$$B\widehat{G}I = B\widehat{G}V = \frac{1}{2}\, B\widehat{X}E = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} \times 2\alpha\right) = \frac{\alpha}{3}$$

e analogamente per $B\widehat{H}V$ e $B\widehat{L}V$.

— Nella soluzione di Pappo (v. fig. 400 a pag. 449) si considera pure un circolo di centro D e di raggio DA, nel quale l'arco ASB risulta capace dell'angolo $\frac{\pi - \alpha}{2}$. Le sue intersezioni a, b, c con l'iperbola risolvono il problema rispetto a tale angolo, ma anche rispetto ad α. Nella nostra inversione tale circolo si trasforma nella retta d, le cui intersezioni m, n, r con la chiocciola di Pascal danno gli angoli:

$$m\widehat{B}V = A\widehat{B}a = \frac{\alpha}{3}$$

$$n\widehat{B}V = A\widehat{B}b = \frac{1}{3}(\pi + \alpha) \qquad r\widehat{B}V = A\widehat{B}c = \frac{1}{3}(\pi - \alpha)$$

come è facile vedere. Questa soluzione si ottiene *direttamente* quando, dato l'angolo $\alpha = YBV$ si consideri la chiocciola di Pascal come luogo geometrico del punto m nel quale la corda variabile YV è segata dal raggio BQ facente con quello fisso BV angolo uguale ad $\frac{1}{3}\alpha$.

— Consideriamo ora la stessa soluzione di Pappo (fig. 400), ma assumiamo come polo d'inversione il vertice A dell'iperbola, e una potenza qualunque. Nella fig. 412 si è fatto $k^2 = -6$, essendo $AN = +2$; risulta perciò $AM = -3$. Il circolo X descritto su AB come corda, e coi segmento AZB capace dell'angolo α diventa la retta x, mentre l'iperbola si trasforma

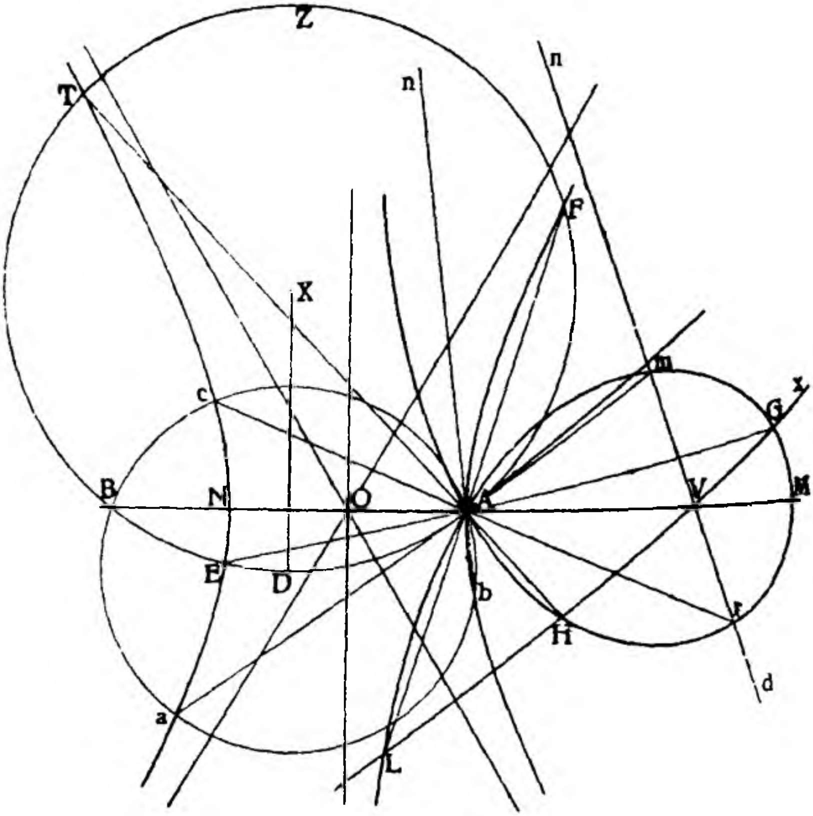


Fig. 412.

in una trisettrice di Maclaurin. Alle intersezioni E, F, T del circolo X con l'iperbola corrispondono i punti d'intersezione G, L, H della x con la trisettrice. Risultano quindi, secondo la dimostrazione data nei casi precedenti:

$$M\widehat{A}G = \frac{\alpha}{3} \qquad M\widehat{A}H = \frac{1}{3}(\pi - \alpha) \qquad M\widehat{A}L = \frac{1}{3}(2\pi - \alpha)$$

— Se consideriamo anche qui, come nel caso precedente, il circolo $D\,(DA)$ che ha per inversa la retta d, le intersezioni m, n, r di questa con la trisettrice ci daranno:

$$A\widehat{n}V = \frac{\alpha}{3} \qquad A\widehat{m}V = \frac{1}{3}(\pi + \alpha) \qquad A\widehat{r}V = \frac{1}{3}(\pi - \alpha)$$

— Anche l'ipocicloide tricuspidale è una trisettrice. Infatti (fig. 413), sia dato l'angolo $CJR = \alpha$ da trisecare; descriviamo il circolo $J\,(JL)$, tangente alla corda CR; si tratta di trovare

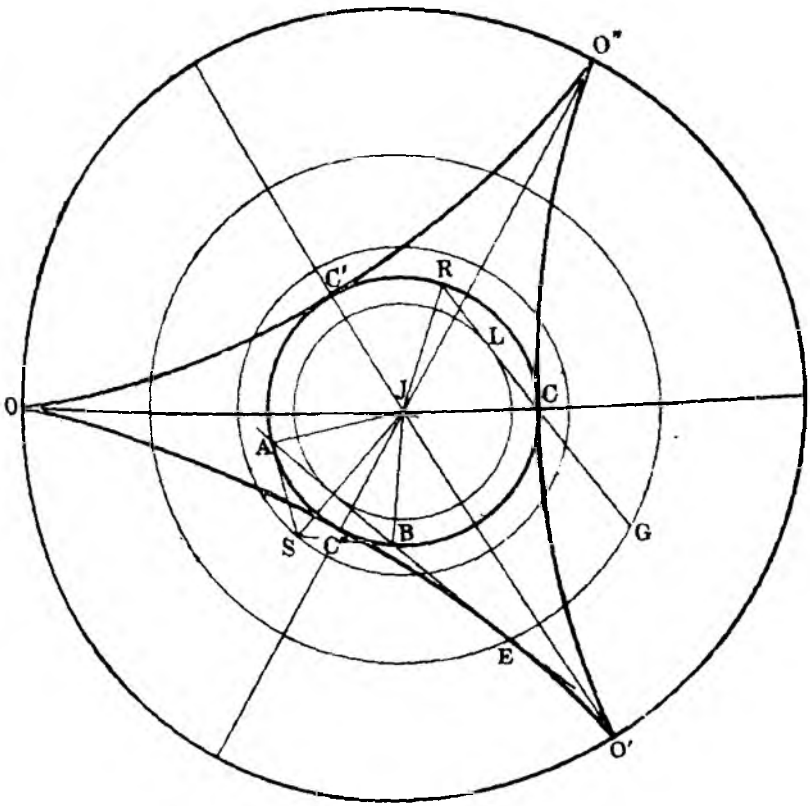


Fig. 413.

una tangente comune all'ipocicloide e ad esso circolo, cioè la posizione AB della corda CR. Ma si è veduto (pag. 361) che il punto E di contatto della tangente coll'ipocicloide è simmetrico di A rispetto a B; descritto dunque un circolo $J\,(JG)$, essendo $CG = CR$, si otterrà il punto E come intersezione di questo circolo coll'ipocicloide; la tangente da E al circolo JL ci darà:

$$B\widehat{J}C'' = \frac{1}{3}\,\alpha \qquad B\widehat{J}C = \frac{1}{3}\,(2\,\pi - \alpha) \qquad B\widehat{J}C' = \frac{1}{3}\,(2\,\pi + \alpha)$$

— Osserviamo ora che, se la soluzione precedente era data dalle *tangenti* comuni al circolo $J\,(JI)$ e all'ipocicloide, quando si considerino invece le rispettive curve polari reciproche — conica fondamentale, circolo $J\,(JA)$ — cioè il circolo $J\,(JS)$ e la trisettrice $\boldsymbol{T}$ di Longchamps (v. fig. 312 a pag. 360) si otterranno le soluzioni del problema mediante le *intersezioni* di esse.

Dato dunque l'angolo RJC si costruisce il polo K della corda RC e si descrive il circolo $J\,(JK)$ che saga in un punto S (vedi fig. 413) la curva trisettrice $\boldsymbol{T}$. La tangente SB al circolo fondamentale determinerà l'angolo:

$$B\widehat{J}C'' = \frac{1}{3}\,\alpha$$

Si può anche osservare che:

$$S\widehat{J}C'' = \frac{1}{6}\,\alpha$$

Quindi, se in luogo del circolo $J\,(JK)$ relativo ad un angolo α, si costruisce quello relativo ad un angolo $2\,\alpha$ (come vedesi nella fig. 312 a pag. 360) mediante la tangente PQ in P (essendo $POQ = \alpha$), si risparmia la costruzione della tangente SB (fig. 413) ottenendosi direttamente dalle intersezioni S, T, U di tale circolo con la $\boldsymbol{T}$:

$$A\widehat{O}S = B\widehat{O}Z = \frac{1}{3}\,\alpha$$

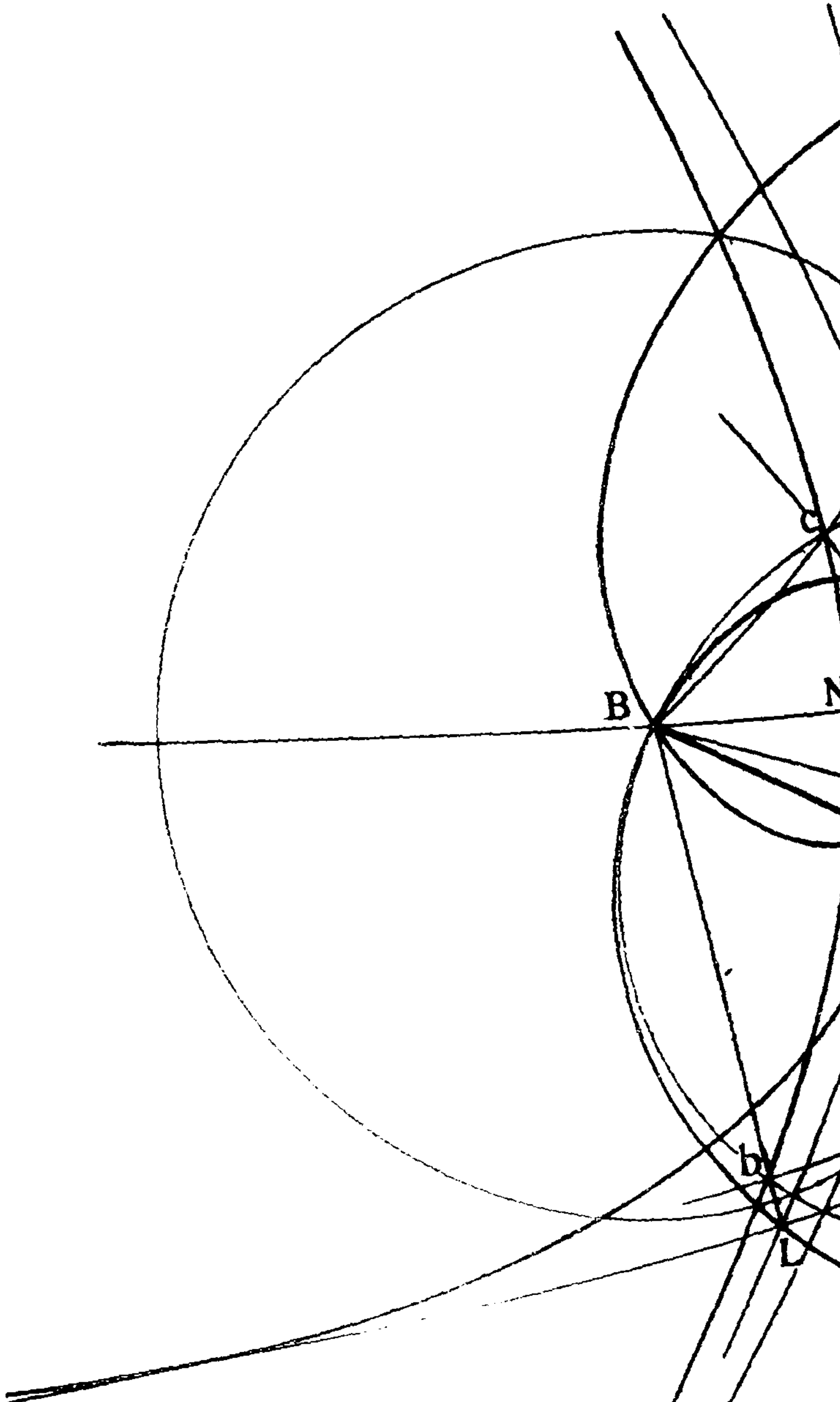
$$B\widehat{O}T = \frac{1}{3}\,(\pi - \alpha) \qquad B\widehat{O}V = \frac{1}{3}\,(2\,\pi - \alpha)$$

D'altronde, per l'equazione della $\boldsymbol{T}$ (vedi pag. 361), si ha:

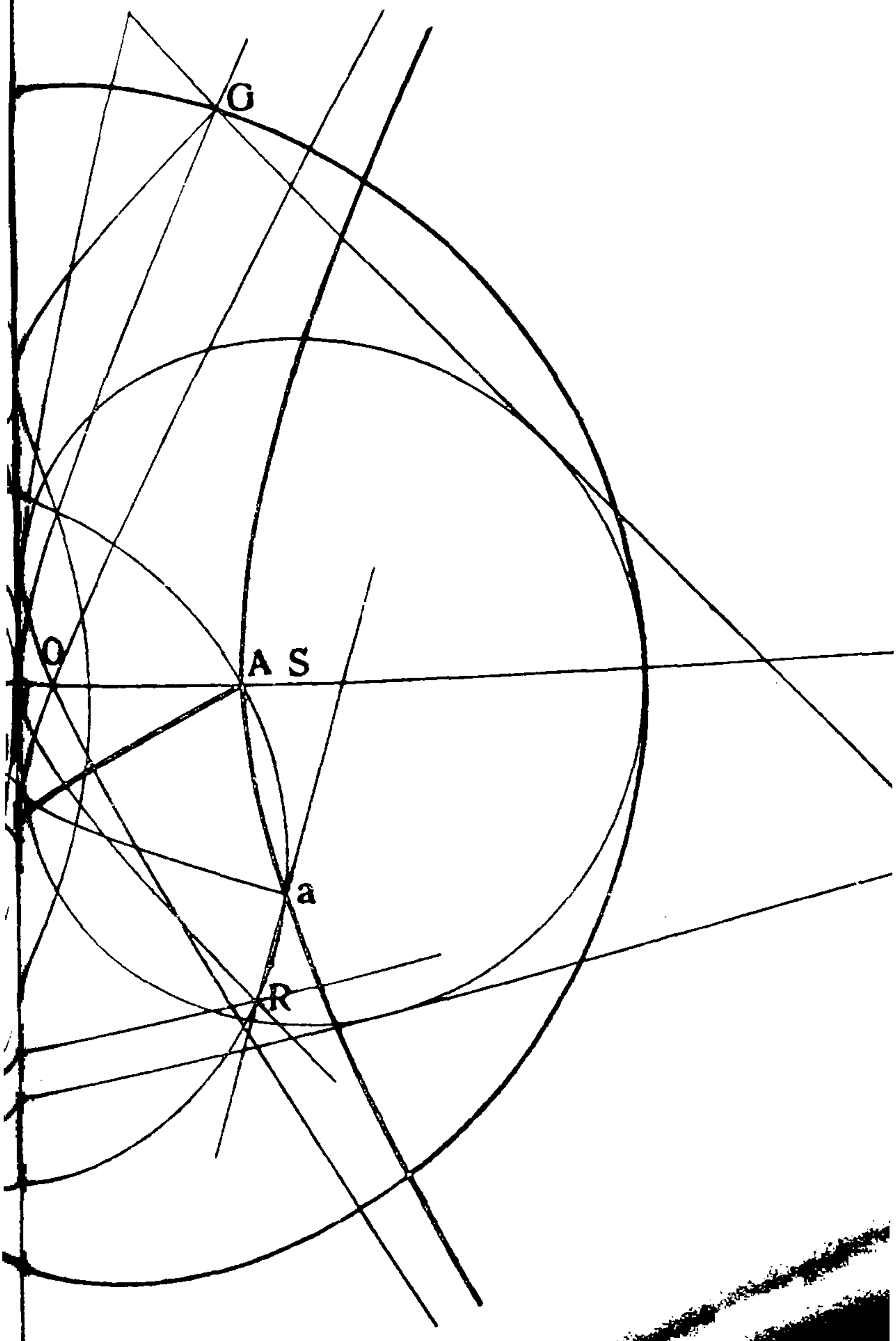
$$OQ = \frac{R}{\cos 3\,Q\widehat{O}Z}$$

ed essendo:

$$OQ = \frac{R}{\cos\alpha} \quad \text{ne segue che} \quad Q\widehat{O}Z = \frac{\alpha}{3}$$



C
B
N
b
L



614.

— Consideriamo ancora l'iperbola di eccentricità 2, e il circolo di centro O e raggio DB (fig. 414). La polare reciproca dell'iperbola, rispetto ad un circolo di raggio k avente il centro in un suo foco B, sarà un circolo S (SV), la cui pedale è la chiocciola di Pascal, inversa dell'iperbola dal polo d'inversione B, con potenza k^2.

La polare reciproca del circolo D sarà una parabola le cui tangenti comuni col circolo S (diverse da quelle in V, polare di A) saranno le polari dei punti a , b , c, intersezioni del circolo D con l'iperbola, che risolvono il problema della trisezione dell'angolo ADB. Tali tangenti, che costituiscono un triangolo equilatero circoscritto al circolo S (SV) ed iscritto nell'altro S (SB) ci darebbero esse pure la trisezione di ADB.

Naturalmente, poi, esse segano la chiocciola di Pascal nei punti G , H , L nei quali essa è segata dalla retta inversa del circolo D, corda comune ai circoli D e B.

Dato dunque un angolo ADB da trisecare, si descrive un circolo D (DA) dal vertice come centro; si divide in N , O la corda AB in tre parti uguali e, stabilita una potenza k^2, si traccia il circolo S (SV) inverso di quello avente il diametro NA. Si costruiscono poi le tangenti comuni al circolo S (SV) e alla parabola che ha per asse BD, per foco B e per tangente nel vertice la perpendicolare da V alla DB. Le perpendicolari da B sulle tre tangenti comuni (diverse da quella in A) segheranno il circolo D nei punti a , b , c , ecc.

— Analogamente (fig. 414) consideriamo la chiocciola di Pascal BV; sia l'iperbola NA la pedale da B della reciproca P di detta chiocciola rispetto al circolo B; alla retta $GVHL$, inversa (da B , k^2) del circolo D, corrisponde il suo polo R, altro estremo del diametro BD. Le tangenti condotte da R alla curva P (diverse dalla RA) cioè Ra , Rb , Rc facenti fra loro angoli di 120° determinerebbero i punti a , b , c sulla circonferenza BAR, che risolvono il problema. Tali tangenti sono parallele a quelle comuni al circolo S (SV) e alla parabola.

A costruzioni analoghe si perverrebbe, ma meno semplici, scegliendo come centro d'inversione, e quindi come centro del circolo fondamentale per la trasformazione polare, un vertice dell'iperbola o un punto non particolare di essa.

Abbiamo dunque quattro soluzioni del problema, intimamente dipendenti l'una dall'altra, cioè:

1.° Intersezioni dell'iperbola col circolo D.

2.° Intersezioni della chiocciola con la retta GHL.

3.° Tangenti comuni al circolo S (SV) e alla parabola di foco B, ecc.

4.° Tangenti dal punto R alla polare reciproca della chiocciola.

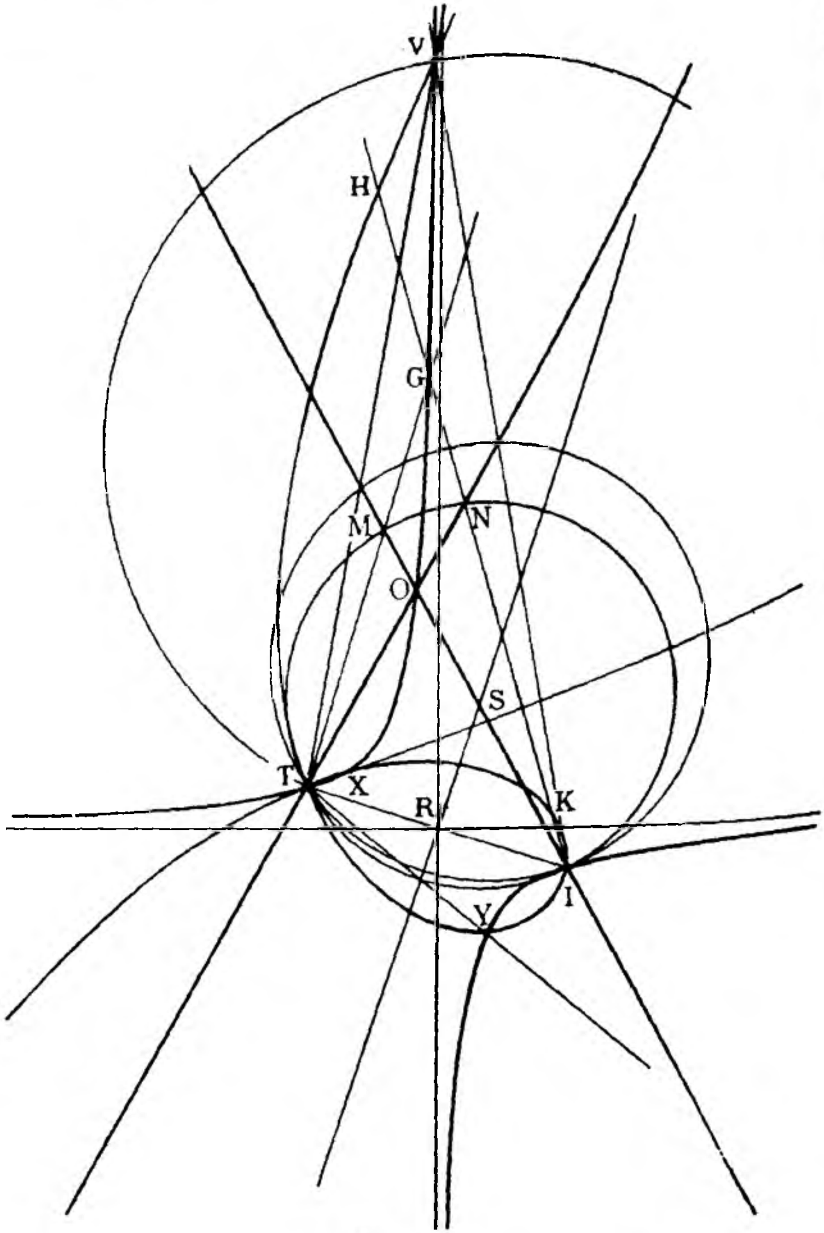


Fig. 415.

— Sia MNO l'angolo dato (fig. 415). Tracciamo un circolo S qualunque, che segherà MO in I ed NO in T; conduciamo TM ed IN che si segheranno in G. Abbiamo:

$$M\hat{O}N = M\hat{G}N + 2\, M\hat{T}N$$

Se, descrivendo la circonferenza N (NT), G coincidesse con un punto di essa, evidentemente si avrebbe:

$$M\hat{O}N = 3\, M\hat{T}N$$

Ora, se per i circoli variabili S aventi la corda comune TI, costruiamo il punto G, troviamo che il suo luogo è un'iperbola equilatera di centro R, punto di mezzo della corda TI, e i cui assintoti sono paralleli alle bisettrici dell'angolo dato e del suo supplementare Inoltre, se sulla segante variabile ING portiamo, nei due sensi, in OH ed OK, il segmento OT, avremo una strofoide come luogo dei punti H, K. L'intersezione delle due curve risolve il problema, non certamente nel più semplice modo.

Le due curve s'intersecano in quattro punti V, X, Y, I dei quali soli i tre primi corrispondono a soluzioni del problema:

$$V\hat{T}N = \frac{1}{3}\, M\hat{O}N$$

$$N\hat{T}X = \frac{1}{3}\, N\hat{O}I = \frac{1}{3}\,(180^\circ - M\hat{O}N)$$

$$N\hat{T}Y = \frac{1}{3}\,(360^\circ - M\hat{O}N)$$

— Portiamo tre volte (fig. 416) sulla circonferenza O, una corda AB, da A in B, C, D e portiamo ancora lo stesso segmento da O in M sul raggio OD.

Il luogo dei punti M che si possono così ottenere facendo variare AB è una trisettrice la cui equazione polare è (polo O; $\rho = OM$; $OA = r$):

$$\rho = 2\, r \operatorname{sen} \frac{\omega}{6}$$

I valori di ρ passano dallo zero a $2\,r$ fra $\omega = 0$ ed $\omega = 3\,\pi$ per ritornare a zero, per $\omega = 6\,\pi$, ecc.

Per un dato angolo $AOE = \alpha$ si hanno le seguenti corde corrispondenti agli archi indicati:

$OM \cdots \frac{1}{3}\alpha$	$OG \cdots \frac{1}{3}(\pi + \alpha)$
$OE \cdots \frac{1}{3}(2\pi + \alpha)$	$OF \cdots \frac{1}{3}(\pi - \alpha)$
$OP \cdots \frac{1}{3}(2\pi - \alpha)$	$OH \cdots \frac{1}{3}(3\pi - \alpha)$

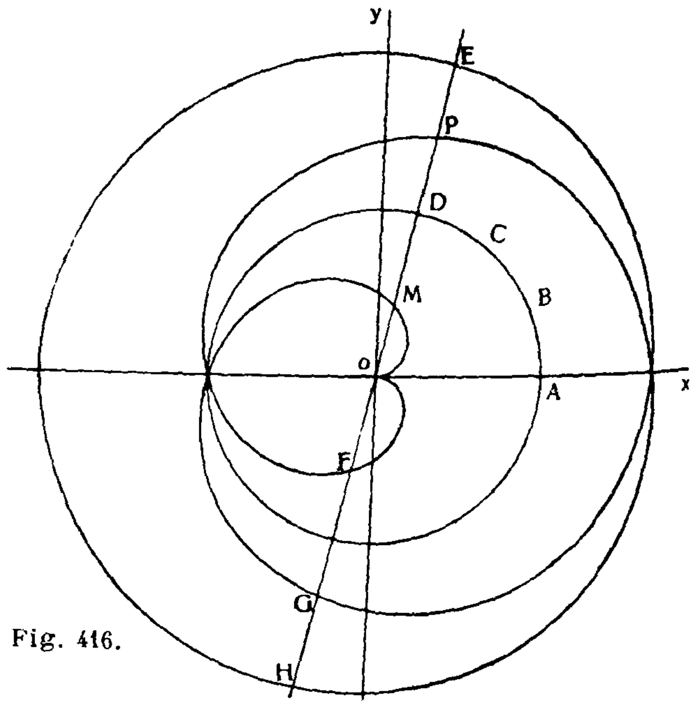


Fig. 416.

Soluzioni meccaniche.

Tralasciando di occuparci del *concoidografo* di Nicomede, che serviva pure per la soluzione del problema della duplicazione del cubo, ma non era punto pratico, daremo un cenno su alcuni strumenti più semplici ideati per risolvere meccanicamente il problema della trisezione dell'angolo (1).

(1) Le articolazioni indicate in *nero* nelle figure sono quelle che rimangono fisse nel movimento del sistema articolato.

I. — Trisettori di Rouse-Ball. — Sia MOB l'angolo dato (fig. 417). Su carta trasparente tracciamo una retta e portiamo su di essa un segmento $\overline{PQ} = 2\,\overline{OB}$ essendo OB qualunque. Per B conduciamo la perpendicolare e la parallela ad OM. Si

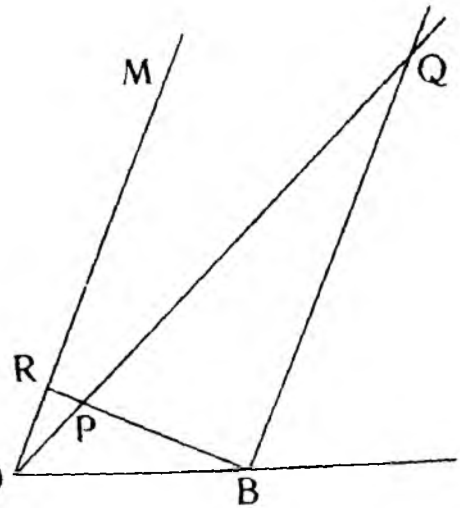


Fig. 417.

tratterà allora di adattare il trasparente in modo che gli estremi P e Q del segmento PQ coincidano rispettivamente con la BR e con la BQ, e che la retta stessa PQ passi per O.

Si avrà in tal caso $M\widehat{O}Q = \frac{1}{3}\, M\widehat{O}B$.

II. — Si traccia su carta da decalco un T. Sia MON l'angolo da trisecare; si traccia una parallela AB ad uno dei suoi lati ON, distante da esso della lunghezza MP braccio del T.

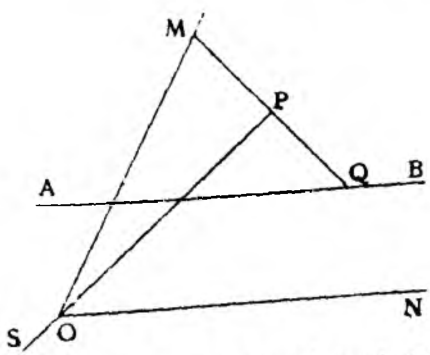


Fig. 418.

Si fa poi scorrere questo fino a che i suoi estremi M, Q poggino sull'altro lato OM dell'angolo e sulla parallela AB, e la PS passi per il vertice O dell'angolo.

III. — Si può usare la disposizione della fig. 419, facendo scorrere la carta di decalco, sulla quale si sarà tracciata una squadra coi segmenti $MP = PQ$, conservandone un lato MR

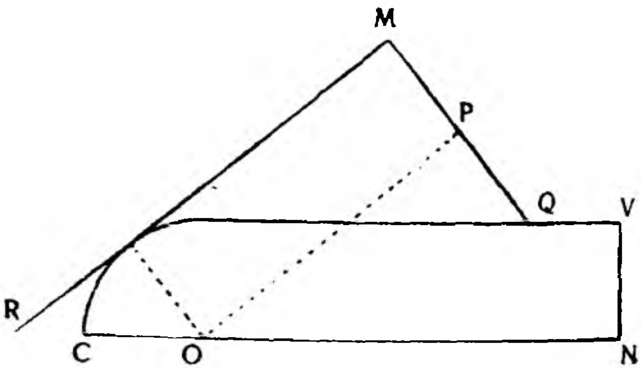


Fig. 419.

tangente all'arco di circolo di raggio $OC = MP$, fino a che Q poggi sulla parallela a CN distante da CN di $VN = MP$.

Risulterà:

$$M\hat{O}P = \frac{1}{3} M\hat{O}N$$

IV. — La disposizione della figura precedente si può modificare in questo modo (fig. 420): Tracciata la squadra sul decalco, sul foglio, si traccia un semicerchio OQN di raggio OC

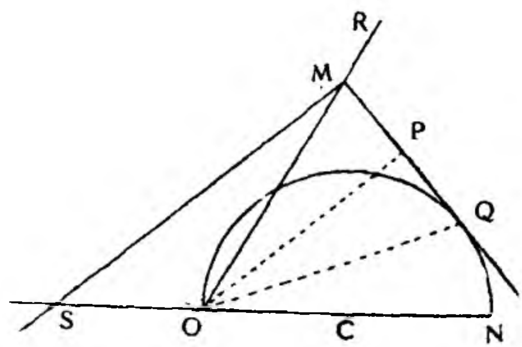


Fig. 420.

e si porta $OS = OC$. Si fa poi scorrere la squadra in modo che un suo lato passi per S e l'altro sia tangente al semicerchio, mentre il vertice M si fa coincidere col lato RO dell'angolo dato RON. La figura mostra chiaramente, mediante le punteggiate, come $S\hat{M}O$ risulti uguale ad un terzo di $M\hat{O}N$.

V. — Si può modificare ancora la disposizione precedente costruendo due semicerchi di ugual raggio e tangenti, come vedesi nella fig. 421; si raccordano con la tangente comune in modo da avere la figura *DSNO*. Facendo allora scorrere una

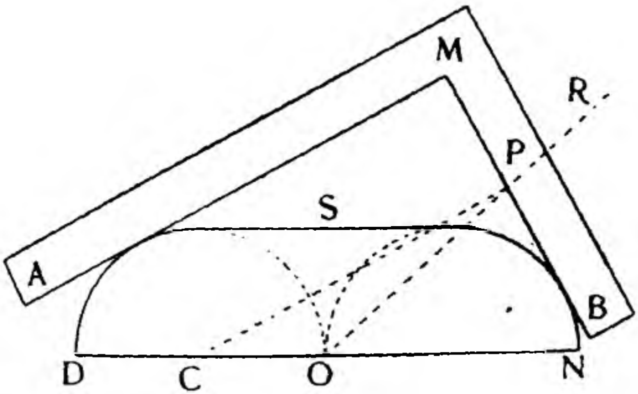


Fig. 421.

squadra *AMB*, in modo che i suoi lati si mantengano tangenti alle due semi-circonferenze, fino a fare coincidere l'estremo *P* di un segmento $MP = OC$, segnato su uno di tali lati, col lato *OR* dell'angolo dato *RON*, si avrà $C\widehat{P}O = \frac{1}{3} R\widehat{O}N$.

VI. — **Trisettore di Ceva** (1696). È costituito da una losanga articolata *OBAC* coi lati *OB*, *OC* prolungati e scanalati; in

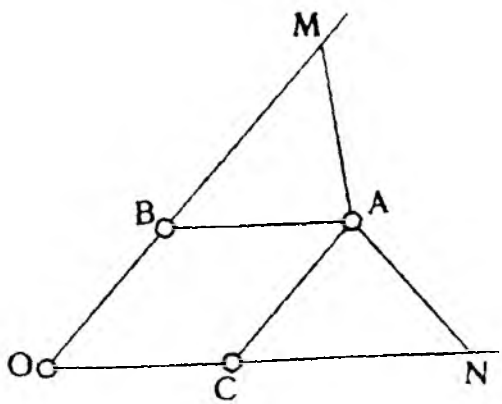


Fig. 422.

queste scanalature scorrono dei corsoi (galletti) uniti ad altre due sbarre *AM*, *AN* articolate in *A*. L'angolo *MON* è uguale al terzo dell'angolo *MAN* quando si abbia $AM = AN = AC$.

VII. — Trisettore di Laisant. — Il sistema articolato rappresentato nella fig. 423 è *composto* di due losanghe *OAEF*, *OBCD* i cui vertici *E*, *C* sono *scorrevoli* nelle guide costituite dai prolungamenti dei lati *OD*, *OF*, mentre i vertici *A*, *D*, *F*, *B*

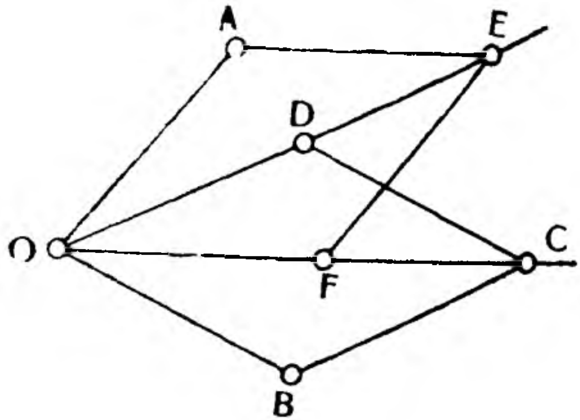


Fig. 423.

sono *articolati*. È chiaro che uno spostamento del lato *OE*, per esempio, rispetto ad *OC* tenuto fisso darà luogo ad una deformazione delle losanghe, che rimarranno però sempre tali: epperò saranno sempre uguali tra loro i tre angoli aventi il vertice in *O*.

VIII. — Un altro sistema articolato, simile a quelli di Ceva e di Laisant è dovuto al Ball ed è rappresentato nella fig. 424. Consta di due losanghe *ACBO*, *OBMD* col lato comune *OB*,

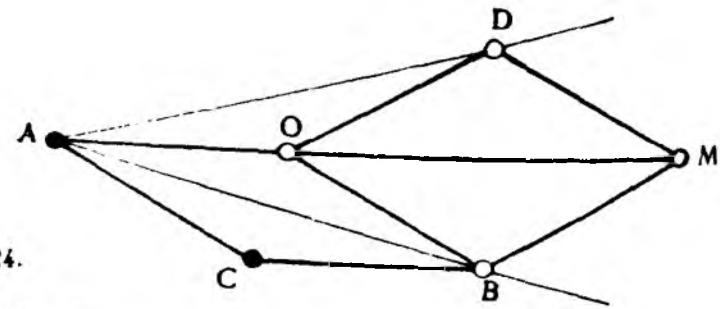


Fig. 424.

articolate ai vertici; di questi, *O* ed *M* sono scorrevoli nelle scanalature praticate nella *AM*. Basterà far corrispondere la articolazione *A* col vertice dell'angolo dato *DAC* e far coincidere i vertici *C* e *D* rispettivamente sui lati dell'agolo stesso, per avere:

$$D\widehat{A}O = O\widehat{A}B = B\widehat{A}C = \frac{1}{3}\, D\widehat{A}C$$

IX. — **Trisettori di Sylvester.** — In questo strumento sono soppresse le scanalature, ma esso riesce troppo complicato perchè costituito da ben 14 sbarre; esso richiede inoltre una articolazione settupla nel vertice O dell'angolo, poco pratica.

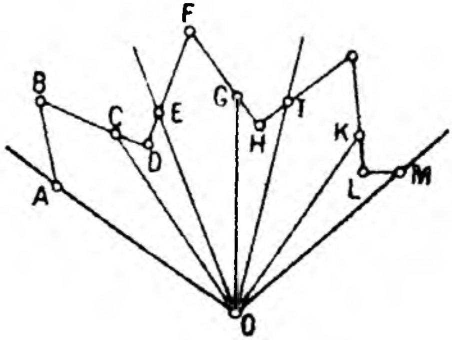


Fig. 425.

X. — Il Ball propone la modificazione indicata nella fig. 426, che è basata sullo stesso principio e richiederebbe due sbarre di meno ed un'articolazione quintupla solamente nel vertice O.

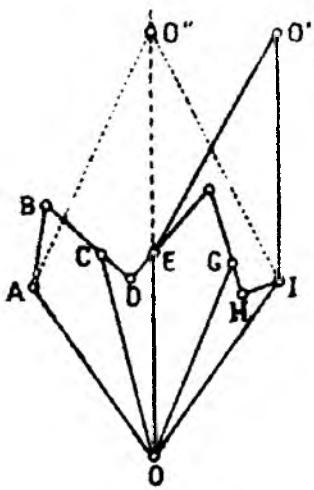


Fig. 426.

Esso darebbe l'angolo $O'\,OE = \frac{1}{3}\,O'\,OA$. Giova osservare che in questa disposizione, quando venga fissata la sbarra OE, il punto O'' deve muoversi nella direzione stessa di OE; si ha così una *guida* di dodici sbarre la cui teoria è assai facile.

XI. — Un trisettore più semplice venne studiato dal Sylvester, rappresentato nella fig. 427. In esso si ha $\overline{EO}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{BC}^2$ dal che risulta $EB = BO$ e quindi $B\widehat{E}O = \frac{1}{3} B\widehat{E}F$.

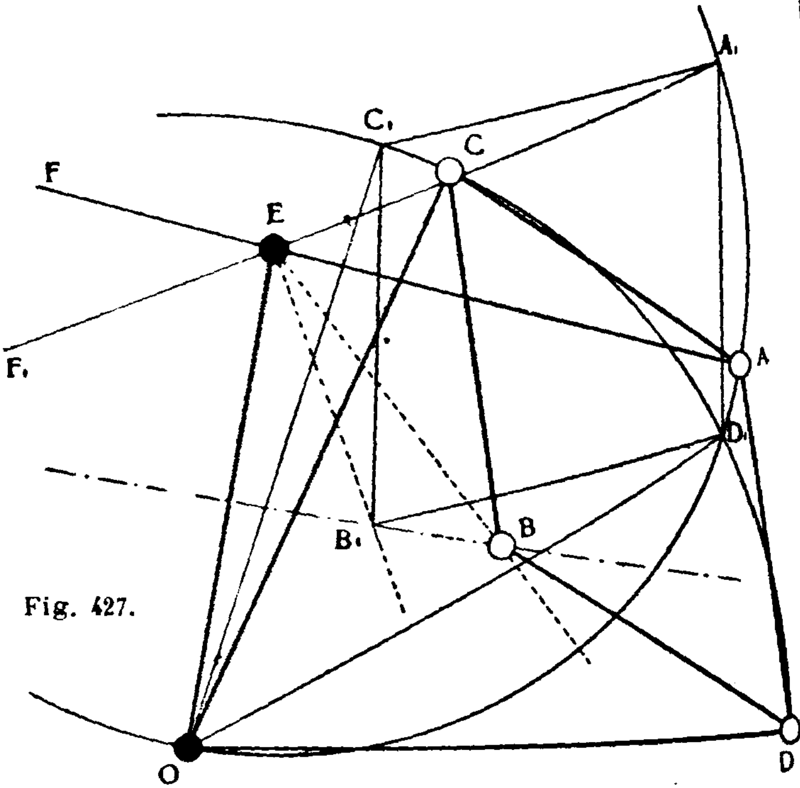


Fig. 427.

Il punto B descrive la perpendicolare sul punto medio di OE_1 base fissa. In figura A_1 C_1 B_1 D_1 rappresenta la posizione del parallelogramma $ABCD$ relativa all'angolo B_1 EF_1.

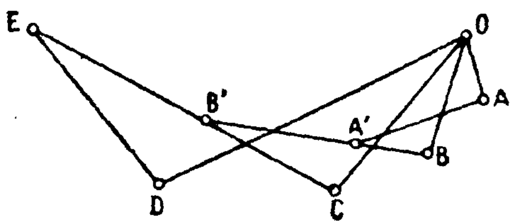


Fig. 428.

XII. — **Trisettori di Kempe.** — Il triplo-parallelogramma della fig. 428, ideato da Kempe, ha il difetto di richiedere nel vertice O dell'angolo dato un'articolazione quadrupla.

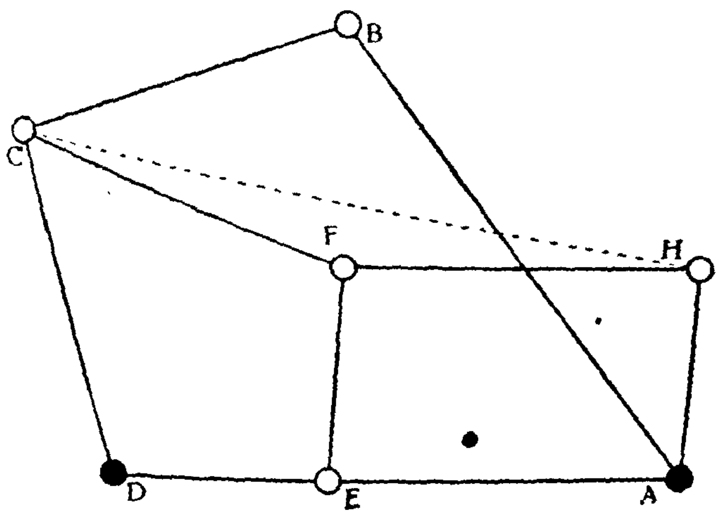
XIII. — Se nella guida di Kempe si fa:

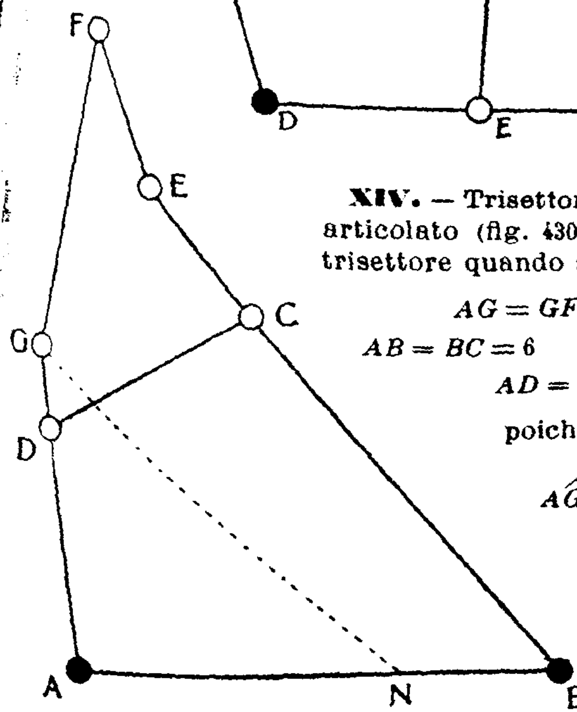
$$FC = FH = EA = CD = BC = 2$$

$AD = AB = \sqrt{5} + 1$ $\qquad$ $DE = EF = AH = \sqrt{5} - 1$

si ha la fig. 429 nella quale $H\widehat{C}F = \frac{1}{3}\, B\widehat{C}H$.

Fig. 429.





XIV. — Trisettore di Hart. Il sistema articolato (fig. 430) può servire come trisettore quando si faccia:

$$AG = GF = AN = 4$$

$$AB = BC = 6 \qquad CE = EF = 2$$

$$AD = CD = 3$$

poichè in tal caso si ha:

$$A\widehat{G}N = \frac{1}{3}\, F\widehat{G}N$$

Fig. 430.

XV. — Nel sistema della fig. 431 nel quale:

$$AS = RS = CS = 5 \qquad AB = BM = BC = 4$$

$$MO = OG = 3 \qquad RG = 6 \qquad \text{risulta} \qquad C\widehat{M}O = \frac{1}{3}\, C\widehat{O}G$$

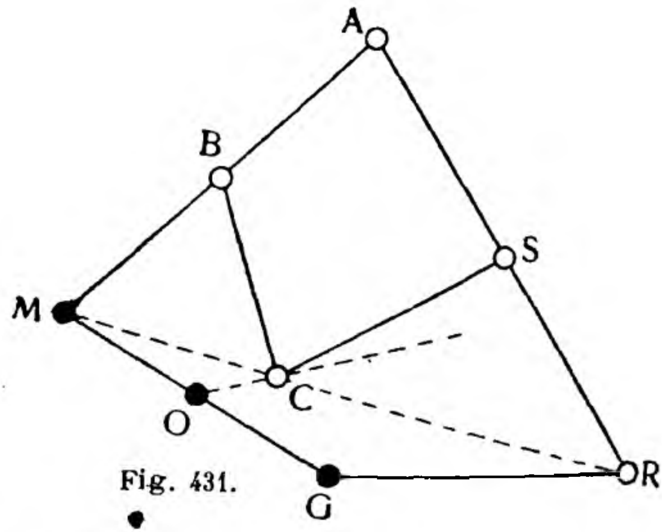


Fig. 431.

XVI. — **Trisettori di Tissandier.** — Immaginiamo condotta la segante ABC (fig. 432, *a sinistra*) in modo che la sua parte

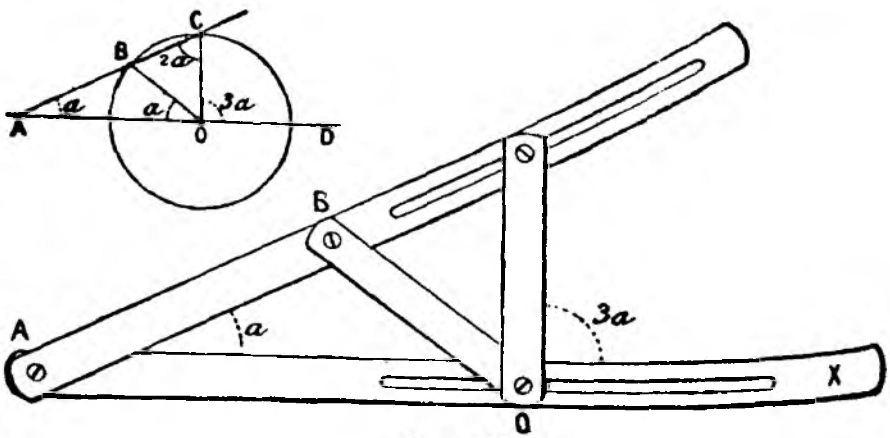


Fig. 432.

esterna AB sia uguale al raggio BO. Nel triangolo isoscele ABO si avrà $B\widehat{A}O = B\widehat{O}A = a$ e l'angolo esterno $C\widehat{B}O = 2\,a$.

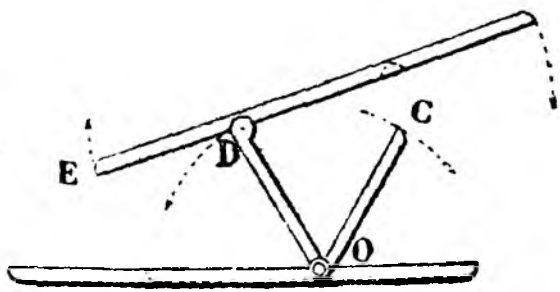
Nel triangolo isoscele BCO si avrà pure $B\widehat{C}O = 2\alpha$ e infine:

$$C\widehat{O}D + B\widehat{O}A = 4\,a \qquad \text{ossia} \qquad C\widehat{O}D = 3\,a$$

È facile realizzare un trisettore basato su tale proprietà, che è rappresentato, inferiormente, nella fig. 432. Tre regoli uguali AB, BO, OC sono articolati in modo che O possa scorrere (il perno essendo foggiato a scorsoio) in una sbarra scanalata AX articolata in A con AB, e C possa scorrere nella scanalatura praticata nel prolungamento di AB. Il tutto, come si vede può ripiegarsi in modo da occupare pochissimo spazio.

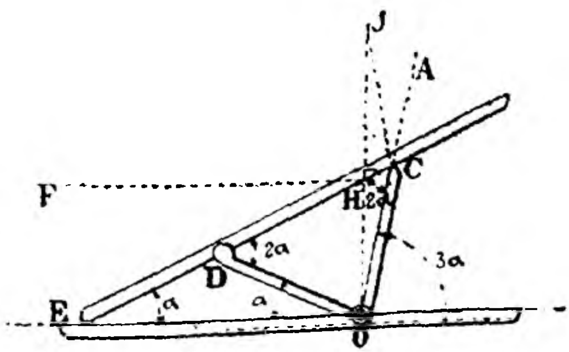
XVII. — In modo analogo si può usare il trisettore di Otto Fröhlich (fig. 433), costituito da due sbarre collegate da una

Fig. 433.



terza DO articolata in D ed O e da una quarta sbarra OC lunga quanto OD e articolata essa pure in O. Disponendo l'apparecchio come è indicato nella fig. 434 è facile vedere come risulti:

Fig. 434.



$$B\widehat{E}C = \frac{1}{3}\, B\widehat{O}C$$

XVIII. — Questo trisettore, di lamierino, ebanite, cartoncino bristol, ecc., non ha bisogno d'altra spiegazione quando si sappia che deve essere costrutto in modo da avere $AB = BC = CD$, che il semicerchio BID ha per centro C e che BH è perpendicolare su AD. Per farne uso si fa corrispondere il punto A su un lato dell'angolo da dividere POQ, spostandolo in modo che il lato BH passi pel vertice O dell'angolo e che l'altro

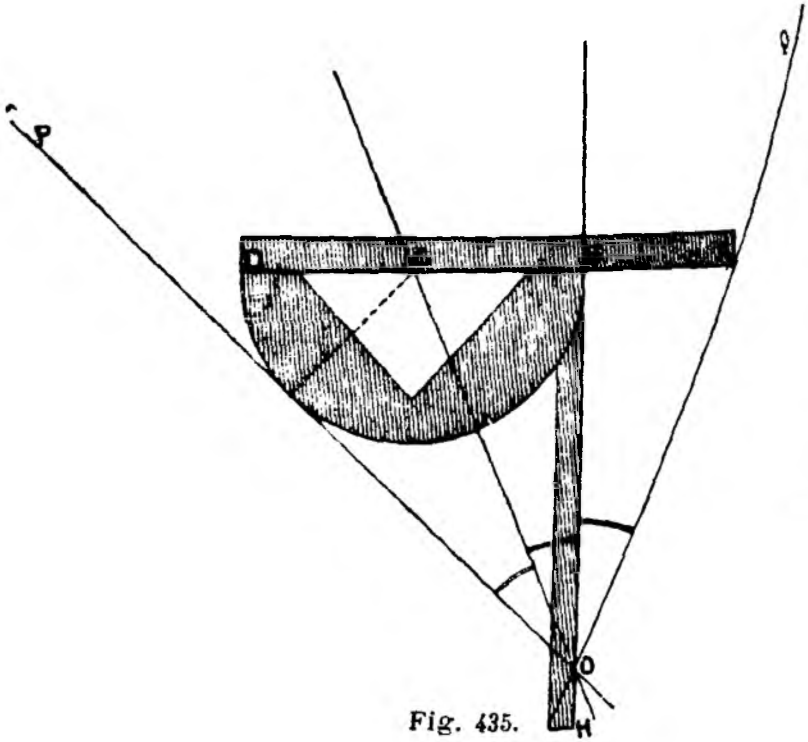


Fig. 435.

lato di questo riesca tangente al semicerchio, al che si perviene per tentativi, naturalmente.

XIX. — **Trisettori dell'Autore.** — Abbiamo veduto a pag. 351, fig. 306, un modo di generazione della trisettrice di Maclaurin che si presta assai bene alla costruzione d'un trisettore semplice, che può nello stesso tempo servire per il tracciamento della trisettrice stessa.

Abbiasi una squadra a *T* (fig. 436) nella quale $OA = AC$. Fissata una spilla a modo di pernio in O, e fissato un sottile elastico, per un estremo in M e per l'altro in C, basterà far rotare la squadra attorno ad O fino a che l'intersezione del suo lato AV con la MC cada sul lato BO dell'angolo dato KOB; si ha allora:

$$S\widehat{O}A = \frac{1}{3} K\widehat{O}B \qquad \text{come pure} \qquad S\widehat{M}O = \frac{1}{2} K\widehat{O}B$$

Il luogo di S è la trisettrice di Mac Laurin.

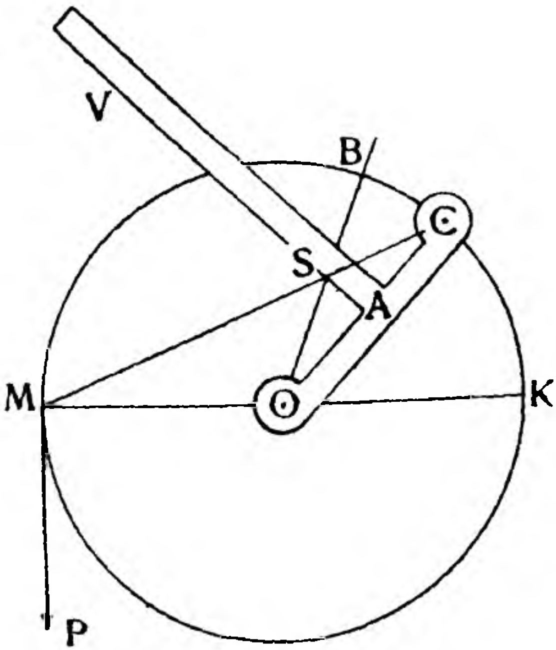


Fig. 436.

All'elastico si potrebbe sostituire un filo fissato in C, che scorresse su di una spilla fissata in M, mantenuto teso con un peso.

Sia in un modo che nell'altro, non si potrebbe *tracciare* con *moto continuo* un arco di trisettrice, ma solamente segnare sul foglio dei punti di essa. Sostituendo invece al filo o all'ela-

stico (fig. 437) una sbarra rigida articolata in C, che si farebbe poggiare costantemente sulla spilla infissa in M, si potrebbe poggiando la punta della matita nel vertice S dell'angolo MSA tracciare un arco di trisettrice in modo continuo.

Questo compasso, per la sua semplicità, è facilmente eseguibile in cartoncino o lamierina rigida (molla d'acciaio, pakfong crudo, ecc.).

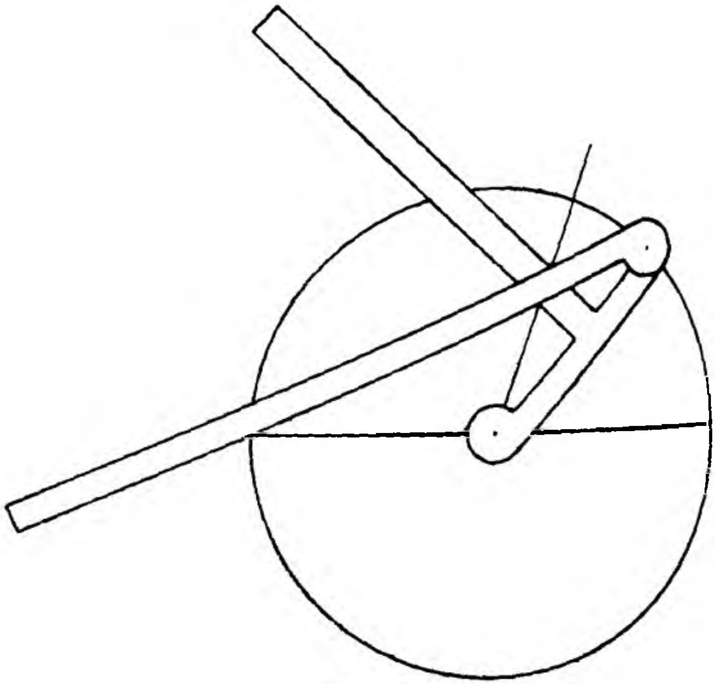


Fig. 437.

XX. — Sia XAY l'angolo da trisecare (fig. 437). Costruiamo il segmento $ACDB$ capace di detto angolo. Se i due punti C, D di quest'arco risolvono la questione si avrà:

$$Y\widehat{A}C = C\widehat{A}D = D\widehat{A}X$$

La CD è parallela ad AX e:

$$AC = CD = DB$$

La retta OE è perpendicolare sul mezzo di CD.

$$AC = BD = 2 \times CE = 2 \times DE \tag{a}$$

Consideriamo tutti gli angoli di vertice A aventi un lato AX comune. Se facciamo passare per B tutti i segmenti capaci di questi diversi angoli, la retta OE resterà invariabile e siccome si hanno le uguaglianze (α), i luoghi dei punti C e D sono due

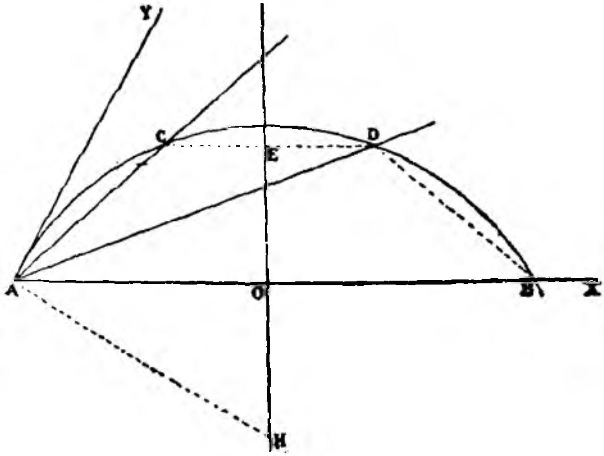


Fig. 438.

archi di iperbola avente direttrice comune OE e i fochi in A e B.

Sicchè, in un caso particolare qualunque i punti C e D saranno all'intersezione di questi due archi di iperbola con un arco di circolo di raggio HA e di centro H, essendo H il punto d'incontro di OF, direttrice comune, con la perpendicolare condotta ad AY da A.

Si può dunque usare, per la soluzione del problema, uno strumento (una specie di squadretta-garbo) costituito da una *squadra* e da una lastrina profilata secondo i due rami iperbolici di cui sopra, nel modo indicato nella fig. 439.

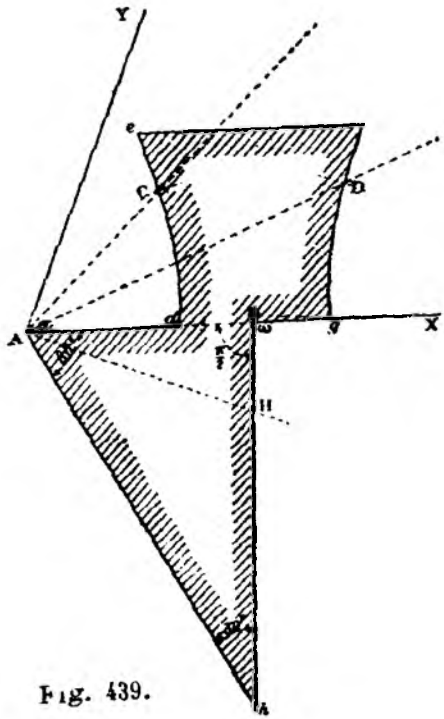


Fig. 439.

Non si avrà che da condurre in A la perpendicolare ad AY; collocare il trisettore come in figura e descrivere l'arco di circolo di centro H e di raggio HA sino a segare in C e D i due archi iperbolici.

LA QUADRATURA DEL CIRCOLO

Qual è 'l geomètra che tutto s'affige,
Per misurar lo cerchio, e non ritrova,
Pensando, quel principio ond'egli indige;

Tale, era io, a quella vista nuova;
Veder voleva come si convenne
L'immago al cerchio, e come vi s'indova;

Ma non eran da ciò le proprie penne.

DANTE - *Paradiso*, ultimo canto.

Il Problema.

Trovare il lato del quadrato equivalente a un dato circolo.

Ecco il famoso problema che da lunghi secoli affatica tante menti, e che per tanti altri ancora continuerà ad affaticarne e ad ottenebrarne, nonostante qualsiasi dimostrazione dell'impossibilità della sua soluzione.

Fino al 1882 tale *impossibilità* non era *dimostrata*; Lambert nel 1761 aveva dimostrato che il rapporto della circonferenza al diametro è incommensurabile, e nel 1803 Legendre dimostrò che anche il quadrato di π è incommensurabile. Ma solo nel 1882 Lindemann riuscì a dimostrare che π è un numero trascendentale, vale a dire che non può essere la radice d'una equazione di grado qualunque a coefficienti intieri o formati di irrazionali algebrici (vedi pag. 492).

Dall'82 in poi non si sarebbe dunque dovuto più assistere ad alcuna fioritura di *quadrature......* e invece!

E la previsione che la serie dei *quadratori* non sia per finire neanche dopo la data storica del 1882, è purtroppo facile a stabilire. Molti *pseudomatematici*, tra la numerosa falange di coloro che per essere riusciti a comprendere la dimostrazione del *ponte dell'asino* — denominazione volgare del teorema di Pitagora — si credono dei saccentoni, molti ancora saranno che, pur non comprendendo talvolta neppur la natura del problema, procureranno lavoro alle Tipografie per lanciare nel campo scientifico la loro soluzione da aggiunuersi alle tante già messe fuori dai loro colleghi ora *morti* o ancora viventi. Essi, in generale, manifestano o una grande commiserazione o un supremo disprezzo per i loro *predecessori* che, poveretti, nella loro ignoranza crassa, accecati da preconcetti assolutamente erronei, non sono riusciti a trovarla. È vero che ad onta di queste geniali trovate, la soluzione del problema resta sempre da trovarsi, ma che importa questo? Chi potrà convincerli che *non fossero da ciò le loro penne?*

Per gli autori di quelli aurei opuscoletti, dove in poche pagine sono accumulati i più esilaranti strafalcioni matematici, la soluzione è innegabilmente trovata; peggio per chi non arriva a comprenderne la dimostrazione!

A me è occorso, p. es., di trovare in un volumetto del genere questa preziosa osservazione: «...... dal momento che un quadrato me lo dite *circoscritto* ad un circolo, come mai potete «poi ammettere l'*uguaglianza* del suo lato col diametro del «circolo? *Evidentemente* avete dimenticato di tener calcolo «della *grossezza* delle rette lati del quadrato!».

Io spero che nessuno dei miei Lettori appartenga a tale categoria di *matematici*; lo spero, perchè sarei certo di farmene con queste righe un nemico o almeno di vedermi gratificato di tutto il suo disprezzo, senza la più lontana speranza di convincerlo del suo errore. Un *quadratore* ebbe infatti a dire: «Provatemi soltanto che il problema è impossibile ed io me ne occuperò subito»!

Ciò premesso non mi darò certo la pena di seguire i *quadratori* nelle loro elucubrazioni, nè perderò tempo nella facile bisogna di dimostrarne la fallacia. Vedremo invece, in breve, quali indagini serie siano state fatte in proposito.

Dell'impossibilità di risolvere il problema.

Dalla risoluzione, in senso negativo, del problema della quadratura del circolo data da Lindemann col dimostrare la trascendenza del numero π, risulta che, non solamente la costruzione di π è impossibile con riga e compasso, ma che neppure esiste alcuna curva superiore definita da un'equazione algebrica a coefficienti interi, un punto della quale abbia l'ordinata uguale a π e l'ascissa razionale. E neppure può aversi una curva algebrica tale che π sia l'ordinata d'un punto che corrisponda a valore algebrico dell'ascissa.

« Se (1) tutte le curve algebriche fossero tracciate nel piano, « quelli dei loro punti d'intersezione che corrispondono a va« lori algebrici dell'ascissa, sarebbero condensati dovunque « nel piano; nessuno tuttavia dei medesimi avrebbe ordinata « uguale a π. Perchè si possa costruire mediante curve alge« briche un qualsiasi numero trascendente, bisogna che sia « dato innanzi (aggiunto, come s'usa dire in analisi, al campo « di razionalità) un conveniente numero trascendente (preci« samente il numero aggiunto deve essere legato algebrica« mente al numero da costituirsi) ».

Una vera costruzione di π può dunque solo eseguirsi mediante una curva truscendente, cosicchè (trattandosi di vera costruzione) per poterla effettuare dobbiamo aggiungere a compasso e riga un'istrumento, *trascendente*, che dia tal curva in un tratto continuo. Un siffatto istrumento è l'*Integratore* (planimetro), che fu recentemente inventato e disegnato dall'ingegnere russo Abdank-Abakanowicz e fu costruito dal Coradi di Zurigo.

Di una data curva $y = f(x)$, *curva differenziale*, si può costruire con questo istrumento la corrispondente *curva integrale* $Y = F(x)$, dove:

$$F(x) = \int f(x)\, dx$$

A questo scopo, si guida l'Integratore in modo che una sua punta, la *punta descrivente* percorra la curva differenziale; una seconda punta, la *punta disegnante* (la matita od il tira-

(1) F. GIUDICE. Traduzione delle « *Conferenze sopra alcune questioni di Geometria elementare di F. Klein* » pag. 69.

linee), traccia allora la curva integrale. Per una descrizione particolareggiata dell'ingegnoso istrumento rimandiamo al lavoro originale (pubblicato in tedesco da Teubner nel 1889).

Noi qui possiamo darne solamente il principio. Per ogni punto della curva differenziale $y = f(x)$ costruiscasi il triangolo ausiliario, che ha per vertici i punti $(x\,,\,y)$, $(x\,,\,0)$, $[(x-1)\,,\,0]$. L'ipotenusa di questo triangolo rettangolo forma con l'asse delle ascisse un angolo di tangente trigonometrica uguale ad y. Perciò, *questa ipotenusa è parallela alla tangente alla curva integrale nel punto corrispondente* $(X\,,\,Y)$. Il compito

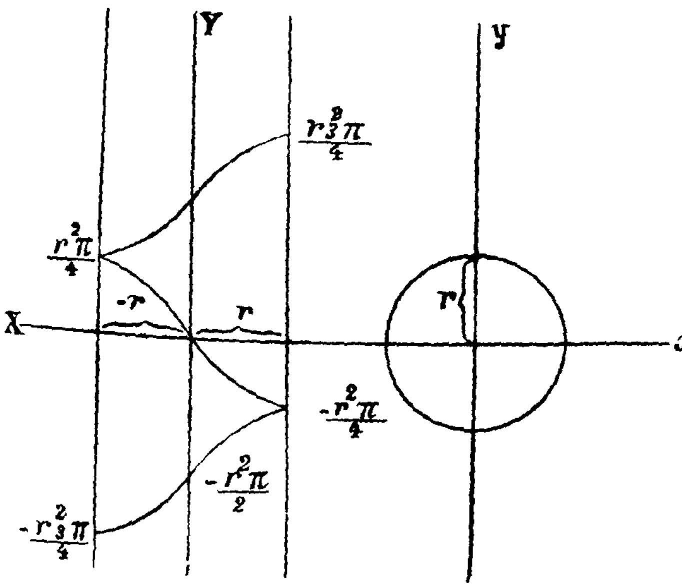


Fig. 440.

dell'istrumento consiste quindi nel fare *che la punta disegnante cammini sempre parallelamente alla direzione variabile della nominata ipotenusa, mentre la punta descrivente percorre la curva differenziale*. S'è ottenuto ciò in questo modo semplice: la punta disegnante è collegata ad una rotella a margine tagliente, il piano della quale di dispone sempre parallelamente all'ipotenusa suddetta.

Questa rotella è premuta sempre fortemente contro il foglio del disegno per mezzo di un peso, e percio al suo punto di contatto non è possibile di muoversi se non nel piano della rotella.

L'Integratore è utilizzato molte volte in pratica per il calcolo di integrali definiti: per noi è di particolare interesse il suo impiego per la costruzione di π. Se la curva differenziale è un cerchio:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

la curva integrale è:

$$Y = \int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{r^2}{2} \text{arc sen } \frac{x}{r} + \frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2}$$

La curva consta d'una serie di rami congruenti. I punti d'incontro con la retta mediana sono 0, $\pm \frac{r^2 \pi}{2}$, ..., e con le rette laterali sono $r^2 \frac{\pi}{4}$, $r^2 \frac{3\pi}{4}$, ... Poniamo $r = 1$, e le ordinate dei vertici, oppure dei punti d'intersezione con la linea mediana, ci daranno così π ed i suoi multipli.

Importa osservare, che questa curva viene disegnata dall'accennato istrumento non difficilmente ed imperfettamente, ma con molta facilità e precisione, specialmente se nel luogo della punta disegnante si ponga un tiralinee.

Abbiamo così una vera costruzione della quadratura del cerchio e precisamente nel senso in cui fu cercata dai geometri greci; perchè manifestamente la nostra *curva integrale* non è che una modificazione della quadratrice prima considerata.

— Come la duplicazione del tubo e la trisezione dell'angolo, così la quadratura del cerchio i Greci cercarono d'ottenerla per mezzo delle curve superiori (1).

Consideriamo, per esempio, la curva $y =$ arc sen x, che è la sinusoide disposta verticalmente. Dal punto di vista della Geometria π è una ordinata di questa curva, invece dal punto di vista della teoria delle funzioni essa è un valore particolare della nostra funzione trascendente. In seguito chiameremo macchine trascendenti quelle che servono a tracciar le curve trascendenti. Una macchina trascendente, che disegni la sinusoide, ci dà una effettiva costruzione di π.

Oggidì potremo denominare la $y =$ arc sen x, *curva integrale*, potendosi definire y come l'integrale d'una funzione algebrica:

$$y = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(1) *Klein-Giudice*. Opera citata, pag. 47.

Una curva dedotta dall'anzidetta proprietà veniva detta *Quadratrice* o τετραγωνίζουσα. Specialmente nota è la Quadratrice di Dinostrato (circa 350 anni av. Cr.), la quale però già prima era stata costruita da Ippia d'Ella (circa 420 anni av. Cr.) per la trisezione dell'angolo.

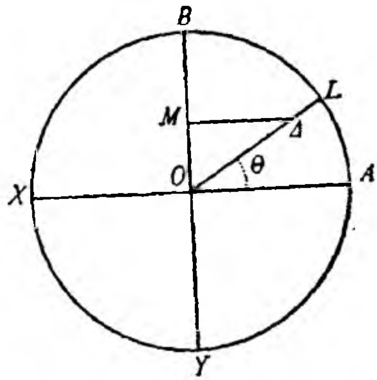


Fig. 441.

Geometricamente essa viene definita come segue: Sulla retta OB (fig. 441) e sull'arco AB si muovono due punti M ed L con velocità uniforme. Essi incominciano contemporaneamente il loro movimento in O ed A rispettivamente e giungono in B nello stesso tempo. Si tiri poi OL e per M la parallela ad OA, la quale tagli OL in P; sarà P un punto della quadratrice. Da questa definizione segue, che y è proporzionale a θ. Siccome per $y = 1$ è $\theta = \frac{\pi}{2}$, così abbiamo $\theta = \frac{\pi}{2}\,y$ ed essendo:

$$\theta = \operatorname{arc\,tag} \frac{y}{x}$$

si ottiene come equazione della curva:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}\,y$$

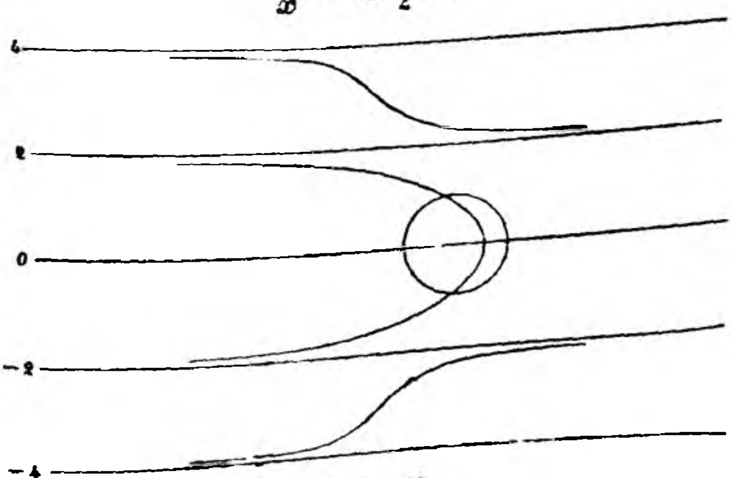


Fig. 442.

Il punto, dove la curva taglia l'asse delle x, è dato da:

$$x = \frac{y}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} y}$$

dove si deve fare $y = 0$. Siccome per piccoli valori la tg è uguale al suo argomento, così è:

$$x = \frac{2}{\pi}$$

Perciò il raggio del cerchio è medio proporzionale tra il quadrante del cerchio e l'ascissa del punto d'intersezione della

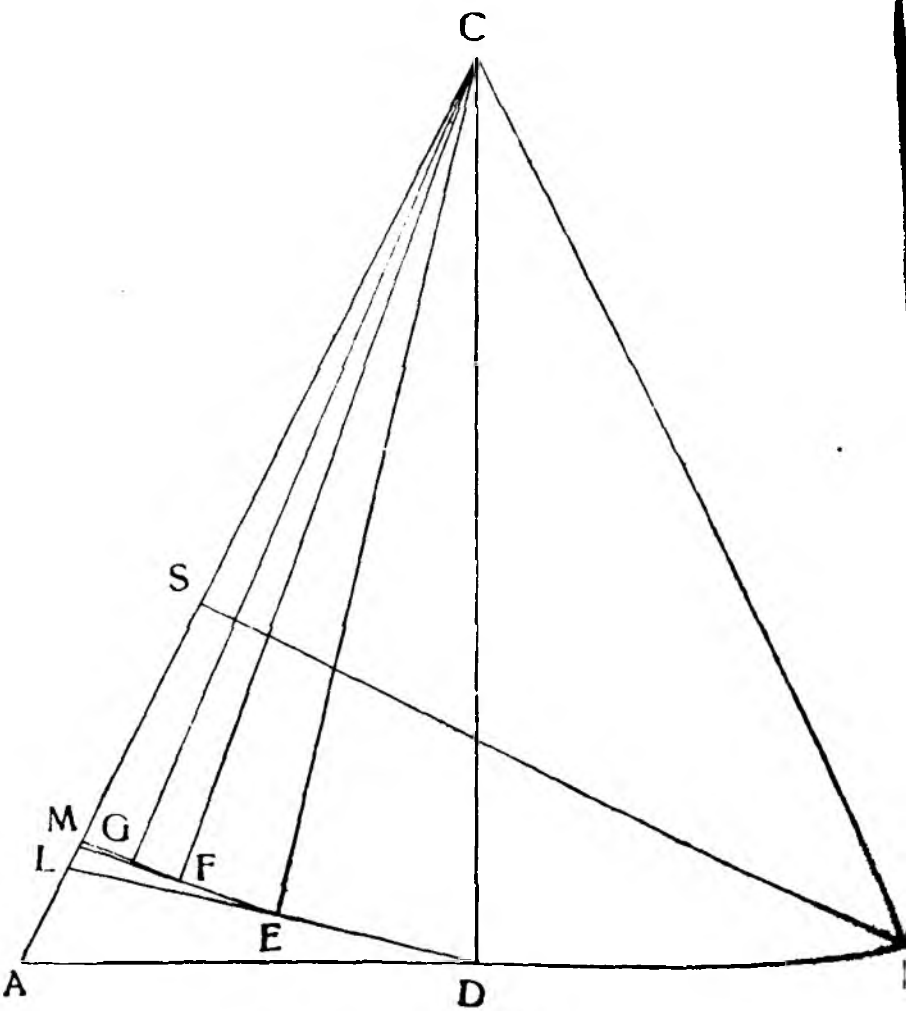


Fig. 443.

quadratrice con l'asse delle x. La quadratrice può dunque servire alla rettificazione del cerchio, eppero sussidiariamente alla quadratura di esso. In fondo però questa non è che una formulazione geometrica del problema della rettificazione, fin tanto che non abbiasi un istrumento, col quale si possa descrivere la quadratrice con tratto continuo.

Tenendo conto della forma della curva si arriva alla fig. 442 dove i rami successivi nascono facendo variare θ oltre π e $-\pi$ rispettivamente. È manifesto che la quadratrice di Dinostrato non è così comoda come la curva $y = \text{arc sen } x$; sembra tuttavia, che quest'ultima non sia stata utilizzata nell'antichità per il detto scopo.

— La costruzione seguente di Giovanni Bernouilli permette pure di ottenere la quadratrice (fig. 443).

Sia ABC un triangolo isoscele. Abbassiamo la perpendicolare BS sopra AC e la perpendicolare CD sopra AF Facciamo $CL = CD$ e proiettiamo C in E su DL. Facciamo $CM = CE$ e proiettiamo C in F sulla EM, e così di seguito......... I punti B, D, E, F, G......... sono punti di una quadratrice che sega AC in un punto R tale che l'arco di raggio CR e avente l'angolo al centro ACB ha uno sviluppo uguale ad AB.

Le origini e il concetto matematico del simbolo π.

Il π simbolo geometrico. — Come simbolo del rapporto tra la circonferenza e il diametro del circolo, pare che l'uso della lettera greca π sia stato introdotto nel XVII$^{\text{mo}}$ secolo (1). Tale lettera è l'iniziale della parola περιφέρεια (periferia) o dell'altra περίμετρος (perimetro).

W. Jones nel 1706 usava tale lettera; pochi anni dopo Bernouilli usava la c; Eulero nel 1734 la p e nel 1736 la c; nel 1732 Cr. Goldback usava di nuovo la π che divenne infine d'uso generale dopo la pubblicazione dell'Analisi di Eulero.

Calcolo di π. — Due sono i metodi seguiti per il calcolo di π. Uno geometrico, dovuto ad Archimede, venne seguito per la ricerca di π considerato puramente come un rapporto geometrico. L'altro, moderno, venne adottato dai matematici

(1) Nelle opere « *The key of the Mathematics* ». London 1647, di *Oughtred*, e « *Isaaci Barrow - Matematicæ lectiones habitæ in scholis publicis Accademiæ Cantabrigensis* ». Londini, 1684.

che considerano π come simbolo di un numero che figura non solo in geometria, ma anche in altri rami dell'analisi matematica, cioè indipendentemente dal suo valore come rapporto della circonferenza al diametro.

Nel primo caso la determinazione del suo valore numerico non ha che un interesse relativo, bastando nella pratica del suo uso un numero di decimali assai limitato.

È invece interessante il riscontrare l'esistenza di tale numero in taluni problemi, specialmente di probabilità.

Esempio: *Qual'è la probabilità che* m *intieri, scelti a caso, siano primi tra loro?*

Essa è rappresentata dall'inversa di:

$$\frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \cdots\cdots$$

Per $m = 2 \quad 4 \cdots\cdots$ si trova:

$$\frac{6}{\pi^2}, \ \frac{90}{\pi^4} \text{ ecc.}$$

Supponiamo che 50 persone scrivano ciascuna 5 coppie di numeri a caso; tra queste se ne troverebbero 154 costituite da numeri primi tra loro, il che corrisponde a:

$$\frac{6}{\pi^2} = \frac{154}{250}$$

da cui si deduce $\pi = 3{,}1209$.

— Del resto, dato che il valore di π è unico, tanto se lo si consideri come un rapporto geometrico, che come un numero derivante da considerazioni matematiche d'altra natura, si può valersi di queste ultime per determinarlo, come nel seguente esempio.

Si taglia un pezzo d'ago, ben cilindrico, lungo circa 2 cm.; sopra un grande foglio di carta si tracciano una serie di rette, parallele ed equidistanti, in modo che la distanza delle rette successive sia doppia della lunghezza del frammento d'ago.

Si getta allora, a caso, l'ago sulla carta, un gran numero di volte, mettendo alcuni fogli di carta bibula sotto il foglio di carta, per evitare rimbalzi troppo forti. Si contano il numero totale delle prove, e il numero dei casi nei quali l'ago cade *attraverso ad uno dei tratti*. La probabilità che l'ago cada in modo da segare una delle parallele risulta espressa da:

$$\frac{2\,l}{\pi\,a}$$

Ripetendo l'esperienza, parecchie centinaia di volte si trova che il numero dei casi favorevoli sta a quello delle cadute appunto in tale rapporto, dal quale si può dedurre il valore di π. Ecco i risultati ottenuti da alcuni sperimentatori:

Sperimentatore	Numero dei tentativi	Valore di π ottenuto
A. Smith . . .	3204	3,1553
N. N.	600	3,137
Cap.no Fox. . .	1120	3,1419

— Aggiungeremo infine che Eulero trovò ed espresse con la formola:

$$e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$$

un misterioso legame fra π e il numero e (2,71828) base dei logaritmi neperiani.

Nella Bibbia. — In due passaggi relativi alle dimensioni d'un grande bacino di bronzo che ornava il tempio di Salomone a Gerusalemme si dà indirettamente il valore allora attribuito a π:

« Poi il re fece il mare di bronzo di 10 cubiti da una sponda all'altra. Esso era rotondo e misurava 5 cubiti di altezza. Una corda di 30 cubiti ne faceva il giro ». (I Re - lib. I Cap. VII-23) da cui risulta:

$$\pi = \frac{30}{10} = 3$$

(secondo libro delle cronache, Capo IV - 2).

Nel Talmud, raccolta di tradizioni rabbiniche posteriori alla Bibbia, si trova questa proposizione: « Ciò che ha tre palmi di giro è largo un palmo ».

Il π degli Egiziani. — Pare che gli Egiziani (1) usassero per la rettificazione del quarto della circonferenza il valore $\left(\frac{8}{9}\right)^2$, cui corrisponde $\pi = 3,1604 \dots$

(1) Dato da Ahmes — N. 50 del « *Papyrus Rind* ».

Il Sig. G. Vacca in una nota pubblicata nel *Bollettino di Bibliografia e Storia delle scienze matematiche* (Anno XI - Fascicolo III, 1909, pag. 1) ha credutó di poter ristabilire per quale via gli Egiziani siano pervenuti a tale risultato. Egli dice: « Mi sembra di aver trovato un modo che potrebbe non essere diverso da quello degli antichi Egiziani per convincersi dell'esattezza di questo risultato, od almeno potrebbe far intuire per quale via vi siano giunti.

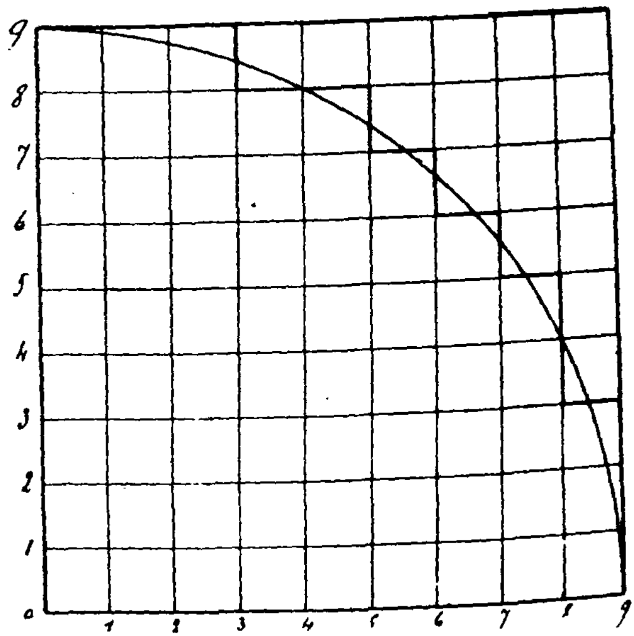


Fig. 444.

« 1°. — Questo metodo consiste nella considerazione della fig. 444 la quale consta di un quadrante di circolo, designato sopra un reticolato a maglie quadrate, con raggio uguale a nove volte il lato d'una maglia. Si vede dalla figura che questo arco di cerchio assieme ai due raggi che limitano il quadrante, comprende presso a poco 64 caselle e che le parti di alcune di queste 64 caselle che escono dal quadrante, compensano abbastanza bene le parti del quadrante che esse non comprendono.

« Quindi l'area del quadrante sta a quella del quadrato circoscritto come 64 a 81, ed il lato di un quadrato equivalente in area al quadrante è uguale al lato del quadrato circoscritto, diminuito di un nono.

«Gli Egiziani avevano famigliari i reticolati a maglie quadrate che essi adoperavano con vari modelli che si trovano, ad esempio nel Museo Egiziano di Torino, come i pittori fanno ancor oggi, per ingrandire od impicciolire disegni secondo una determinata scala. Essi conoscevano pure l'uso del compasso: e quindi verosimile che abbiano potuto fare il ragionamento che precede.

«2.° — Dalla considerazione di questa seconda figura, che non è altro che una successione indefinita di quadranti disegnanti sopra un reticolato a maglie quadrate ed aventi per lato rispettivamente 1, 2, 3 . . . . . volte quello di una maglia, si

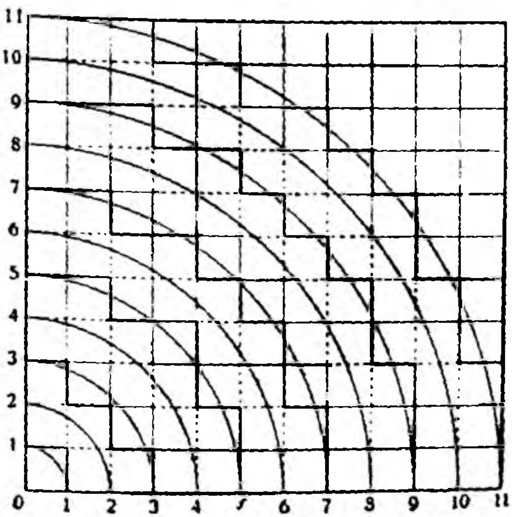


Fig. 445.

vede subito che per tutti gli altri quadranti il compenso tra le parti sporgenti e quelle rientranti del sistema di maglie che copre nel miglior modo possibile ciascun quadrante, si fa assai meno bene che non per il quadrante di lato 9, e che di più, nessun altro di questi sistemi di maglie, almeno per una serie abbastanza lunga di quadranti ha un numero di maglie uguale ad un quadrato perfetto, e che infine la radice del quadrato corrispondente al quadrante di lato 9 è 8, come si è visto. Ed ora la frazione $\frac{8}{9}$, o meglio $1 - \frac{1}{9}$, risponde al criterio di *semplicità* delle frazioni che avevano gli antichi Egiziani (secondo lo stesso papiro: Cfr. G. Loria, *Biblioteca Matematica*, 1892, pag. 97).

« La considerazione di questa figura che si potrebbe forse anche trovare come motivo decorativo in qualche monumento architettonico, può avere condotto gli Egiziani a ritenere che il valore trovato fosse il migliore tra gli altri dello stesso genere, e forse anche a credere nella sua esattezza.

« 3.° — È utile considerare i valori per π che si ricavano dalla considerazione dei quadranti della seconda figura. Essi sono:

$$\pi = 4 \qquad\qquad = 3$$

$$= \frac{24}{9} = 2,7 \qquad = \frac{52}{16} = 3,25 \qquad = \frac{80}{25} = 3,20$$

$$= \frac{112}{36} = 3,111 \qquad = \frac{148}{49} = 3,02 \qquad = \frac{208}{64} = 3,25$$

$$= \frac{256}{81} = 3,1604 \qquad = \frac{308}{100} = 3,08 \qquad = \frac{376}{121} = 3,107$$

Da essi si vede pure che il valore prescelto dagli Egiziani è il più conveniente.

Il π di Tolomeo. — Tolomeo non si occupò direttamente della determinazione di π, ma costrusse delle tavole di corde della circonferenza di 30 in 30′, dall'arco di 30′ a quello di 180°. Egli ammetteva come valore della corda dell'arco di 1°:

$$\frac{1}{60} + \frac{2}{60^2} + \frac{50}{60^3}$$

del raggio, ossia 1° 2′ 50″. Ammettendo che quest'arco non differisca sensibilmente dalla sua corda, l'arco di 60° avrebbe per lunghezza:

$$1 + \frac{2}{60} + \frac{50}{60^2}$$

del raggio, ossia 1° 2′ 50″ del raggio. Dunque la semi-circonferenza di raggio 1 oppure la circonferenza intera di diametro 1 è:

$$3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60^2} \qquad \text{o} \qquad 3\ ,\ 8^{\circ}\ ,\ 30$$

ossia $3\frac{17}{120} = 3{,}141666\ldots\ldots$ Tale è il π di Tolomeo:

$$3\frac{17}{120} = \frac{377}{120} = \frac{355+22}{113+7}$$

Lo si può dunque ottenere addizionando termine a termine il rapporto d'Archimede con quello di Mezio, Il π di Tolomeo è compreso fra i due.

Il π degli Indù. — I matematici Indiani conoscevano π con molta approssimazione. Così Bodhaiana gli dava il valore $\frac{49}{16}$ ossia 3,0625 e Aria-Bahata verso il 530 dava per π la frazione:

$$\frac{62832}{20000} = 3{,}1416$$

Egli dimostrò che essendo m il lato d'un poligono regolare di n lati iscritto nel circolo avente per diametro l'unità, e con s il lato del poligono regolare iscritto di $2n$ lati si ha la relazione:

$$s^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-m^2)^{\frac{1}{2}}$$

Partendo dall'esagono regolare iscritto egli trovò successivamente i lati dei poligoni regolari iscritti di numero doppio di lati fino a quello di 384 lati il cui perimetro dà come uguale a $\sqrt{9.8694}$ deducendone il valore di π sopra riferito.

Bhaskara verso il 1150 diede un valore tolto assai probabilmente da Aria-Bhata, ma che egli dice di avere calcolato col metodo d'Archimede pel poligono di 384 lati, ed è:

$$\frac{3927}{1250} = 3{,}1416$$

Il π dei Cinesi. — Nelle opere cinesi pare che si riscontrino i valori 3, $\frac{22}{7}$, $\frac{157}{50}$; i due ultimi probabilmente ricavati da opere arabe.

Il π di Archimede. — Archimede provò che il rapporto fra la circonferenza d'un circolo e il suo diametro è compreso fra:

$$3\frac{10}{70} \quad \text{e} \quad 3\frac{10}{71}$$

ossia fra 3,1428 . . . . . e 3,1408; il suo metodo consisteva nello iscrivere *e* circoscrivere nel circolo i poligoni regolari di 96 lati, determinare geometricamente i loro perimetri e ammettere che la circonferenza sia compresa fra tali perimetri; ciò equivale a fare $\varphi = \frac{\pi}{96}$ nella doppia ineguaglianza:

$$\text{sen}\ \varphi < \varphi < \text{tang}\ \varphi$$

Archimede deduceva i valori di sen φ e tang φ da quello di sen $\frac{1}{3}\pi$ e tang $\frac{1}{3}\pi$ mediante successive divisioni di angoli in due parti uguali.

Il metodo d'Archimede corrisponde quindi all'uso di queste formole:

$$m^2 = 2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{c^2}{4}}\right) \qquad M^2 = \frac{rC}{r + \sqrt{r^2 + \frac{C}{4}}}$$

nelle quali c ed m indicano i lati di due poligoni simili regolari iscritto e circoscritto; C ed M quelli dei poligoni regolari di numero doppio di lati.

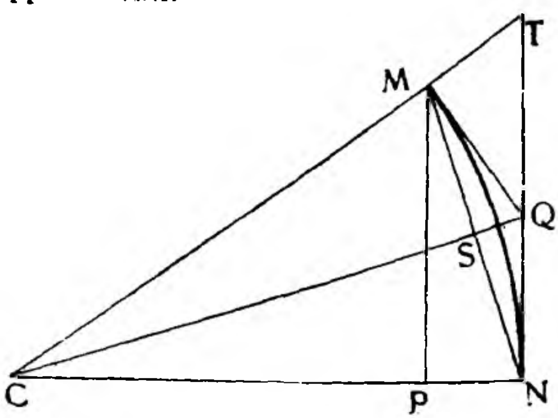


Fig. 446.

Huygens trovo poi un ingegnoso metodo per abbreviare i calcoli di Archimede. Saurin dimostrò pure che tali formole possono venire sostituite con queste assai più comode per i calcoli:

$$M = \frac{2c^2}{C + c} \qquad 2m = cM$$

il che risulta dalla similitudine dei triangoli (fig. 446).

CTN, *CMP*, *MTQ* e *NQS*, *MNP*.

Archimede dimostrò pure che il problema si riduceva a trovare la superficie di un triangolo rettangolo avente i lati rispettivamente uguali al perimetro e al raggio del circolo considerato; il semi-rapporto di tali due linee è π.

Il π dei matematici europei. — Moltissimi sono i matematici europei che si occuparono del calcolo di π, da Leonardo Fibonacci da Pisa (XIII secolo) che trovò il valore:

$$\frac{1440}{458 + \frac{1}{3}} = 3{,}1418 \ldots\ldots$$

fino allo Shanks che nel 1873 diede il valore di π con 707 cifre decimali, facendo uso della formola data da Machin nel 1706 e che gli aveva servito e calcolarlo con 100 cifre decimali:

$$\frac{1}{4}\pi = \text{tang}^{-1}\frac{1}{5} - \text{tang}^{-1}\frac{1}{239}$$

Un π pratico. — Come semplice curiosità indicherò ancora questo modo *pratico* di determinare π. Abbiasi un rotolo di carta come quelli usati per la stampa dei giornali; sia r il suo raggio, l la lunghezza del foglio ed n il numero dei giri o spire. La grossezza del foglio sarà espressa da $\frac{r}{n}$, epperò $l\frac{r}{n}$ rappresenterà la superficie della testata del cilindro di carta, che d'altronde può anche esprimersi con πr^2, d'onde l'eguaglianza:

$$l\frac{r}{n} = \pi r^2 \quad \text{dalla quale deducesi} \quad \pi = \frac{l}{n\,r}$$

La mnemonica del π.

La lingua francese si presta meglio della nostra ad una applicazione mnemonica interessante che consiste nel comporre frasi o versi nei quali il numero delle lettere delle singole parole corrisponda a quelli delle cifre d'un numero che si voglia ritenere a memoria. Così con l'artifizio dei versi seguenti sarà facile risordare il valore di π con 30 decimali; ciò darà a chi ignora il trucco un concetto altissimo della memoria di chi scriverà tali cifre senza pronunciare i versi, come se gli fluissero semplicemente alla penna per via naturale. Certo i versi non sono di Rostand........., ma è il caso di dire che qui il fine giustifica i mezzi:

Que j' aime à faire apprendre un nombre utile aux sages!
3 1 4 1 5 9 2 6 . 5 3 5
Immortel Archimède, sublime ingénieur,
8 9 7 9
Qui de ton jugement peut sonder la valeur?
3 2 3 8 4 6 2 6
Pour moi ton problème eut de pareils avantages....
4 3 3 8 3 2 7 9

ossia:

$$\pi = 3{,}14159 \quad 26535 \quad 89793 \quad 23846 \quad 26433 \quad 83279 \dots$$

Costruzioni approssimate.

Stabilita l'impossibilita di risolvere il problema, passiamo ad esaminare alcune delle costruzioni geometriche che danno di esso una soluzione *approssimata*, più o meno semplice e adatta agli usi pratici.

Queste costruzioni si possono distinguere in due categorie quelle nelle quali si ottiene una *rettificazione della circonferenza*, e quelle nelle quali si trova il *lato del quadrato* che equivale opprossimativamente al circolo.

Rettificazione della circonferenza.

1. — *Il π dalle piramidi d'Egitto.* Si ha l'equazione:

$$\cos 38^\circ\ 10'\ 46'' = \text{tang}\ 38^\circ\ 10'\ 46'' = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = 0{,}7863$$

$$\frac{1}{4}\pi = 0{,}785\dot{4}$$

La tangente e il coseno di 38° 10′ 46″ differiscono dunque pochissimo da $\frac{1}{4}\pi$; da ciò un mezzo semplice per trovare per tentativi una retta approssimativamente uguale al quadrante di circonferenza.

In un cerchio di centro O conduciamo il diametro AOB; in B conduciamo la tangente e per A una retta AMN, essendo M sulla circonferenza ed N sulla tangente, tale che $AM = BN$; il che si ottiene con qualche tentativo. AM è uguale al quarto della circonferenza, coll' approssimazione di $\frac{1}{1000}$ del raggio.

Le piramidi di Gizeh, a base quadrata, sono piramidi regolari. Secondo Erodoto, in quella di Cheope (la più alta, di 145 metri) l'area d'una faccia è uguale al quadrato dell'altezza. È facile calcolare che ciascuna faccia fa coll'altezza un angolo di 38° 10′ 46″; infatti designando con m tale angolo, si ha come conseguenza dell'enunciato di Erodoto:

$$\cos m = \operatorname{tang} m$$

Si conclude ancora da ciò che il perimetro della base diviso per l'altezza è uguale, assai prossimamente, a 2π. Ciò sembra confermare l'opinione singolare emessa recentemente che tale piramide sia stata innalzata per trasmettere alla posterità il rapporto della circonferenza al raggio.

Cheope era anteriore ad Abramo (— 2366); gli Egiziani conoscevano dunque già 2π con molta approssimazione, almeno empiricamente, ammesso che realmente si possa dare al passo di Erodoto l'interpretazione di cui sopra, il che è forse troppo azzardato.

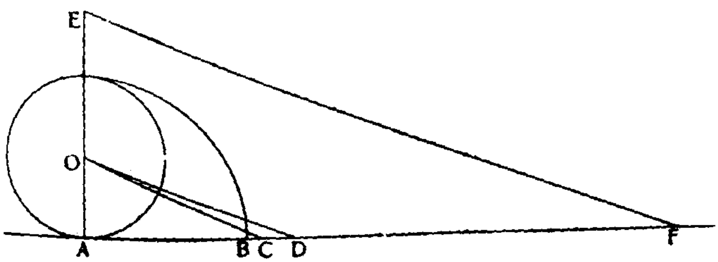


Fig. 447.

II. — *Costruzione di Specht* (fig. 447). Sulla tangente indefinita in A si prendono a partire da A le lunghezze:

$$AB = 2r \qquad BC = \frac{1}{5}r \qquad CD = \frac{2}{5}r$$

Si fa $AE = OC$ e da E si conduce la parallela ad OD fino a segare in F la tangente in A. Si ha:

$$AF = 2 \times 3{,}1415919$$

che differisce da π solamente per 0,0000007 (1).

III. — *Costruzione di Koskanski.* Alle estremità d'un diametro MN, si innalzano, nello stesso senso, due perpendicolari; sull'una si porta MA uguale ad un terzo del lato del triangolo equilatero iscritto, e sull'altra si porta tre volte il raggio in NB.

La congiungente AB corrisponde alla semi-circonferenza coll'approssimazione di 0,00005931 poichè con $r = 1$ si ha:

$$AB = 3{,}14153334$$

IV. — *Costruzione di Longhamps.* Bretschneider d'Eisenstadt osservò che l'espressione:

$$\frac{7}{10^7} + \frac{13\sqrt{146}}{50}$$

rappresenta π con 9 decimali esatti e indico una costruzione ad essa relativa, assai semplice. Considerando la sola parte:

$$\frac{13\sqrt{146}}{50} = 3{,}14159 \ldots$$

si ha π con 5 decimali asatti soltanto, approssimazione più che sufficiente. Osservando poi che $146 = 11^2 + 5^2$ si è condotti a costruire una linea tale che:

$$\frac{a}{13} = \frac{\sqrt{11^2 + 5^2}}{50}$$

per la quale ecco la soluzione proposta dal Longchamps.

---

(1) Per brevità, lasciamo al Lettore i calcoli relativi a queste soluzioni approssimate. Giova poi notare che non avendo queste costruzioni se non una ragione *pratica* di sussistere, sarà tutt'al più da prendersi in considerazione quella che possa in *pratica* dare effettivamente l'approssimazione teorica o poco meno; cosa evidentemente tanto meno facile a conseguire quanto più complicata sarà la costruzione. Ora un coefficiente assai importante di esattezza grafica è quello dell'*angolo* sotto il quale s'intersecano le linee dalle quali dipende il risultato della costruzione.

Nella costruzione dello Specht l'angolo della FB con la tangente è troppo acuto perchè non si abbia un'incertezza nel punto d'intersezione, tale da ridurre in modo troppo sensibile l'approssimazione del risultato. Questa può praticamente riuscire maggiore con una costruzione teoricamente meno approssimata, ma graficamente più felice.

Sul prolungamento del diametro si portano da A ad F tre decimi del diametro, e uno da A in C. Si conduce il raggio OM perpendicolare ad AB, indi le tangenti in B ed M che si

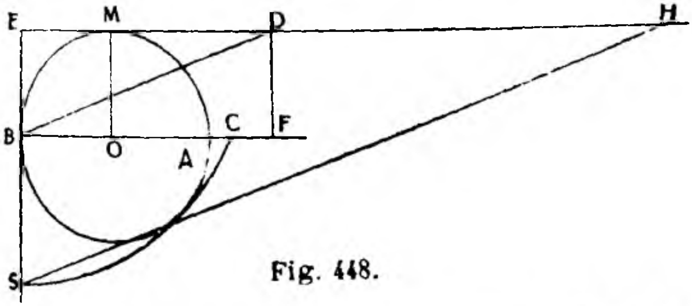


Fig. 448.

segano in E. Da questo punto come centro, con raggio EC si descive un arco che segna in S la tangente in B. Condotta la FD perpendicolare ad AB non resta che a tracciare la parallela da S alla BD e si avrà:

$$SH = \frac{13}{5}\sqrt{11^2 + 5^2} = 10\,a$$

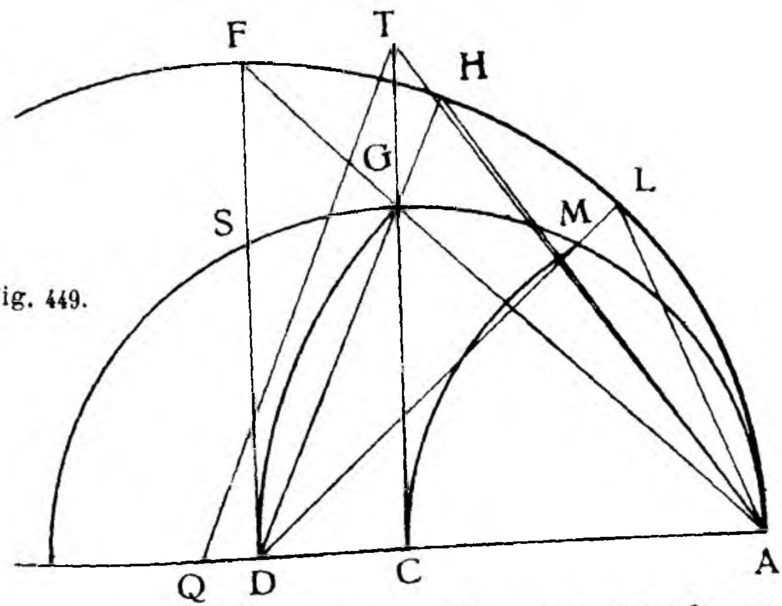


Fig. 449.

V. — *Costruzione Péraux*. Abbiasi la semi-circonferenza di centro C e raggio $CA = 1$ (fig. 449). Si porti $AD = AG = \sqrt{2}$

e si conduca DG fino ad incontrare in H la semi-circonferenza di centro D e di raggio $DA = \sqrt{2}$. Si avrà approssimativamente:

$$\text{corda } AH = \text{arco } AG$$

e così per qualsiasi arco AM considerato sulla semi-circonferenza CA si avrà sulla semi-circonferenza DA una corda AL sensibilmente uguale al suo sviluppo. Ecco l'indicazione dei risultati che si ottengono con varii archi e le relative differenze in più o meno rispetto alle vere lunghezze dei medesimi:

Arco in gradi	Lunghezza dell'arco	Corda approssimata	Differenza
30°	0,5235987	0,523525	— 0,000073
45°	0,7853981	0,7853332	— 0,0000649
60°	1,0471975	1,046936	— 0,000261
72°	1,2566370	1,2564928	— 0,000144
77° 37′ 8″, 4	1,3547062	1,3547062	nulla
80°	1,3962634	1,3963489	+ 0,0000855
90°	1,5707963	1,5713898	+ 0,0005936

Per tutta la circonferenza si ha una differenza in più di:

0,0023745420

La differenza è dunque *nulla* per un arco di 77° 37′ 8″, 4 che si può ottenere mediante la costruzione seguente (fig. 450).

Sia la semi-circonferenza di centro C e di raggio $CA = 1$. Portiamo:

$$AD = AG = \sqrt{2}$$

e descriviamo le semi-circonferenze di centro D e raggio DA, e di diametro DA. Innalziamo da C la perpendicolare CG su AD e conduciamo DV. Avremo i punti B ed E tali che la corda AE sarà uguale all'arco AB di 77° 37′ 8″, 4.

Si può ugualmente ottenere il punto V innalzando la perpendicolare da D a DA ed unendo il punto S con A, oppure alzando la perpendicolare da R a DA e unendo P con A.

Nota I. — Nella fig. 450 si può inoltre osservare che CE è (con la differenza in meno di 0,0074) il valore del raggio della sfera equivalente al cubo il cui lato è uguale ad AC.

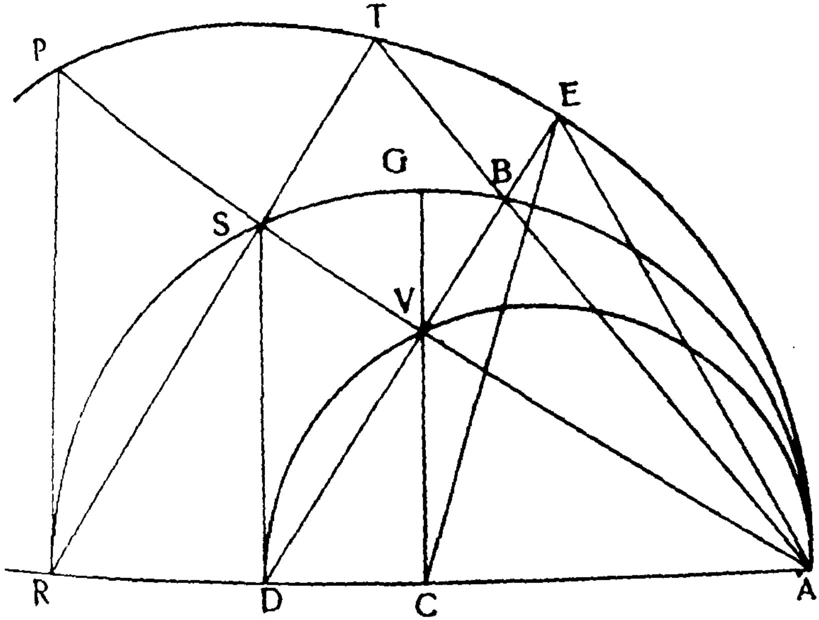


Fig. 450.

Nota II. — In detta figura si ha pure DM uguale al lato del cubo doppio di quello avente AC per lato, con la differenza in meno di 0,00064 (V. *Duplicazione del cubo*).

VI. — *Costruzione di Terquem*. Non è che un'altra forma della costruzione di Koskanski (vedi n. III pag. 508). Condotta la tangente all'estremo del diametro AB, si conduce il raggio OC perpendicolare ad AB e da C si porta in E il raggio; si conduce OED, poi $DF = 3$, essendo il raggio $OA = 1$ (fig. 451).

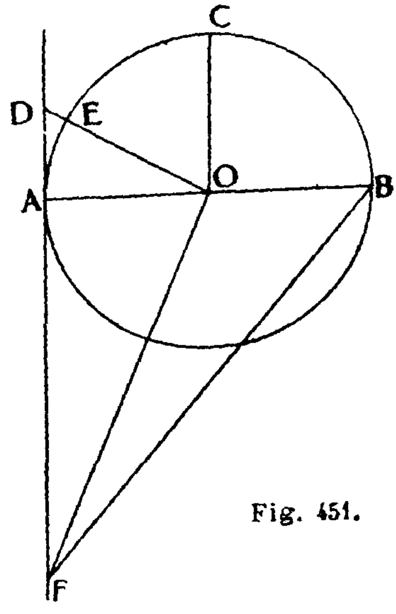


Fig. 451.

VII. — *Costruzione di Gergonne.* Dato un triangolo isoscele ABO rettangolo in B, se si prende $OO' = OA$ e sia A' il punto di mezzo di AO; si prende $O'O'' = O'A'$ e sia A'' il punto di

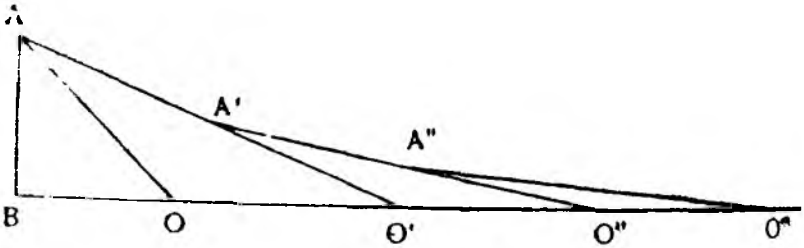


Fig. 452.

mezzo di $A'O''$; si prende $O''O''' = O''A''$, ecc. le lunghezze OO', $O'O''$, $O''O'''$ . . . . . tenderanno verso quella del raggio del circolo la cui circonferenza è uguale ad AB.

VIII. — *Costruzione di D'Ocagne.* Sia $AM = \frac{2}{3} AB$; conduciamo il raggio OM che segna in L l'arco di circolo AB. La corda AL risulterà approssimativamente uguale ai due terzi dell'arco AB. L'errore relativo è inferiore a 0,0001 fino verso i 40° e non arriva a 0,001 che verso 70°, e per 90° non è ancora che di 0,005.

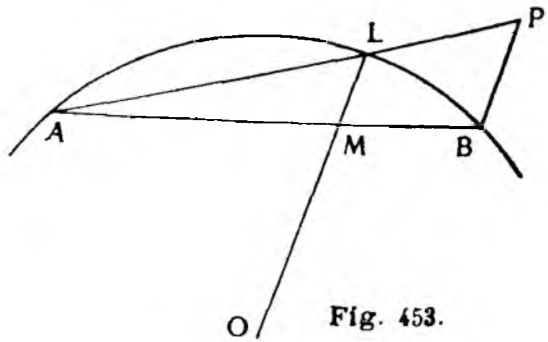


Fig. 453.

Se si conduce da B la parallela BP ad ML, P essendo il punto d'intersezione dalla BP con la AL, si ha $AP \frac{3}{2} AL$ ossia, col grado d'approssimazione suindicato, $AP =$ arco AB. Naturalmente la costruzione si presta a portare sulla circonferenza un arco di lunghezza determinata, eseguendola in senso diverso.

IX. – Col compasso (1). Sia O il centro di una circonferenza (fig. 454) sulla quale si contino gli archi da un suo punto A e positivamente nel senso AM. Sia P un punto qualunque della circonferenza. Supponiamo l'arco AP appartenente ad uno dei due primi quadranti; diciamo poi Q il simmetrico di

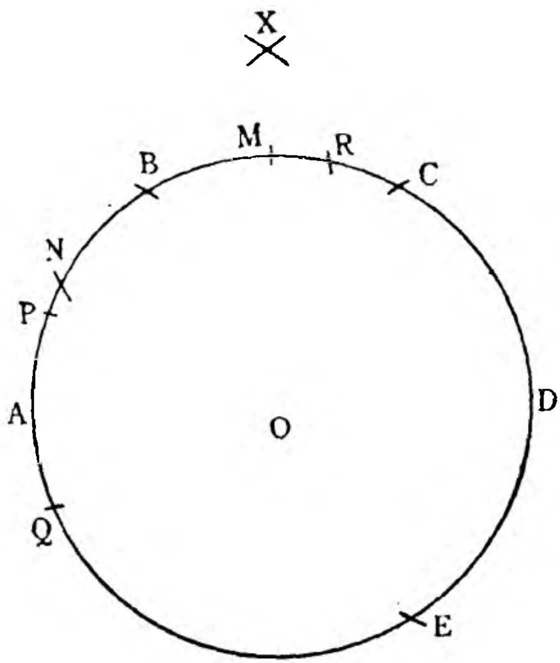


Fig. 454.

P rispetto al diametro OA. Costruiamo i punti B, C, D, E tali che sia $AB = BC = DE = OA$; determiniamo poi X intersezione delle circonferenze $A\,(AC)$ e $D\,(AC)$. Dal triangolo OPX si ha:

$$\overline{PX}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OX}^2 - \overline{OX} \cdot 2 \text{ proiez. } \overline{OP} \text{ su } \overline{OX}$$

$$= \overline{OA}^2 + \overline{OX}^2 - \overline{OX} \cdot \overline{PQ}$$

$$= \overline{AX}^2 - \overline{OX} \cdot \overline{PQ}$$

(1) *Enriques*. Questioni riguardanti la Geometria Elementare, pag. 267.

Ora, posto $OA = 1$, arco $AP = \alpha$ (in gradi) $PX = b$, si ha:

$$\overline{AX} = \sqrt{3} \qquad \overline{OX} = \sqrt{2} \qquad \overline{PQ} = 2 \operatorname{sen} \alpha$$

e l'ultima formola si scrive:

$$b^2 = 3 - 2\sqrt{2 \operatorname{sen} \alpha} \tag{1}$$

Essa vale, qualunque sia P nei primi due quadranti, e cambiando il segno $-$ in $+$ vale anche negli altri due. Inoltre b può sempre considerarsi come una corda del cerchio dato, salvo per posizioni di P nel 3° e 4° quadrante alle quali corrisponda $PX > 2$.

Supposto $\alpha < 180°$ (onde $b < 2$), possiamo dare alla (1) una nuova forma. Chiamando β l'arco del cerchio $O\,(OA)$ di cui b è la corda, si ha:

$$b = 2 \operatorname{sen} \frac{\beta}{2}$$

e quindi:

$$\frac{b^2}{4} = \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} = \frac{1 - \cos \beta}{2} \tag{2}$$

d'altronde dalla (1) abbiamo:

$$\frac{b^2}{4} = \frac{3}{4} - \sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha} = \frac{3}{4} - \operatorname{sen} \alpha \cos 45° \tag{3}$$

Dal confronto delle (2) e (3) si deduce:

$$\cos \beta = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos 45° - \frac{1}{2} = \operatorname{sen} (\alpha + 45°) + (\operatorname{sen} \alpha - 45°) - \operatorname{sen} 30°$$

che si può anche scrivere:

$$\cos \beta = \cos (45° - \alpha) - \operatorname{sen} (45° - \alpha) - \operatorname{sen} 30° \tag{4}$$

Questa formola serve per la soluzione approssimata della rettificazione della circonferenza e della duplicazione del cubo (V. al § *Duplicazione del cubo*).

Se $O\,(OA)$ è la circonferenza da rettificare, si descriva la $B\,(BX)$ e si chiami R il punto d'incontro con la $O\,(OA)$ situato nell'arco BCD. Se nell'equazione (4) si fa $\alpha = BC = 60°$, si ha per β il valore $\beta = 43° 33' \frac{286}{2005}$; ora β è l'arco la cui corda è BX ossia BR; ne viene che l'arco ABR sarà di $103° 33' \frac{296}{2005}$. Il doppio del seno della sua metà ci dà la lunghezza della sua corda; ora abbiamo:

$$\frac{\text{arco } ABR}{2} = 51° 46' \frac{1145}{2005}$$

ed il seno di quest'arco è 0,7855998; dunque la corda AR sarà misurata da 1,5711996 che differisce dalla quarta parte della circonferenza per circa 0,0004 in più.

X. – *Costruzione dell'Autore.* Questa mia costruzione corrisponde al valore:

$$\sqrt{51} - 4 = 3,14142842850$$

e differisce da π per 0,0001642250 in meno, il che corrisponderebbe ad un errore di circa un millimetro (m. 0,000985535) per una circonferenza di tre metri di raggio.

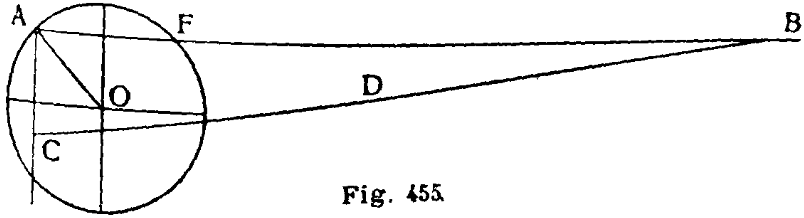


Fig. 455.

Si porta AF (lato del quadrato iscritto) altre quattro volte da F in B cosicchè $AB = 5\sqrt{2}$. Si fa $AC = AO = 1$; si ha allora $CB = \sqrt{51}$ e facendo $BD = 4$ risulta $CD = \sqrt{51} - 4$.

XI. — *Costruzioni diverse.* Sia AB il lato del triangolo equilatero (fig. 456) iscritto nel circolo di centro O, e C il suo punto di mezzo. Sul diametro CO porto da C verso O il segmento

$CD = 2\ AB$. Congiungo D con B e su questa retta porto il segmento $DE = 2$ (essendo il raggio $= 1$). Avrò:

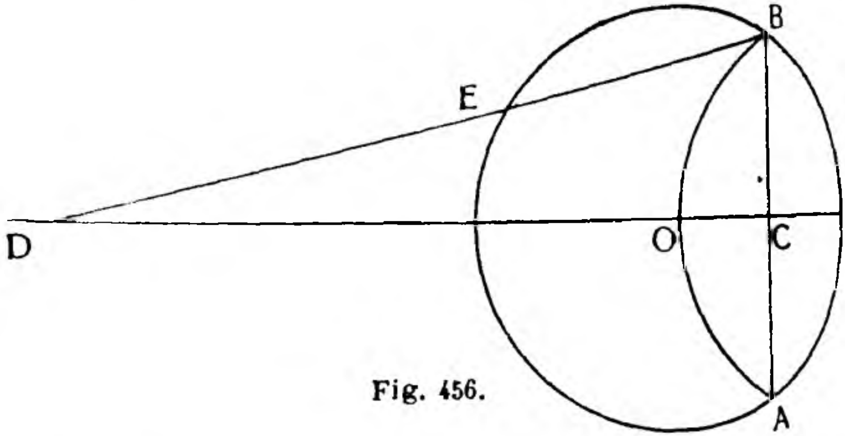


Fig. 456.

$$BC = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad CD = 2\sqrt{3} \qquad BD = \sqrt{\frac{3}{4} + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{51}$$

$$BE = \frac{\sqrt{51}}{2} - 2 \qquad 2\ BE = 3{,}1414284 \ldots$$

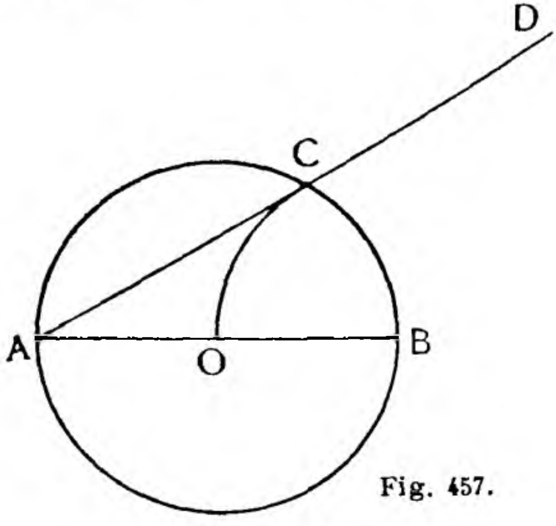


Fig. 457.

XII. — La somma $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3{,}146264369$ differisce da π per 0,004671716 in eccesso. La costruzione più semplice per ottenere tale somma è quella indicata nella fig. 457. Il punto D si ottiene segando la AC con un arco di centro B e di raggio uguale ad AC ossia a $\sqrt{3}$ per $r = 1$. Risulta $CD = \sqrt{2}$. AD è dunque uguale alla semi-circonferenza ACB.

L'approssimazione non è grande, ma la costruzione è molto semplice e quindi meno soggetta ad errore.

XIII. — Sia ACB (fig. 458) un arco di circolo minore d'una semi-circonferenza. Conduciamo la tangente AX, dallo stesso lato dell'arco ACB; tracciamo poi la bisettrice AB_1 dell'angolo BAX, la bisettrice AB_2 dell'angolo B_1AX, la bisettrice AB_3

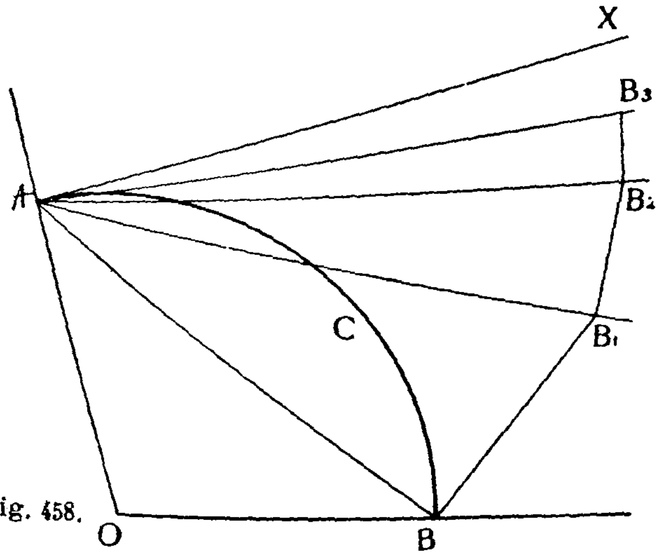


Fig. 458.

dell'angolo B_2AX, ecc. Innalziamo in B su AB una perpendicolare, che incontra AB_1 in B_1; in B_1 su AB_1 una perpendicolare che incontra AB_2 in B_2; in B_2 su AB_2 una perpendicolare che incontra AB_3 in B_3, ecc. Le rette AB, AB_1, AB_2, AB_3 . . . . . tendono verso un limite uguale all'arco ACB. I triangoli OAB, OAB_1, OAB_2, OAB_3 . . . . . (O essendo il centro), hanno per limite l'area del settore OAB. La dimostrazione risulta dalle uguaglianze:

$$\operatorname{sen} \alpha = 2^n \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{8} \cdots \cos \frac{\alpha}{2^n} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2^n}$$

$$\alpha = \lim. \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{8} \cdots}$$

La rettificazione è assai approssimata. Quando si prende:

$$\pi = \frac{2}{\cos\frac{1}{4}\pi \cdot \cos\frac{1}{8}\pi \cdot \ldots \ldots \cos\frac{1}{2048}\pi}$$

si trova $\pi = 3{,}1415927$.

XIV. — Il perimetro del triangolo rettangolo che ha per cateti i $\frac{3}{5}$ e i $\frac{6}{5}$ del diametro è uguale a 6,283281573 .... Corrisponde dunque alla circonferenza con una differenza in più di 0,000096266.

XV. — Aggiungendo al triplo del raggio il decimo del lato del quadrato iscritto si trova:

$$3 + \frac{\sqrt{2}}{10} = 3{,}14142135 \ldots\ldots$$

Lato del quadrato equivalente al circolo.

I. — *Costruzioni di Sonnet.* Premettiamo che il lato del quadrato equivalente al circolo, calcolato in base al valore di π è 1,77245 38 ..... Indicheremo nelle varie costruzióni l'approssimazione che si consegue. Tracciata la tangente in A, e fatto $OP = \frac{1}{6}$ (essendo $r = 1$) ed $AR = 4$, si conduce RM che sega la circonferenza in N; la corda AN sarà approssimativamente il lato del quadrato equivalente al circolo ossia $AN = 17724502$.

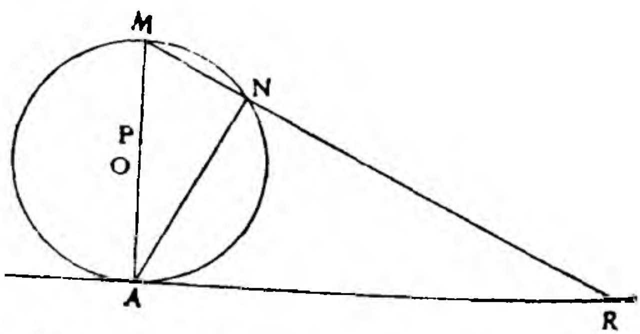


Fig. 459.

II. — Se si descrive un cerchio con raggio $= \frac{5}{4}$ del raggio del circolo dato, il quadrato in esso iscritto avrà per lato:

$$\frac{5}{4}\sqrt{2} = 1{,}7677669$$

III. — *Costruzione di Willich.* Sia la corda MN uguale al raggio (fig. 460) e C il suo punto medio; D il punto medio dell'arco MN; portiamo sulla circonferenza, da D in E, due volte il raggio. Tracciamo poi la corda ECF che sarà il lato cercato. Si trova:

$$EF = 1,77198$$

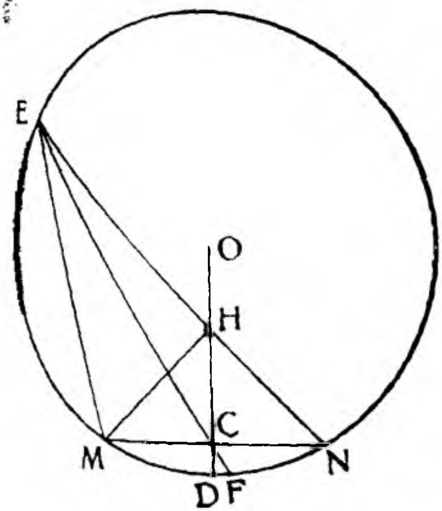


Fig. 460.

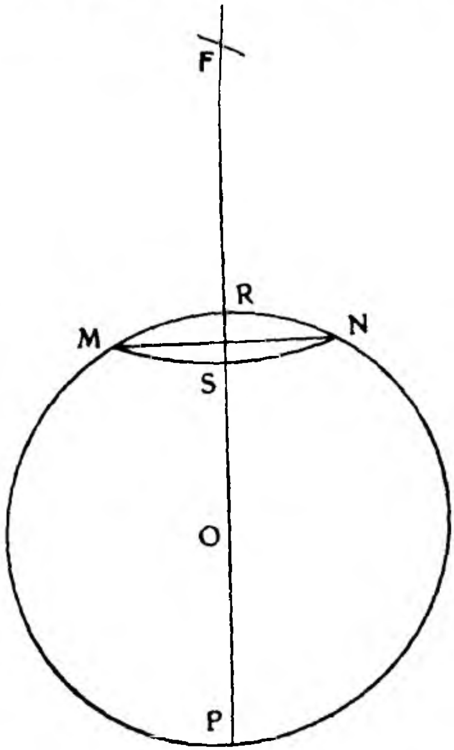


Fig. 461.

IV. — *Costruzione di Périgal.* Sia MN (fig. 461) il lato dell'esagono iscritto, e PR il diametro ad esso perpendicolare. Da M come centro e con raggio uguale al lato del *quadrato* iscritto si sega in F il diametro PR, e da F come centro si descrive l'arco MSN. Il segmento SP è quello cercato, ossia $SP = 1,77468$.

V. — *Costruzione di Postula.* Sia AB (fig. 462) un diametro d'un circolo. Dividiamo il raggio CB in sei parti uguali; G essendo il primo punto di divisione a partire da C:

$$\left(CG = \frac{1}{6}\, CB\right)$$

descriviamo da detto punto come centro, con raggio uguale a $2\,AB$, una circonferenza che segherà in F la tangente condotta in B. La retta AF incontra la rirconferenza in un punto D; conduciamo la corda BD; essa sarà il lato d'un quadrato sensibilmente uguale al circolo. Infatti $\overline{BD}^2 = 3{,}141579 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$

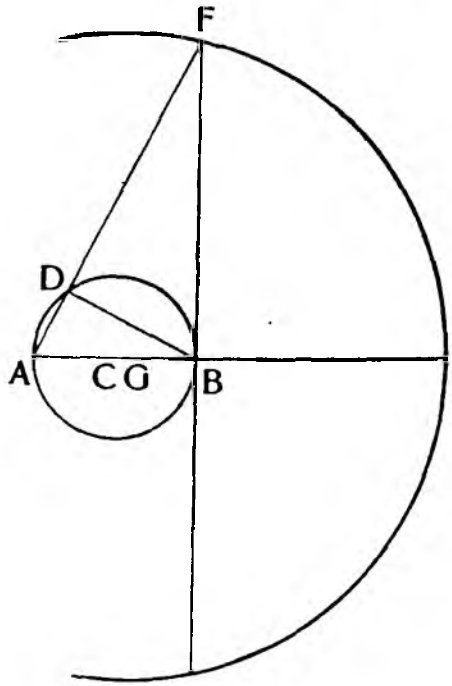


Fig. 462.

VI. — *Costruzione Péraux.* Si porta AH (fig. 449 a pag. 509) che è la rettificazione approssimata del quadrante AG) in AQ; da Q come centro e con lo stesso raggio AH si sega CG in T. Si avrà AT media proporzione fra AC e $2\ AQ$. Se AQ fosse la vera lunghezza dell'arco AG sarebbe uguale a $\frac{\pi}{2}$ e quindi si avrebbe:

$$\overline{AT} = \sqrt{\pi} = 1{,}7724538$$

mentre risulta nel nostro caso $AT = 1{,}7727886$ con differenza in più di 0,0003348.

VII. — Sia MN un quarto della circonferenza e NP un sesto. Sia S il punto medio (fig. 463) della corda NP. Conduciamo MSA a risulterà:

$$MA = 1{,}77198 \cdot \cdot \cdot \cdot r$$

con differenza in meno di 0,00047.

VIII. — Sia il circolo dato (fig. 464) di diametro AB. Facciamo $OM = \frac{3}{5} r$ ed $ON = \frac{3}{2} r$. Sia R il punto medio del raggio OB. Sopra MR ed AN come diametri descriviamo da

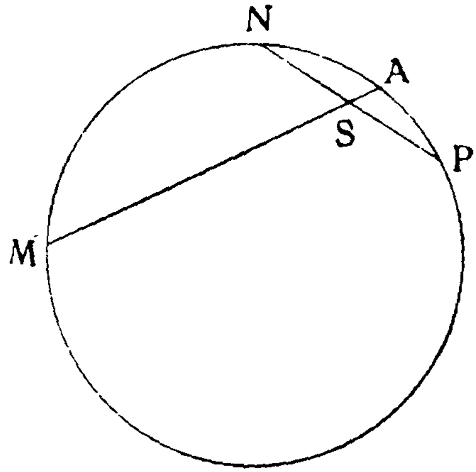


Fig. 463.

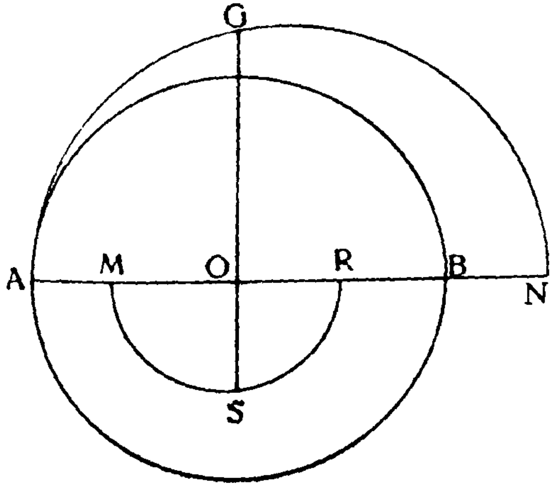


Fig. 464.

un lato e dall' altro di AB le semi-circonferenze MSR AGN che segano in G ed S il diametro perpendicolare ad AB. Il segmento GS è quello cercato, ossia $GS = 1{,}77246$.

Raggio del circolo equivalente al quadrato.

Sia $ABCD$ (fig. 465) il quadrato dato di lato 2; E, F, G, H i punti di mezzo dei suoi lati ed X il centro.

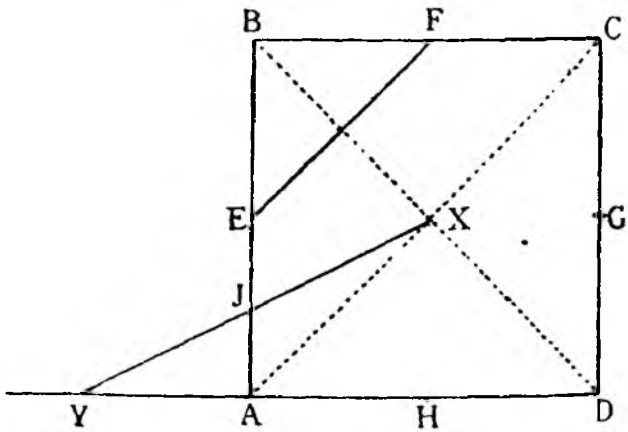


Fig. 465.

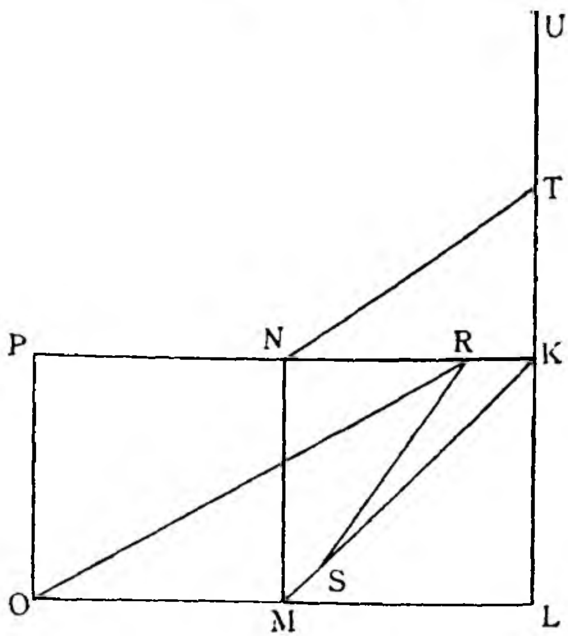


Fig. 466.

Costruiamo un rettangolo $KLOP$ (fig. 466) coi lati EF e 2 EF e siano M, N i punti di mezzo dei suoi lati OL, PK. Con centro O e raggio OL seghiamo PK in R. Con R come centro e con raggio RL seghiamo in S la MK. Con centro N e raggio KS seghiamo in T il prolungamento di LK e facciamo $KU = 2\ KT$. Prolungata ora, nella fig. 465 la DA, portiamo su di essa la KU da H in Y e conduciamo la XY che segherà AB in J. Avremo in XJ il raggio del circolo che è assai prossimamente equivalente al quadrato $ABCD$. Infatti si ha:

$$\frac{1}{4}\pi = 0{,}78539888125 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

mentre dovrebbe aversi:

$$\frac{1}{4}\pi = 0{,}7853981634 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

L'errore è inferiore ad un milionesimo, cioè di + 0,0000006491.

LA DUPLICAZIONE DEL CUBO

Le leggende e il problema.

Una fiera epidemia avendo imperversato in Atene, quegli abitanti ricorsero all'Oracolo di Delfo per sapere fino a quando il flagello li avrebbe messi a sì dura prova.

La risposta non poteva evidentemente essere nè molto semplice nè molto esplicita, e fu questa: « *Raddoppiate l'ara di Apollo se volete placare le ire divine* ». Quest'ara era cubica, e la cosa parve dapprima assai semplice e probabilmente si credette avere soddisfatta la richiesta della divinità collocando accanto all'ara un'altra ara uguale, oppure raddoppiando il lato della prima, secondo le tre dimensioni il che portava il volume all'*ottuplo* anzichè al *doppio*. Comunque sia la divinità corrucciata raddoppiò l'intensità della pestilenza e ad una nuova delegazione degli abitanti dichiarò in modo più esplicito che voleva un altare doppio, in *volume*, del primitivo. La cosa, messa in tali termini, non presentandosi più così liscia, gli Ateniesi ricorsero a Platone che li rimandò ai geometri trattandosi di argomento di competenza di questi.

Tale è la leggenda di Filoponio relativa a questo celebre problema; ma esso pecca di evidente anacronismo quanto all'intervento di Platone. La leggenda narrata da Eratostene è simile a quella di Filoponio, ma attribuisce a Minosse la paternità del problema.

Abbiamo sulla *duplicazione del cubo*, anche una leggenda araba che mette la pestilenza tra i figli d'Israello anzichè fra gli Ateniesi, fa pronunciare da Dio anzichè dall'Oracolo l'ingiunzione della duplicazione dell'altare, e fa dire a Platone consultato dal popolo: « Voi avete trascurato la scienza della Geometria e Dio vi ha punito poichè essa è la scienza per eccellenza; la duplicazione del cubo dipende da un problema difficile di Geometria che consiste in questo..... ». E fa seguire la soluzione di Apollonio (vedi pag. 533).

Lasciamo ora le leggende, più o meno attendibili, e occupiamoci alquanto del problema. Sia 1 la lunghezza del lato del cubo dato. L'equazione della duplicazione sarà $x^3 = 2$ la quale è irriducibile, poichè se non lo fosse si avrebbe per $\sqrt[3]{2}$ un valore razionale, dovendo necessariamente un'equazione di terzo grado riducibile avere un *fattore* razionale lineare. Ora, il grado di quell'equazione non è della forma 2^m, dunque essa non può risolversi con radici quadrate, epperò *con riga e compasso* non se ne può eseguire la costruzione *geometrica*.

Uno dei primi, forse il primo, geometra che si sia occupato di risolvere questo problema è Ippocrate di Chio (circa 1420 A. C.) che non ne diede veramente una soluzione grafica, ma ridusse la quistione alla ricerca di due medie proporzionali fra un certo segmento a e il segmento doppio, $2a$. Siano infatti x ed y tali due medie proporzionali, avremo;

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

da cui:

$$xy = 2a^2 \qquad x^2 = ay$$

dalla prima si ricava $y = \dfrac{2a^2}{x}$ e sostituendo questo valore nella seconda si ha:

$$x^2 = a \cdot \frac{2a^2}{x} \qquad \text{ossia} \qquad x^3 = 2a^3$$

Ed è questa la forma sotto la quale venne di poi studiato il problema chiamandolo *mesolabio*.

Soluzioni con coniche.

I. — Consideriamo l'espressione che corrisponde alla ricerca delle due medie proporzionali secondo la maniera ideata da Ippocrate di Chio per risolvere il problema (vedi sopra), cioè:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

Da essa si ricavano le equazioni:

$$x^2 = ay \qquad \text{(I)}$$

$$y^2 = 2\,ax \qquad \text{(II)}$$

$$xy = 2\,a^2 \qquad \text{(III)}$$

La (I) è quella d'una parabola (fig. 467) il cui asse è quello delle y e il cui vertice corrisponde all'origine delle coordinate.

La (II) è quella d'un'altra parabola che ha pure il vertice nell'origine O, ma il cui asse è quello delle x.

La (III) infine è quella d'un'iperbola equilatera i cui assintoti sono gli assi Ox, Oy.

L'intersezione M di due qualunque di tali coniche risolve dunque il problema, cioè si ha:

$$\overline{MC}^3 = 2\,\overline{OE}^3 \qquad \text{essendo} \qquad \overline{OE} = a$$

Ma si può ancora osservare che sommando membro a membro, due a due, le equazioni (I) (II) e (III) si ottengono queste altre:

(I) + (II) $$x^2 + y^2 = ay + 2\,ax \qquad \text{(IV)}$$

(I) + (III) $$x^2 + xy = ay + 2\,a^2 \qquad \text{(V)}$$

(II) + (III) $$y^2 + xy = 2\,ax + 2\,a^2 \qquad \text{(VI)}$$

La (IV) è l'equazione d'un circolo (fig. 467) che passa per l'origine e il cui centro ha per coordinate:

$$x = a \qquad y = \frac{a}{2}$$

La (V) è l'equazione d'un'iperbola i cui assintoti hanno per equazioni:

$$y = a \qquad x = -(a + y)$$

La (VI) è l'equazione d'un'iperbola i cui assintoti sono dati dalle equazioni:

$$y = 2\,a \qquad y = -(x + 2\,a)$$

La soluzione del problema può dunque ottenersi dalla intersezione di due qualunque di queste *sei* coniche (I) (II) (III) (IV) (V) e (VI). Si hanno in tal modo *quindici* soluzioni, ossia costruzioni diverse. Fra queste, le soluzioni date dalla intersezione delle due parabole (I) e (II) e quelle date dalla intersezione dell'iperbola (III) con la parabola (I) furono indicate da Menecme nel 340 A. C.

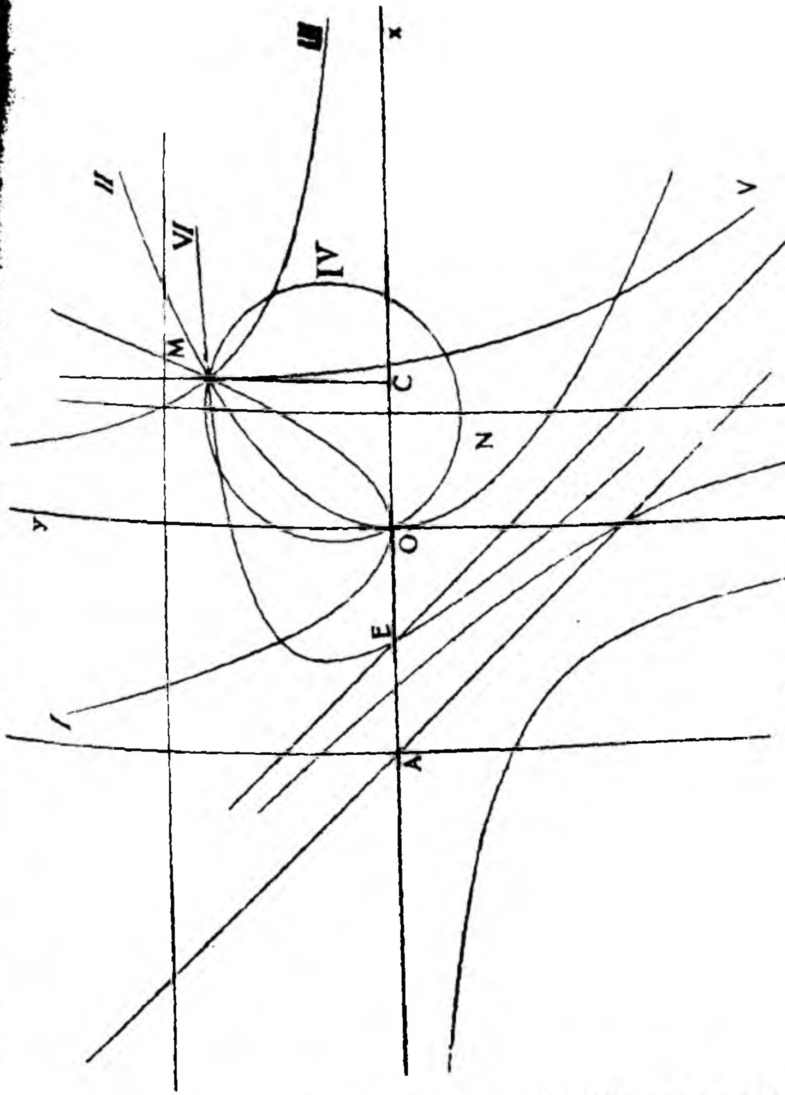


Fig. 467.

Quella data dall'intersezione del circolo (IV) con la parabola (I) fu indicata da Descartes e l'altra dipendente dall'intersezione nell'iperbola (III) del circolo (IV) venne data da Gregoire de Saint Vincent nel 1647.

II. — Come si è veduto Ippocrate di Chio ridusse il problema della duplicazione del cubo alla ricerca di due medie proporzionali fra due quantità a e $2a$. Ora la soluzione si può fare ugualmente dipendere dalla ricerca di due medie proporzionali tra a ed $a\sqrt{2}$; infatti si ha:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{a\sqrt{2}}$$

da cui:

$$x^2 = ay \qquad \text{ed} \qquad x = \frac{y^2}{a\sqrt{2}}$$

e quindi:

$$y^3 = 2a^3$$

Quanto si è detto riguardo alle sei coniche che risolvono, considerate a due a due, il problema, puo dunque ripetersi per altre sei coniche dello stesso genere le cui equazioni sarebbero:

$$x^2 = ay \qquad \text{(1) parabola}$$

$$y^2 = ax\sqrt{2} \qquad \text{(2) parabola}$$

$$xy = a^2\sqrt{2} \qquad \text{(3) iperbola equilat.}$$

$$x^2 + y^2 = ay + ax\sqrt{2} \qquad \text{(4) circolo}$$

$$x^2 + xy = ay + a^2\sqrt{2} \qquad \text{(5) iperbola}$$

$$y^2 + xy = ax\sqrt{2} + a^2\sqrt{2} \qquad \text{(6) iperbola}$$

Di queste coniche la prima parabola (1) è quella già considerata nell'altro caso (I). Le coordinate del centro del circolo sono:

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{2} \qquad y = \frac{a}{2}$$

III. — Soluzione di Longchamps. Consideriamo una parabola P riferita ai suoi assi principali e sia Δ una circonferenza passante per O e segante Ox in un punto M tale che $OM = 2p$, essendo $2p$ il parametro di P.

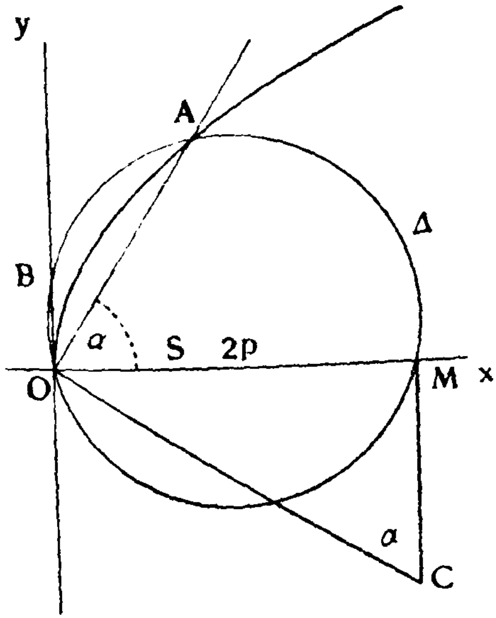
Sia A uno dei punti comuni a P e a Δ; l'equazione di OA essendo:

$$y - m\,x = 0$$

quella di Δ sarà della forma:

$$(1 + m^2)\,(y^2 - 2\,p\,x) - (y - m\,x)\,(y + m\,x + n) = 0$$

Fig. 468.



Scrivendo che questa equazione è verificata per:

$$x = 2\,p \qquad y = 0$$

si ha:

$$n = \frac{2\,p}{m}$$

e finalmente l'equazione di Δ è:

$$x^2 + y^2 - \frac{2\,p}{m^3}\,y - 2\,px = 0$$

Facendo $x = o$ si trova che Δ sega $O\,y$ in un punto B tale che:

$$OB = \frac{2\,p}{m^3} \tag{1}$$

Indicando con α l'angolo AOx, si ha $m = \text{tg}\,\alpha$. Innalziamo in M una perpendicolare ad Ox; in O una perpendicolare ad OA; queste rette si segano in C ed abbiamo:

$$CM = 2\,p\,\text{cotg}\,\alpha \tag{2}$$

Le relazioni (1) e (2) danno:

$$OB \cdot 4\,p^2 = \overline{CM}^3$$

Prendendo:

$$OB = \frac{p}{2} \qquad \text{si ha dunque} \qquad \overline{CM}^3 = 2\,p^3$$

Facendo il tracciato indicato in figura, si avrà il punto A, prima, e poi il punto C (*). In generale l'equazione $x^3 = \lambda p^3$ sarà graficamente risolta prendendo:

$$OB = \frac{1}{4}\,\lambda\,p$$

Soluzioni con cubiche.

1. — Le *cubiche semplici*, delle quali si è trattato a pag. 341 si prestano bene per la soluzione del problema della duplicazione del cubo; infatti se nelle equazioni di queste curve:

$$x^3 = ay^2 \qquad x^3 = a^2\,y \qquad xy^2 = a^3$$

si fa rispettivamente:

$$y = a\sqrt{2} \qquad y = 2\,a \qquad x = \frac{y}{2}$$

si trova appunto:

$$x^3 = 2\,a^3 \qquad x^3 = 2\,a^3 \qquad y^3 = 2\,a^3$$

(*) Questa soluzione, piuttosto involuta, riesce ben più semplice osservando che l'ordinata AS del punto A è precisamente uguale a CM.
Si è poi già veduto (v. pag. 526) che l'intersezione della parabola $y^2 = 2\,ax$ col circolo:

$$x^2 + y^2 - ay - 2\,ax = o$$

ha per ascissa:

$$x = a\sqrt[3]{2}$$

Così se nella fig. 296, a pag. 342, facciamo:

$$AF = AO = a \qquad \text{e portiamo} \qquad OF = a\sqrt{2}$$

da O in G, la parallela da G all'asse Ox segherà la cubica in S e sarà:

$$GS = a\sqrt[3]{2}$$

cioè GS sarà il lato del cubo di volume doppio di quello di lato $OA = a$.

II. — Se nella fig. 297, a pag. 343, si conduce la retta SV la cui equazione è:

$$y = 2a$$

si ha per ascissa del punto T, nel quale essa sega la cubica, il valore:

$$ST = a\sqrt[3]{2}$$

III. — E se infine nella fig. 298, a pag. 344, si conduce la retta RN la cui equazione è:

$$y = 2x$$

l'ordinata del punto T in cui essa sega la cubica risulta:

$$TV = a\sqrt[3]{2}$$

essendo $OG = a$.

IV. — **Soluzione di Platone.** Questa soluzione *attribuita* a Platone, è basata sul procedimento delle medie proporzionali di Ippocrate (vedi pag. 525). Consideriamo i triangoli rettangoli ABC, BCD che hanno il cateto BC comune (fig. 469) le ipotenuse perpendicolari e i cateti AB, CD paralleli. Essi ci danno:

$$\frac{OD}{OC} = \frac{OC}{OB} = \frac{OB}{OA}$$

Il problema sarebbe dunque risolto se si potessero costruire tali triangoli in modo da ottenere $OA = 2\,OD$. Per la soluzione *pratica* venne ideato uno strumento che permette di costruire la figura soddisfacente alle condizioni richieste.

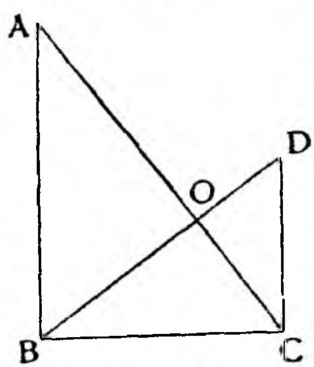


Fig. 469.

Nella fig. 470 ho voluto indicare il procedimento che si potrebbe seguire per riprodurre la costruzione di Platone.

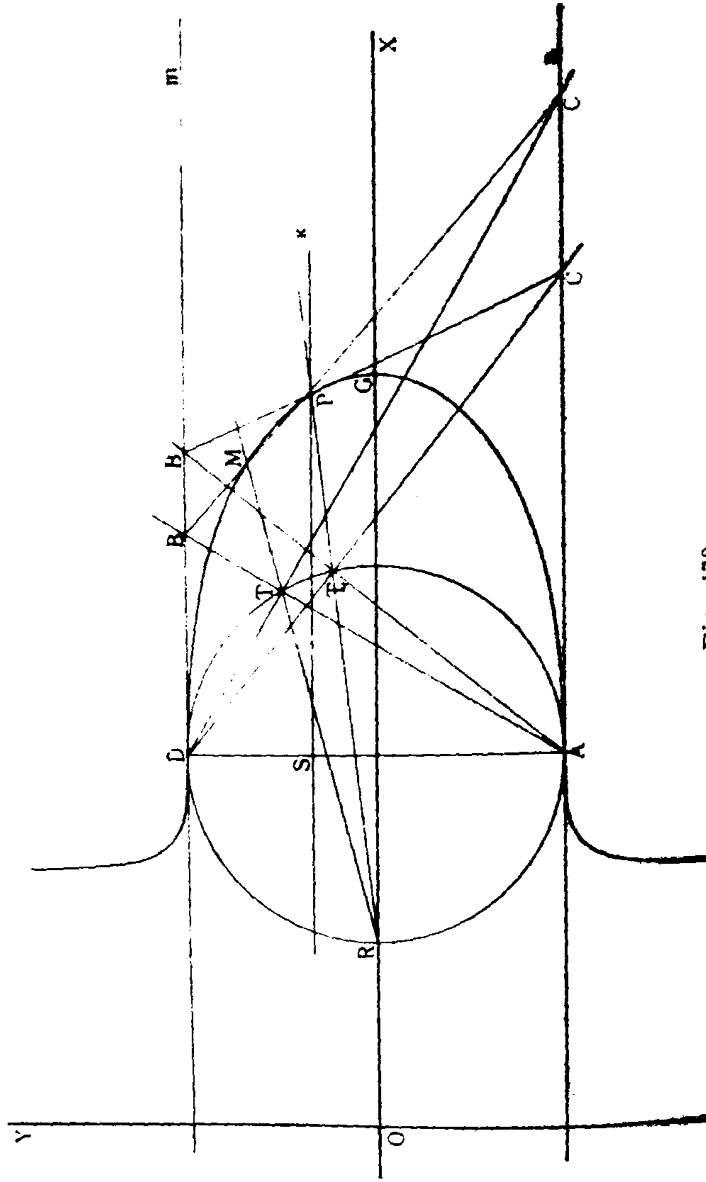


Fig. 470.

Descriviamo il circolo di diametro AD e conduciamo ad esso le tangenti m , n in A e D. Uniamo un punto qualunque T della circonferenza con A e D congiungiamo i punti B e C

nei quali la AT e la DT segano le tangenti m, n. Conduciamo poi la bisettrice dell'angolo BTC, cioè la RT, che segherà in M la BC. Essendochè in un triangolo la bisettrice d'un angolo divide il lato opposto in segmenti proporzionali ai lati adiacenti dell'angolo, il punto M dovrà cadere sulla perpendicolare k ad AD condotta per S tale che:

$$AS = \frac{1}{3} AD$$

quando si abbia $CT = 2\,BT$ come sopra si è veduto.

Basterà dunque costruire il luogo di M, e la sua intersezione P con la retta k darà la soluzione del problema. Infatti basterà condurre la RP che determinerà T_1 e poi AT_1 e DT_1 che daranno i punti B_1 e C_1 tali, che nella figura $B_1\ D\ A\ C_1\ T$ si avrà:

$$\overline{CT_1} = 2\,\overline{B_1T_1} \qquad \text{eppero} \qquad \overline{DT_1}^3 = 2\,\overline{B_1T_1}^3$$

L'equazione della cubica luogo di M riferita al suo asse OG e al suo assintoto Oy è:

$$x^3 - 6\,rx^2 + 9\,r^2x + 3\,xy^2 - 4\,ry^2 - 4\,r^3 = o$$

V. — Soluzione di Apollonio. Questo famoso geometra aveva costrutto un apparecchio mediante il quale meccanicamente si poteva tracciare la curva che risolve il problema che si riferisce a questa costruzione, basata sempre sulla considerazione delle due medie proporzionali di Ippocrate.

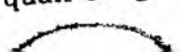
Si costruisca (fig. 471) un rettangolo $OADB$ coi lati:

$$OA = a \qquad\qquad OB = 2\,a$$

Dal punto medio C della sua diagonale si descriva un circolo tale che i due punti M, N nei quali il circolo sega i lati adiacenti OA, OB del rettangolo siano in linea retta col vertice D del rettangolo; si avrà allora:

$$\frac{OA}{BN} = \frac{BN}{AM} = \frac{AM}{OB}$$

Descriviamo dal centro C (punto medio della diagonale AB del rettangolo) un circolo qualunque; esso sega la OB in due punti P, Q i quali congiunti con D determinano sulla circon-



ferenza i punti R ed S; il luogo di questi punti, quando si fa variare il raggio del circolo è una cubica la cui equazione riferita ad OA, OB come assi delle x e delle y è:

$$x^3 - 3\,ax^2 + 3\,a^2x + y^2x - 2\,ayx - 2\,ay^2 + 6\,a^2y - 5\,a^3 = 0$$

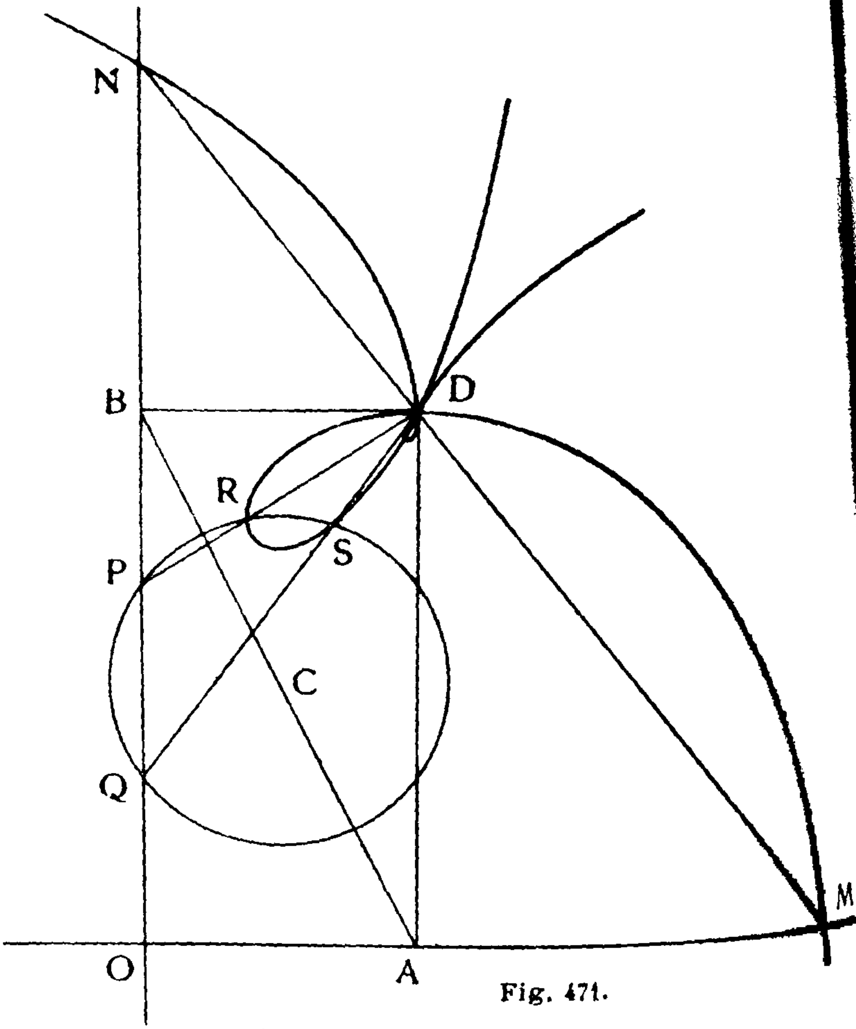


Fig. 471.

Essa sega l'asse Ox in M punto cercato. Una curva analoga che avrebbe determinato il punto N sull'asse Oy si sarebbe ottenuta considerando le intersezioni dei circoli variabili coll'asse Ox.

Osservazione. — Si è già veduto che si può sostituire $2a$ con $a\sqrt{2}$, nel qual caso risulterebbe:

$$AM = a\sqrt[3]{2}$$

con una curva dello stesso genere.

VI. — Soluzione di Diocle. — Sia un triangolo ABC rettangolo in A (fig. 472) i cui cateti siano:

$$AB = 2a \qquad\qquad AC = a$$

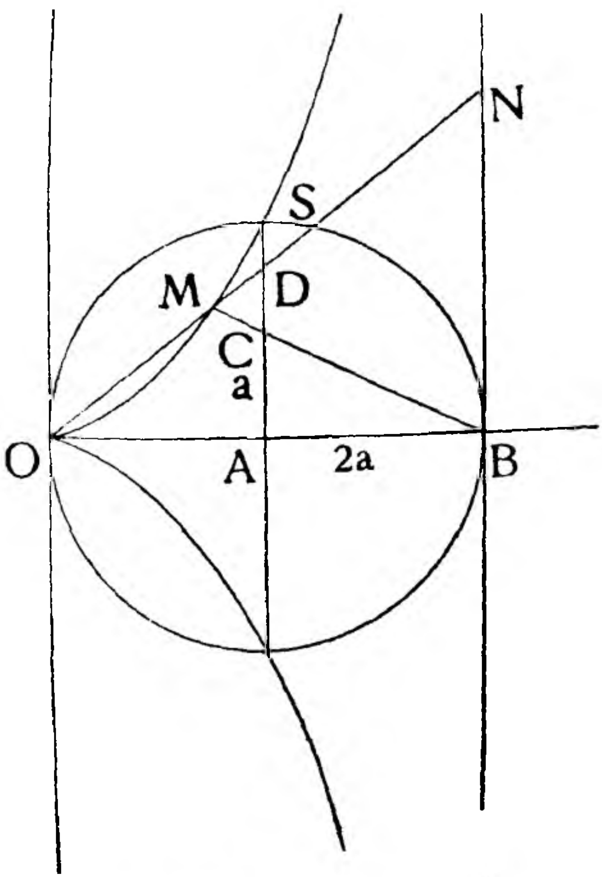


Fig. 472.

Si descriva da A come centro il circolo di raggio AB. La retta condotta dall'altro estremo O del diametro BAO in modo da avere uguali i segmenti DM, DS intercetti fra il prolungamento del cateto AC e il prolungamento dell'ipotenusa da un lato, e la circonferenza dall'altro, risolverebbe il problema poichè è facile dimostrare che si avrebbe:

$$\overline{AD}^3 = 4\,\overline{AC}^3$$

ossia $A\,D$ uguale alla seconda delle due medie proporzionali di Ippocrate:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2\,a} \qquad\qquad y^3 = 4\,a^3$$

Diocle osservò che, conducendo la tangente al circolo in B si ha $OM = SN$ quando $DM = DS$ e immaginò quindi la costruzione della cissoide che porta il suo nome, la cui intersezione con l'ipotenusa BC risolve il problema, poichè determina la direzione della OM che deve dare il punto D cercato.

La cissoide di Diocle può essere costrutta per punti senza far uso del compasso, ma solo della riga e della squadra come si è detto in altra parte (vedi pag. 353).

Tutte le cubiche si prestano alla soluzione del problema della duplicazione del cubo. Ne indicherò alcune tra quelle che lo risolvono con minore complicazione.

VII. — **Soluzione di Newton.** Sia $O\,M$ un segmento di retta dato ed A il suo punto di mezzo (fig. 473). Descrivasi il circolo di centro O e di raggio OA. Si porti da A in C un altro

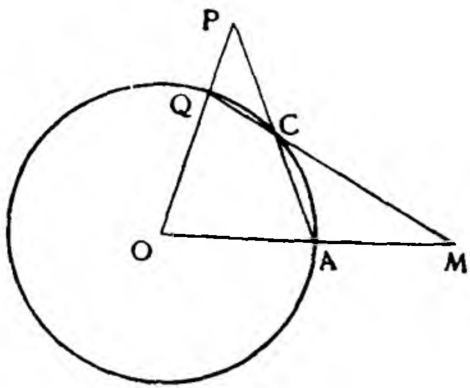


Fig. 473.

segmento dato e si unisca C con A e con M e si conduca per O una retta tale che, essendo P e Q i punti nei quali sega rispettivamente AC ed MC, risulti il segmento $PQ = OA$. Si avrà allora:

$$\frac{A\,C}{O\,Q} = \frac{O\,Q}{C\,P} = \frac{C\,P}{OM}$$

e i segmenti OQ, CP rappresenteranno le due medie proporzionali fra AC ed OM; basterà quindi che il segmento dato AC sia uguale ad OA, ossia:

$$OM = 2\,AC \qquad \text{perchè si abbia} \qquad OQ = AC\sqrt[3]{2}$$

VIII. – Soluzione di Huygens. Nella sua risposta a Kinner (1) del 9 Agosto 1653, Huygens fa conoscere il seguente procedimento per trovare due medie proporzionali fra due rette date:

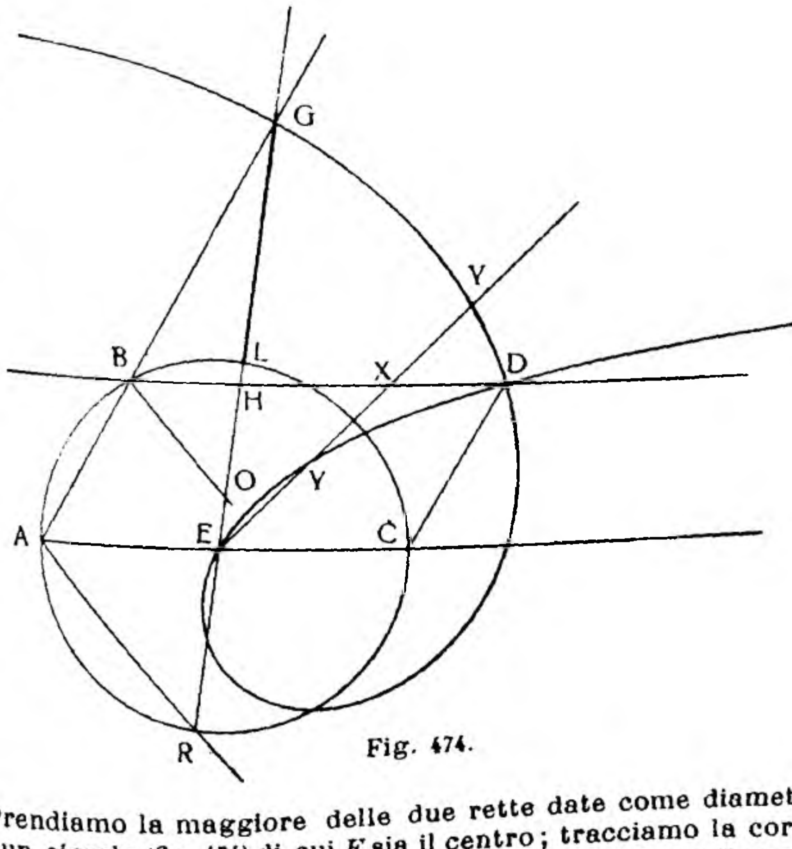


Fig. 474.

« Prendiamo la maggiore delle due rette date come diametro di un circolo (fig. 474) di cui E sia il centro; tracciamo la corda AB uguale alla minore di queste rette; completiamo il parallelogramma $ACBD$ e conduciamo pel punto E una retta tale che, se G, H, L sono le sue intersezioni con le rette AB, BD

(1) V. Trisezione dell'angolo a pag. 460, N. XII.

e coll'arco BC_1 si abbia $HD = HG$; allora BG e GL saranno le due medie cercate ».

Conduciamo BO parallela ad AR, essendo R l'estremità del diametro LE. Essendo i triangoli BOH, ARE simili e $AE = ER$ si ha pure $BH = HO$. Per costruzione si ha poi $HG = HD$; dunque $OG = BD = CA = RL$; se da una parte e dall'altra, nell'eguaglianza $GO = RL$ si sottrae OL si ottiene $GL = OR$.

Ora si ha:

$$GR \cdot GL = GA \cdot GB$$

dunque:

$$\frac{GR}{GA} = \frac{GB}{GL}$$

Poi, essendo simili i triangoli BGO, AGR, si ottiene:

$$\frac{RG}{GA} = \frac{OG}{GB} = \frac{RG - OG}{GA - GB} = \frac{OR}{AB} = \frac{GL}{AB}$$

Ne segue che:

$$\frac{GB}{GL} = \frac{OG}{GB} = \frac{GL}{AB}$$

e siccome $OG = AC$:

$$\frac{AC}{BG} = \frac{BG}{GL} = \frac{GL}{AB}$$

Ciò posto, per tracciare la trasversale ausiliaria EG, basta determinare G. A tale uopo, si può determinare l'intersezione G della retta AB col luogo che si ottiene nel modo seguente. Su ciascuna retta condotta per E e segante BD in X si prende $XY = XD$. Ora questo luogo è, per definizione, la strofoide corrispondente all'angolo EDB (vedi pag. 460-462).

IX. — Soluzione di Longchamps. Consideriamo due rette ortogonali Px, Pm e un punto fisso O su Px (fig. 475). Conduciamo da O una retta qualunque che segherà in A la Pm; conduciamo AB perpendicolare ad AO; da B ove sega Px conduciamo la perpendicolare a Px fino ad intersecare in M la OA. Il luogo di M è una cubica la cui equazione in coordinate polari è:

$$\rho = \frac{a}{\cos^3 \omega} \qquad \left(PM = \rho \qquad PO = a \qquad P\widehat{O}A = \omega\right)$$

e in coordinate cartesiane:

$$x^3 = a\,(x^2 + y^2)$$

Se dal punto O come centro descriviamo, con raggio uguale ad $a\sqrt{2}$, un arco di circolo, che sega la cubica in N, si avrà:

$$OC = x^3 = a\left(a\sqrt{2}\right)^2 \qquad \text{ossia} \qquad x^3 = 2\,a^3$$

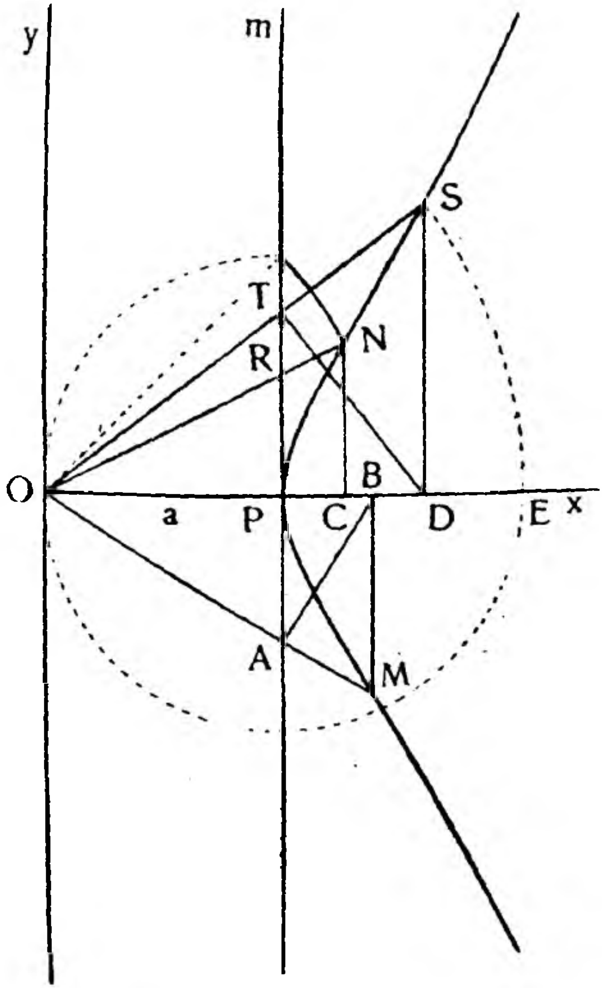


Fig. 475.

Si otterrebbe lo stesso risultato segando la cubica in S con un circolo di centro O e di raggio $2\,a$; conducendo OS si avrebbe:

$$OT = a\sqrt[3]{2} \qquad \text{mentre l'ordinata di } S \text{ sarebbe} \qquad \overline{SD} = a\sqrt[3]{4}$$

Risulta infatti nella prima costruzione:

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OR}} = \frac{\overline{OR}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OP}\sqrt{2}}$$

dalla quale:

$$\overline{OC}^3 = 2\,\overline{OP}^3$$

e nella seconda:

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OD}}{2\,\overline{OP}}$$

da cui si deduce:

$$\overline{OT}^3 = 2\,\overline{OP}^3$$

X. — Nella fig. 469 (pag. 531) possiamo considerare come fisse le rette ortogonali AC, BD, facendo $OD = a$ e $OA = 2a$. Se

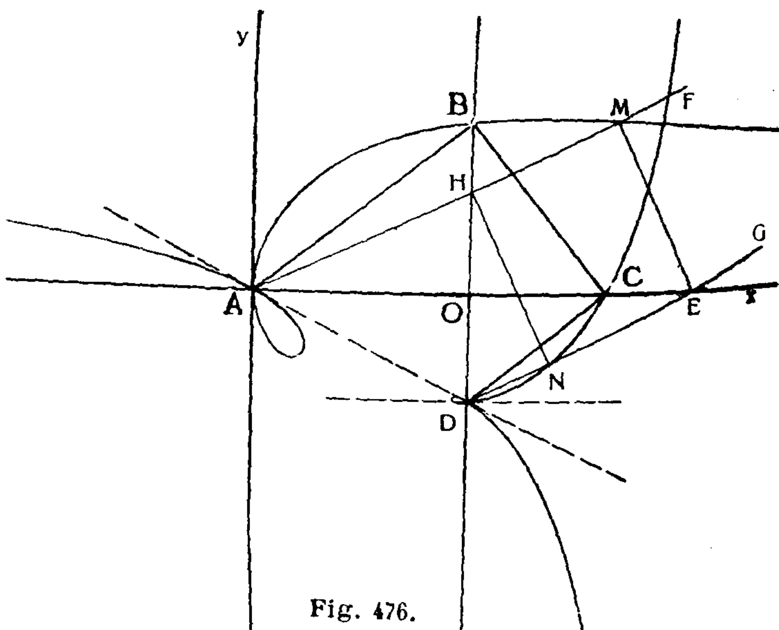


Fig. 476.

allora conduciamo per A (fig. 476) e per D due parallele AF, DG e dal punto E in cui la DG sega la OA conduciamo la perpendicolare alla AF, il luogo del punto M intersezione di questa perpendicolare con la AF sarà una cubica la cui equazione è, in coordinate polari (polo A):

$$\rho = a \frac{\cos \omega}{\operatorname{sen} \omega} (\cos \omega + 2 \operatorname{sen} \omega)$$

e in coordinate cartesiane (assi Ox, Oy):

$$y^3 + (x - 2a)\, xy - ax^2 = o$$

e riferita agli assi OC, OB:

$$y^3 + (x + 2a)\, xy - a\,(x + 2a)^2 = o$$

Questa cubica sega la OD in un punto B la cui ordinata è:

$$y = a \sqrt[3]{4}$$

per modo che costruendo la figura $OABCD$ si ottiene:

$$\overline{OC}^3 = 2\, \overline{OD}^3$$

Se invece del luogo del punto M si considera quello del punto N ottenuto abbassando da H, punto nel quale la AF sega OD, la perpendicolare su DG, che è una cubica simile alla precedente, si ha il punto C, che risolve il problema, dalla sua intersezione con la OA. L'equazione di quest'altra cubica, riferita agli assi OE, OB è:

$$x^3 + (y + a)\, xy - 2a\,(y + a)^2 = o$$

Osservazioni:

1. — La cubica duplicatrice qui considerata è la curva detta *ofluride* (1). Essa è la pedale della parabola $y^2 = 2ax$ rispetto al punto (o, a); in generale, la pedale d'una parabola rispetto ad un punto della tangente nel vertice è una ofluride e, in particolare, una cissoide quando detto punto è il vertice stesso della parabola.

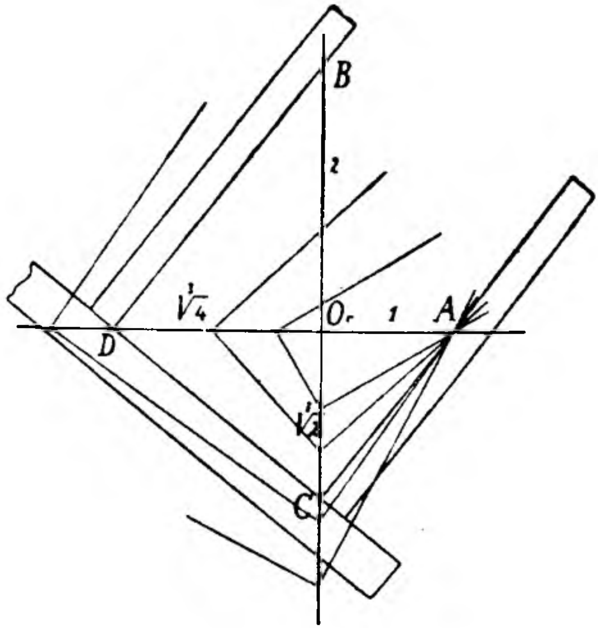
2. — I segmenti come OE, OH determinati sulle OA, OD dalle coppie di parallele uscenti da D ed A, sono le coordinate dell'iperbola equilatera $xy = 2a^2$ già considerata precedentemente (vedi pag. 526).

---

(1) Da ὄφις serpente e οὐρά coda.

3\. — La ricerca dei punti d'intersezione C, D (fig. 477) coi due assi ortogonali può farsi *meccanicamente* mediante una doppia squadra a lati scorrevoli; fissati i punti A e B facendo $OA = 1$ e $OB = 2$ si fa passare costantemente il lato AC per

Fig. 477.



A spostando gli altri due fino ad ottenere la posizione $ACDB$ della doppia squadra. Si può anche sostituire alle due *righe* AC, BD due *squadre* che si fanno scorrere appoggiandole sulla *riga* CD.

XI. — Soluzioni dell' Autore. Darò ora alcune costruzioni mie, le quali non hanno però rispetto alle altre indicate alcun merito particolare, non essendo che esempii dei tanti modi nei quali può esser risolto il problema di Delo.

La fig. 469 a pag. 531 che esprime geometricamente la relazione:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

si può comporla anzichè con tre triangoli rettangoli, con tre triangoli simili qualunque; se all'angolo retto si sostituisce l'angolo di 120°, la OD coincide con la OA e possiamo allora risolvere il problema nel seguente modo (fig. 478).

Consideriamo tre assi OC, OD, ON a 120°. Facciamo:

Se conduciamo per A una retta qualunque AC e dal punto C una retta CD ad angolo di 60° con AC, e da D un'altra retta DN ad angolo di 60° con CD, avremo in CDM un triangolo equilatero. I tre triangoli AOC, OCD, ODN come equiangoli, danno:

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OC}{OD} = \frac{OD}{ON}$$

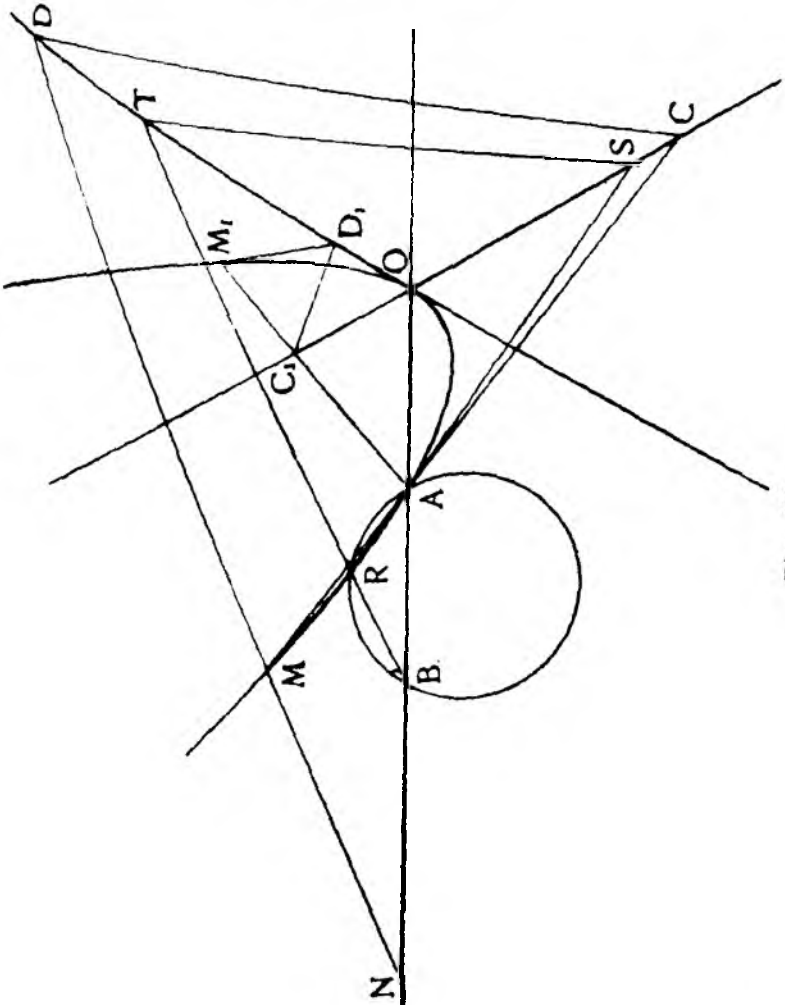


Fig. 478.

Quando AC fosse tale da avere $ON = OB = 2a$ il segmento OC risulterebbe lato del cubo doppio di quello di lato $OA = a$. Il luogo geometrico di M è una parabola tangente in O alla OD

e in A alla perpendicolare a OD. Osservo ora che l'angolo NMA essendo di 120°, se costruisco su AB come corda, l'arco di circolo capace di tale angolo, l'intersezione R di quest'arco con la parabola darà la soluzione del problema.

Osservazioni :

a) Il luogo geometrico dei centri dei triangoli equilateri CDM, $C_1 D_1 M_1$, STR . . . . . è la perpendicolare in O alla OB.

b) È evidente che il problema rinviene a quest'altro: Dati tre assi OC, OD, ON a 120° ed un segmento di circolo ARB capace dell'angolo di 120° (A, B essendo punti dell'asse ON) costruire il triangolo equilatero i cui vertici giacciono sui due assi OC, OD e sull'arco ARB, e due lati adiacenti del quale passano per A e B.

XII. — Consideriamo ancora, come nella figura precedente, tre assi BN, BM, BA a 120° e due segmenti $BO = OM = a$ (fig. 479). Da O conduciamo una retta qualunque OP che sega BN in P e l'arco di circolo V (descritto su OM come corda e capace dell'angolo di 120°) in E; da P conduciamo la PQ a 60° con OP e da E la EO parimente a 60° con OP, che passerà perciò per M. Il triangolo equilatero PEQ descriverà col suo vertice variabile Q una cubica la cui intersezione F con l'asse BA risolverà il problema, poichè si avrà allora il triangolo equilatero LVF per il quale si verifica :

$$\frac{OB}{UB} = \frac{UB}{BF} = \frac{BF}{BM}$$

ossia :

$$UB = OB \sqrt[3]{2} = a \sqrt[3]{2}$$

XIII. — La cubica di cui nella soluzione precedente si può considerare generata in altra maniera epperò si presta alla soluzione del problema sotto altro punto di vista.

Abbiasi un triangolo equilatero ABC (fig. 479). Descriviamo su di un lato di esso, BC, un segmento di circolo capace dell'angolo di 120°. Dal punto M, simmetrico di A rispetto a BC conduciamo una retta qualunque MT che segherà in S il circolo, in D il lato AB del triangolo, e in T il lato AC.

I triangoli DSB, SBC, SCT sono equiangoli e si ha quindi:

$$\frac{DS}{SB} = \frac{SB}{SC} = \frac{SC}{ST}$$

Il problema sarebbe dunque risolto se la MS fosse tale da avere $ST = 2\,DS$ ossia $DS = DT$. Il luogo del punto medio R del segmento ST compreso fra la tangente CAT e il circolo,

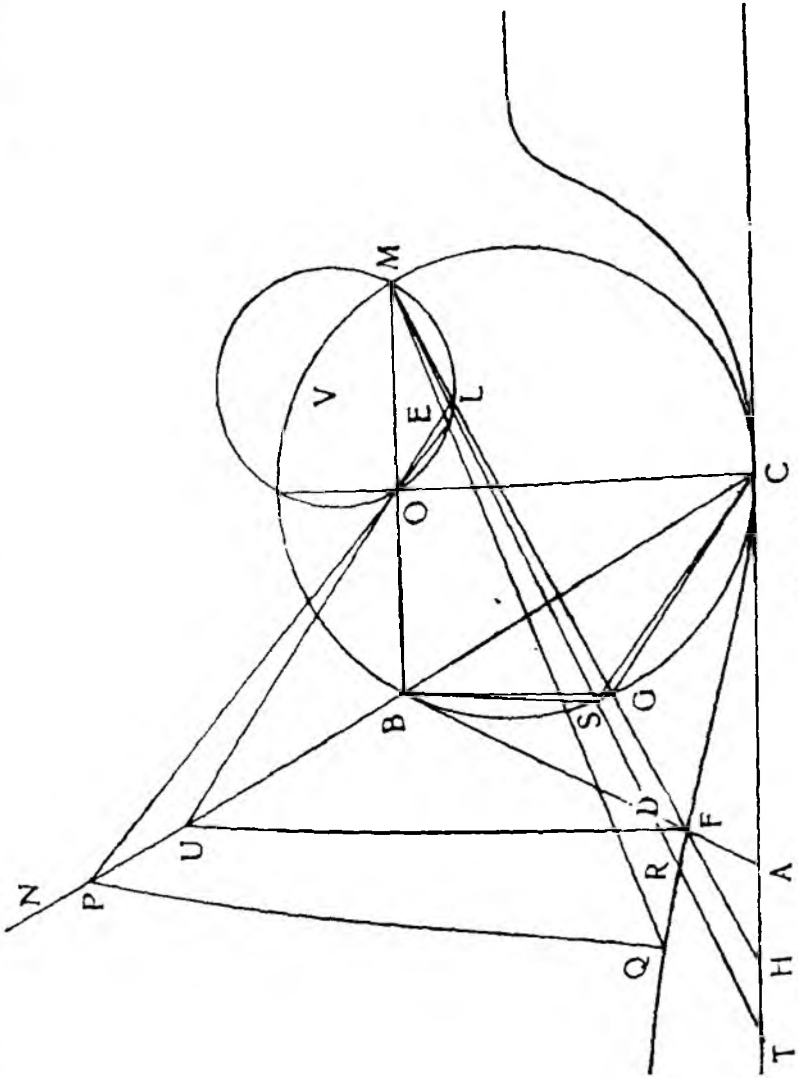


Fig. 479.

segherà perciò il lato AB del triangolo equilatero nel punto F per il quale si avrà:

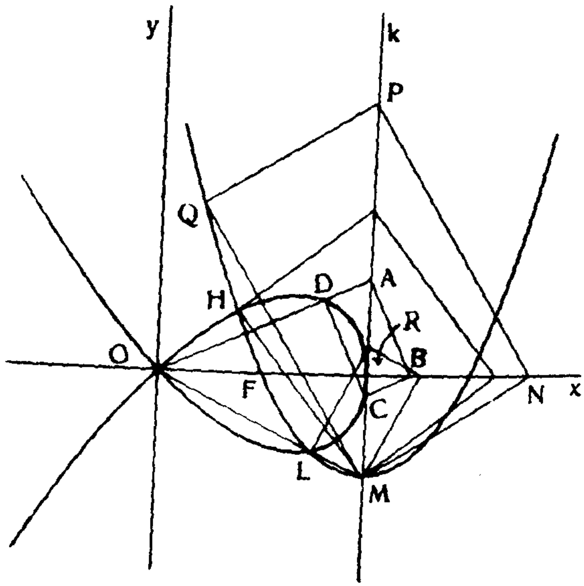
$$BG = FG\sqrt[3]{2}$$

Tale luogo è appunto la cubica di cui nella soluzione precedente.

XIV. — Il *folio parabolico retto* è una cubica unicursale con una sola direzione assintotica; è una curva *retta* ossia simmetrica le cui tangenti al nodo sono ortogonali (fig. 480).

Essa si ottiene a questo modo. Siano due rette ortogonali Ox, Oy ed una retta k parallela ad Oy alla distanza $OR = 2a$. Conduciamo per O una retta qualunque m che segherà k in A; da A la perpendicolare n alla m che segherà in B la Ox; da

Fig. 480.



B la perpendicolare p alla n che segherà la k in C, e da C la parallela q alla n che segherà la m in D. Il folio parabolico retto è il luogo del punto D. La sua equazione riferita agli assi Ox, Oy è:

$$x^3 = 2a(x^2 - y^2)$$

Si può osservare che quando fosse $RC = a$ risulterebbe:

$$RB = RC\sqrt[3]{2}$$

Ora, prendendo $RM = a$ e costruendo dei rettangoli $PNMQ$, alla maniera di $ABCD$, con un vertice fisso in M, e determinando il luogo geometrico del quarto vertice Q, l'intersezione di tale luogo col *folio* ci dà appunto:

$$RS = RM\sqrt[3]{2}$$

Il luogo geometrico di Q è una parabola che ha per asse k e per vertice M. Essa passa per F, punto medio di OR; la sua equazione riferita agli assi Ox, Oy è:

$$x^2 - 4ax - ay + 3a^2 = o$$

L'altro punto d'intersezione delle due curve appartiene alla retta OM ed ha per ascissa:

$$x = \frac{3}{2} a$$

XV. – Abbiansi su due assi ortogonali Ox, Oy i punti M ed N tali che $OM = 2a$, $ON = a$ (fig. 481). Le coppie di parallele condotte per M ed N determinano i punti B, A sugli assi

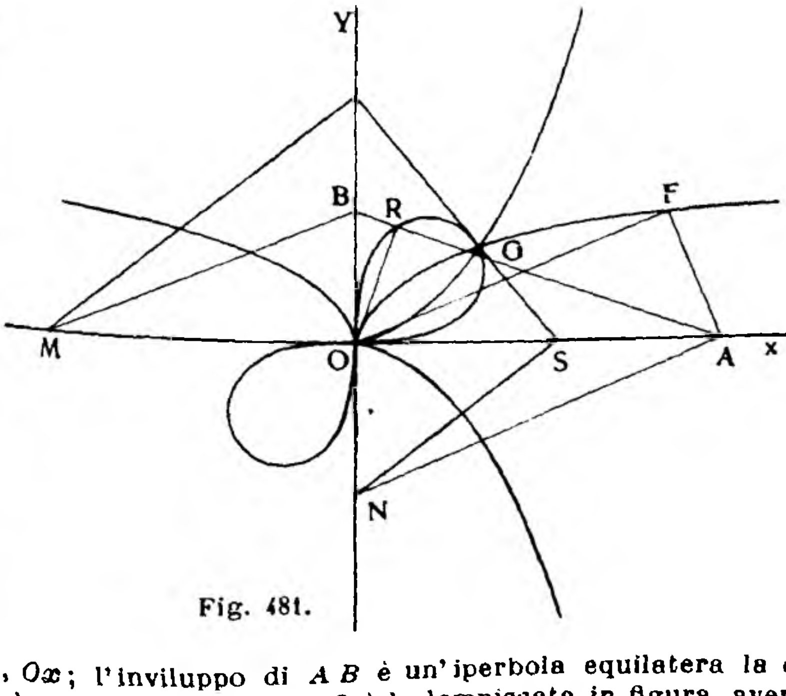


Fig. 481.

Oy, Ox; l'inviluppo di AB è un'iperbola equilatera la cui pedale rispetto al centro O è la lemniscata in figura, avente per equazione:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$$

Quando nella figura $MBANO$ fossero retti gli angoli MBA, BAN, si avrebbe $\overline{OA}^3 = 2a^3$ e vi corrisponderebbe un punto G della lemniscata per il quale OG sarebbe parallela ad MB e NA.

Consideriamo ora il luogo dei punti F ottenuti conducendo da N una retta qualunque, che sega Ox in A; da A una perpendicolare alla NA e da O una parallela alla stessa NA. L'equazione di questa cubica è:

$$x^2 + y^2 = \frac{a\,x^3}{y}$$

e l'intersezione delle due curve ha per coordinate X ed Y fra le quali corre la relazione:

$$\frac{X}{Y} = \sqrt[3]{2}$$

Siccome abbiamo dai triangoli OFS, OAN:

$$\frac{x}{y} = \frac{OS}{a} \qquad \text{risulta} \qquad \overline{OS} = a\sqrt[3]{2}$$

Certo non è questo uno dei più semplici modi di risolvere il problema della duplicazione del cubo, cioè mediante l'intersezione d'una cubica con una quartica, mentre abbiamo la possibilità di risolverlo mediante l'intersezione di un circolo con una conica o di due coniche tra loro o di una retta con una cubica, ecc., come abbiamo veduto.

XVI. — Consideriamo un circolo OA di raggio r. Un circolo qualunque BC di centro O segherà in B il diametro OA e in C la circonferenza OA; se descriviamo su OB come diametro un altro circolo, la corda OC lo segherà in un punto M il cui luogo è la curva rappresentata nella fig. 482, la cui equazione, riferita al diametro OA del circolo e alla tangente ad esso in O, è:

$$(x^2 + y^2)^3 = 4\,r^2\,x^4$$

Se ora conduciamo la retta ε la cui equazione è:

$$x = \frac{r}{2}$$

essa segherà il luogo di M in un punto M_1 tale che si avrà:

$$\overline{OM_1}^3 = 2\,a^3$$

essendo a il raggio del circolo variabile OB, quando OC passa per M_1.

Infatti per la similitudine dei triangoli NOM_1 , M_1OB_1 , C_1OA, si ha:

$$\frac{ON}{OM_1} = \frac{OM_1}{OB_1} = \frac{OC_1}{OA}$$

essendo $OB_1 = OC_1$. Se ne deduce quindi:

$$\overline{OM_1}^2 = \overline{ON} \cdot \overline{OB_1} = \frac{r}{2} \times 2a = ar \qquad (1)$$

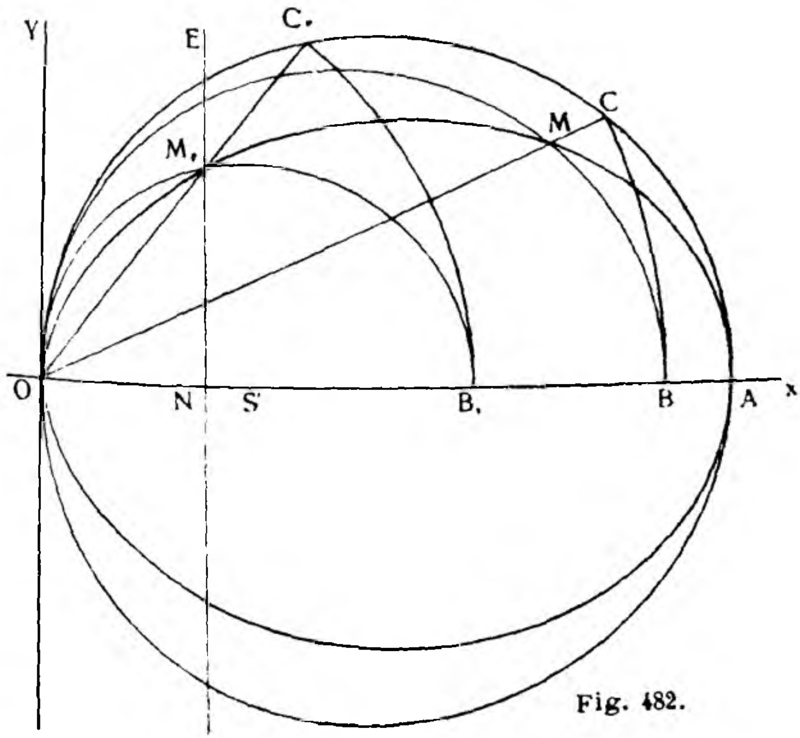


Fig. 482.

$$OA = \frac{OB_1 \times OC_1}{OM_1} = \frac{4a^2}{OM_1} \qquad r = \frac{2a^2}{OM_1}$$

e sostituendo nella (1):

$$\overline{OM_1}^2 = \frac{2a^3}{OM_1} \qquad \text{ossia} \qquad \overline{OM_1}^3 = 2a^3$$

La curva luogo di M è un *ovale*. La sua equazione in coordinate polari (polo O) è:

$$\rho = 2r\cos^3\omega$$

Soluzioni con curve diverse.

I. — **Col folio doppio retto.** Consideriamo la fig. 483. Se risultasse:

$$CM = \frac{OA}{2} \qquad \text{si avrebbe} \qquad \frac{CM}{CO} = \frac{CO}{OB} = \frac{OB}{OA}$$

ossia:

$$\overline{CO}^3 = 2\,\overline{CM}^3 = 2\left(\frac{OA}{2}\right)^3$$

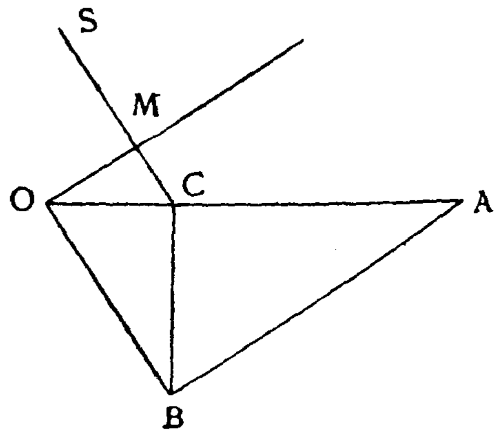


Fig. 483.

Per avere dunque la soluzione del problema della duplicazione del cubo basterebbe ottenere l'intersezione del *folio* col luogo del punto S ottenuto portando su CM il segmento:

$$CS = \frac{OA}{2}$$

II. — Considerando la fig. 484 si osserva che:

$$\frac{BM}{BC} = \frac{BC}{BO} = \frac{BO}{OA}$$

Quindi si avrebbe:

$$\overline{BC}^3 = 2\,\overline{BM}^3 = 2\left(\frac{OA}{2}\right)^3$$

quando risultasse:

$$BM = \frac{OA}{2}$$

Ora, se consideriamo l'angolo retto OBA variabile, come iscritto nella semi-circonferenza di diametro OA, il luogo di M è la concoide di tale circonferenza rispetto al punto O con la costante uguale ad $\frac{OA}{2}$ raggio del circolo, che come è noto è una *chiocciola di Pascal.* La sua intersezione col *folio doppio retto* risolve dunque il problema della duplicazione del cubo.

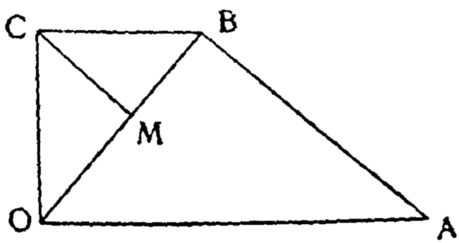


Fig. 484.

III. — **Soluzione di Archita.** Verso il 400 A. C. Archita diede una delle prime soluzioni del problema, che se è molto ingegnosa non è certamente altrettanto semplice, come si può vedere (fig. 485).

Abbiasi un cilindro la cui proiezione orizzontale è $S_1 P_1 O_1$ e la verticale $ASOB$. Consideriamo il toro generato dal circolo di diametro SO rotante in un piano verticale attorno alla generatrice SA del cilindro come asse. La superficie di questo toro segherà quella del cilindro secondo una curva della quale in figura è tracciato il tratto OPS.

Un cono di rivoluzione di vertice S e di asse SO, la cui generatrice formi coll'asse angolo di 60° segherà il cilindro secondo una curva della quale in figura è tracciata la parte RPV. Questa curva sega quella d'intersezione del cilindro col toro, in quattro punti simmetrici, uno dei quali è PP_1. Ora il segmento $S_1 P_1$ sta ad $S_1 M_1$ raggio del cilindro nel rapporto di:

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{1}$$

Quindi $S_1 P_1$ è il lato del cubo di volume doppio del cubo di lato $S_1 M_1$.

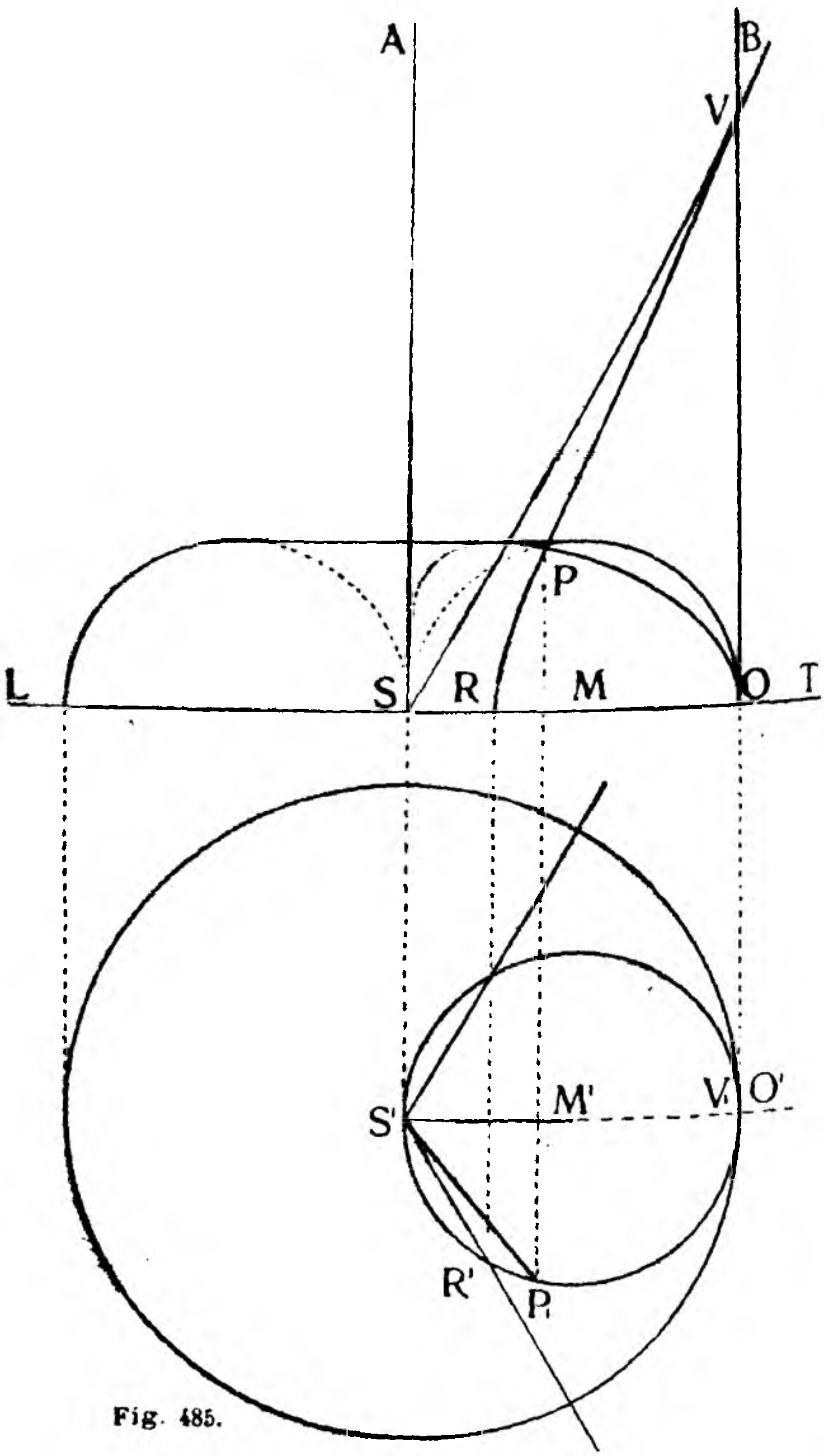


Fig. 485.

La dimostrazione data da Archida è puramente geometrica. Si può più brevemente dare una dimostrazione analitica. La equazione di coordinate polari della superficie del toro è:

$$r = 2\,a \text{ sen } \theta$$

prendendo per asse delle x il diametro SO e per asse delle z la generatrice SA del cilindro, e indicando con a il raggio SM del cilindro. L'equazione della superficie cilindrica sarà:

$$r \text{ sen } \theta = 2\,a \cos \varphi$$

e quella della superficie laterale del cono:

$$\text{sen } \theta \cos \varphi = \frac{1}{2}$$

Queste tre superfici si segano in un punto tale che:

$$\text{sen}^3 \theta = \frac{1}{2} \qquad \text{da cui si deduce} \qquad (r \text{ sen } \theta)^3 = 2\,a^3$$

Dunque il cubo il cui lato è r sen θ ha volume doppio di quello che ha per lato a.

Soluzioni approssimate.

Passiamo ora a considerare alcune costruzioni approssimate e meccaniche del problema.

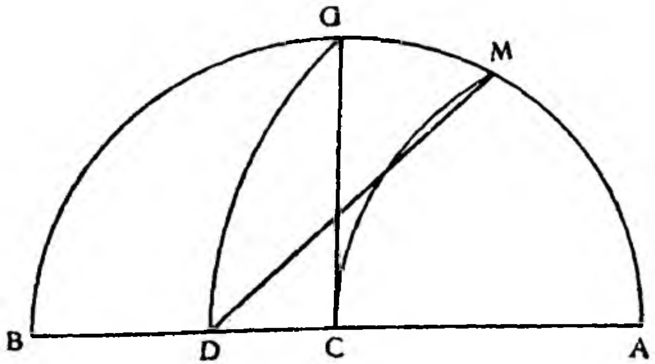


Fig. 486.

I. **Costruzione Péraux.** Abbiasi la sem circonferenza di raggio $AC = 1$ (fig. 486). Si porti sul diametro:

$$AD = AG = \sqrt{2}$$

e si segni in M l'arco $AM = 60^\circ$. Si avrà:

$$DM = \sqrt{3 - \sqrt{2}}$$

il cui valore è $DM = 1{,}25928012$ mentre quello del lato del cubo doppio del cubo di lato $AC = 1$ sarebbe:

$$l = \sqrt[3]{2} = 1{,}25992105$$

Si ha quindi per DM una differenza in meno di 0,00064093.

II. — Col compasso (1). Sia $OA = 1$ la costola del dato cubo (fig. 487). Trovato M, vertice del quadrato iscritto, si descriva la circonferenza $M\,(MO)$ che taglierà l'arco AB in N, la cui

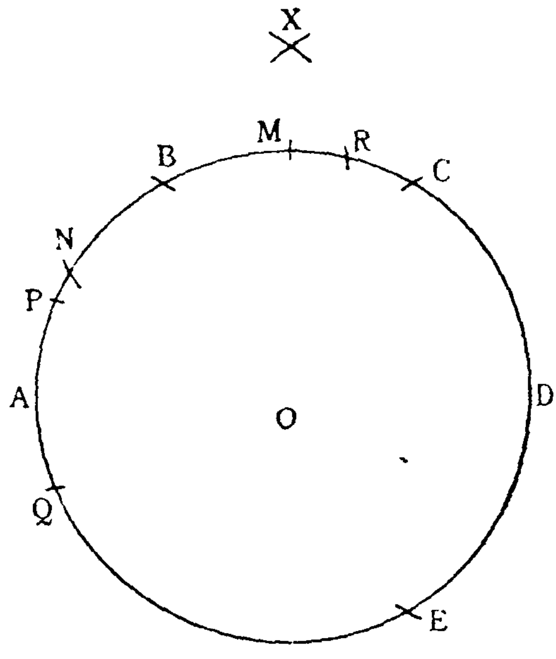


Fig. 487.

distanza da X rappresenta la costola del cubo doppio del dato, con un errore in difetto che non raggiunge 0,0007. Difatti, l'arco AN che è la dodicesima parte della circonferenza, è

(1) *Enriques*. Questioni di Geometria elementare, pag. 269.

di 30°; sostituendolo nella formola (4) in luogo dell'arco α, si ha per l'arco β, la cui corda è NX:

$$\beta = 78^\circ\ 2'\ \frac{2358}{2846}$$

ed in conseguenza:

$$NX = 2 \text{ sen } 39^\circ\ 1'\ \frac{1179}{2846} = 1{,}2592800$$

mentre $\sqrt[3]{2} = 1{,}2599209$. La differenza è dunque circa 0,00064.

III. — Soluzione meccanica. Il congegno di Silvester di cui si è fatto cenno a pag. 250 fornisce come si è veduto l'equazione:

$$b^2 \cdot \overline{OA}^3 + a^2(a^2 - b^2)\,\overline{OA} = a^4 \cdot \overline{OD}$$

Se in essa facciamo $b = a$ diventa:

$$a^2 \cdot \overline{OD} = \overline{OA}^3$$

e quindi lo strumento può servire a risolvere meccanicamente il problema di Delo.

CURIOSITÀ GEOMETRICHE

La geometria delle api.

Come è noto, le cellule delle api sono prismi cavi, di cera, a perimetro esagonale regolare, riuniti per le basi in modo da costituire i favi, sulle facce opposte dei quali vengono pertanto a trovarsi le aperture delle cellule stesse. Ma le cellule non sono esattamente opposte, poichè all'*asse* dell'una corrisponde dal lato opposto del favo la costola comune a tre cellule (fig. 488).

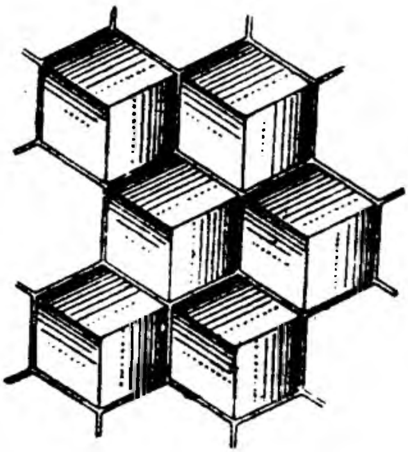


Fig. 488.

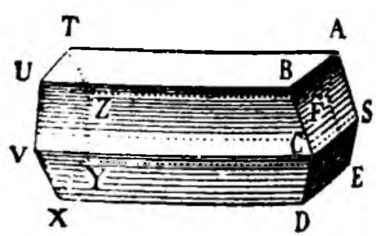


Fig. 489.

Il fondo poi non è un piano perpendicolare alle costole delle cellule; esso è invece costituito per ognuna di esse da tre losanghe uguali formanti una superficie concava. Si può dire che ogni prisma termina con una piramide regolare a tre facce, il cui vertice S è il triedro formato da tre dei vertici delle losanghe.

La cera delle pareti e dei fondi delle cellule ha appena lo spessore d'un sottile foglio di carta, rinforzato però sugli orli.

Queste disposizioni, che possono ben dirsi la *geometria* delle api, hanno dei vantaggi dei quali ci possiamo fare una esatta idea solamente con un profondo studio, nel quale la nostra mente attonita troverà larga ragione di meraviglia.

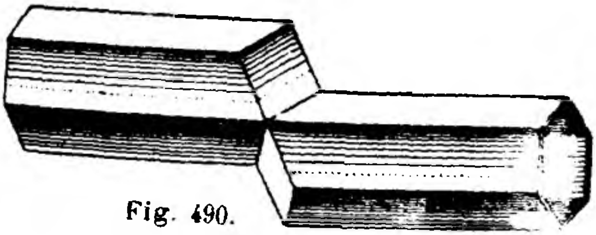


Fig. 490.

Dato lo scopo pel quale le api costruiscono le loro cellule ordinarie (qui non si tratta di quelle speciali per regine) che è specialmente quello di allogarvi le loro larve le quali hanno forma grossolanamente cilindrica, erano da escludersi il triangolo equilatero e il quadrato che avrebbero fatto perdere troppo spazio negli angoli tra le facce del prisma; la forma esagonale, la sola restante tra quelle dei poligoni regolari riunibili senza vani per coprire il piano è quella che meglio si presta allo scopo, per i suoi angoli ottusi; il prisma esagonale si approssima infatti abbastanza al *cilindro*.

È poi noto che lo scopo precipuo dell'ape nella costruzione dei favi è il *risparmio di cera*; tanto vero che in apicoltura razionale si preparano favi *artificiali* fatti a macchina, con cera d'api, di forme identiche a quelle dei favi naturali, e si ottiene così dalle api una quantità di miele ben maggiore, trovandosi esse alleggerite dal peso della costruzione dei favi.

Dal lato del risparmio di cera le api conseguono un primo vantaggio col rendere comune il fondo alle due serie di cellule opposte; un altro consiste nell'addossamento delle cellule per modo che una loro parete serve per due cellule, salvo che in quelle perimetrali del favo; e un'altro ancora nell'essere l'esagono, fra i tre poligoni regolari di cui sopra, quello che per una determinata superficie offre il minor perimetro, cosicchè l'ape con un *minimo* di superficie *laterale* ottiene già un *massimo* di capienza; ma dove l'istinto delle api assurge al meraviglioso si è nella forma del fondo, rispondente essa pure ad un minimo di superficie e quindi di cera; nè si può dire che la forma delle losanghe del fondo sia quello della teoria, *solo per approssimazione*, chè gli angoli corrispondono a quelli della figura teorica, *con perfetta esattezza*. E il problema di *minimo* risolto così dalle api non è certo dei più semplici.

Un nipote d'un Cassini, Maraldi, astronomo egli pure all'osservatorio di Parigi misurò con esattezza, nel 1712 l'angolo delle losanghe delle cellule delle api e trovò 109° 28′ (supple-

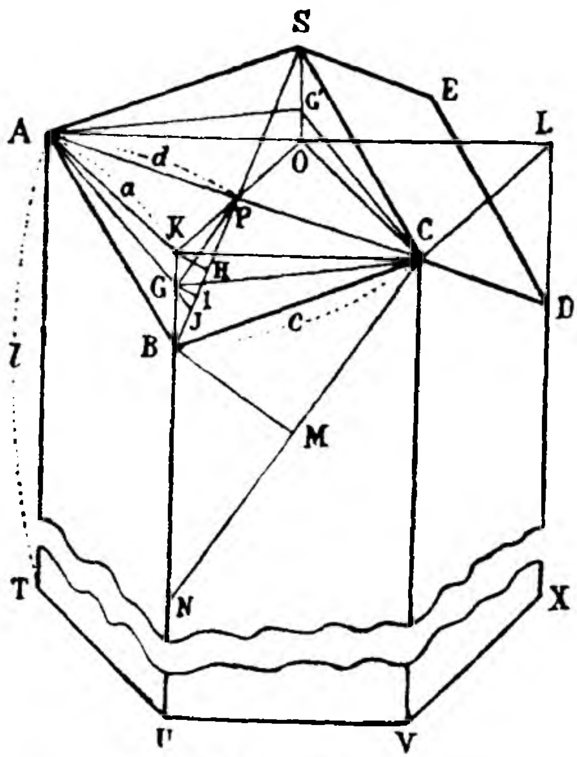


Fig. 491.

mento 70° 32′). Réaumur, che ben si apponeva pensando che la forma prescelta dalle api dovesse corrispondere ad un criterio di economia di cera, propose al matematico tedesco Kœnig, senza fargli note le misure del Maraldi, la soluzione di questo problema: « *Fra tutte le cellule esagonali a fondo, composte di tre rombi uguali, determinare quella che può essere costrutta col minimo di materia* ». E Kœnig mediante il calcolo differenziale trovò nel 1739 che gli angoli della cella di minima superficie debbono misurare 109° 26′ e 70° 34′.

Si aveva così una sorprendente concordanza con le misure del Maraldi; ma nel 1743 l'inglese Maclaurin provò che il Kœnig aveva commesso un errore nei suoi calcoli e che i veri valori degli angoli erano *esattamente quelli indicati dal Maraldi.* E i risultati del Maclaurin vennero poi confermati da Lhuillier (1781), Lalanne (1840), Brougham (1848), Hennessy (1885-86).

Esporrò ora il calcolo *geometrico* del Maclaurin.

Sia S il vertice comune (fig. 491) delle tre losanghe di lato c che formano il fondo della cellula. Sia l'esagono regolare AK CL .... di lato a la sezione retta del prisma, condotta per il vertice A d'una losanga; il suo centro O sarà la proiezione del vertice S sul piano della sezione. Tracciamo AC, KO e per AC conduciamo un piano qualunque che determinerà, intersecando i piani CSO, ASO, $TABU$, $UBCV$ una losanga $AG'CG$; sia l la costola AT del prisma e d la semi-diagonale AP.

Considerando solamente un terzo dell'alveolo, cerchiamo a quale posizione del piano $AG'CG$ corrisponda il minimo della superficie formata dai trapezi $TAGU$, $UGCV$ e dalla losanga $AG'CG$, ossia di:

$$(l + GU)\,a + 2\,d \times GP = (l + l - GK)\,a + \\ + 2\,d \times GP = 2\,la - a \times GK + 2\,d \times GP$$

Essendo costante il prodotto $2\,la$, tutto si riduce a trovare il minimo dell'espressione:

$$2\,d \times GP - a \times GK \tag{1}$$

Supponiamo che B sia stato preso su KU in guisa da avere:

$$\frac{BK}{BP} = \frac{a}{2\,d} \tag{2}$$

Da P come centro, con raggio PG, descriviamo nel piano BKP un arco di circolo che incontri PB ed il suo prolungamento in J, e conduciamo KH e GI perpendicolari a PB. Dai triangoli simili rettangoli GIB KHB, BKP e dalla (2) si ricava:

$$\frac{BI}{BG} = \frac{BH}{BK} = \frac{BK}{BP} = \frac{a}{2\,d}$$

da cui:

$$\frac{BH - BI}{BK - BG} \qquad \text{ossia} \qquad \frac{IH}{GH} = \frac{a}{2\,d}$$

$$a \times GK = 2\,d \times IH$$

L'espressione (1) può dunque scriversi

$$2\,d \times GP - 2\,d \times IH = 2\,d\,(GP - IH) = 2\,d\,(JI + HP)$$

Ma d e HP essendo costanti, basterà cercare quale è il minimo di JI. Esso ha luogo per $JI = o$ vale a dire quando i punti JI si confondono, cioè quando G si trova in B. Sicchè il *minimo cercato corrisponde all'ipotesi in cui il piano segante passi pel punto B determinato mediante la relazione* (2); posizione che corrisponde appunto a quella delle celle delle api.

— Passiamo ora alla determinazione degli angoli delle losanghe. Dal triangolo rettangolo BKP abbiamo:

$$\overline{BP}^2 = \overline{BK}^2 + \overline{KP}^2$$

Sostituendo BK col suo valore $BP\,\frac{a}{2\,d}$ dedotto dalla (2), KP con $\frac{a}{2}$, e semplificando, si trova:

$$BP^2 = \frac{a\,d}{\sqrt{2\,d^2 - a^2}}$$

ed essendo $AP = d$:

$$\frac{AP}{BP} = \frac{\sqrt{4\,d^2 - a^2}}{a}$$

Ma d è la metà del lato AC del triangolo equilatero iscritto nel circolo di raggio a; cosicchè il suo valore è:

$$\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Dunque il rapporto precedente, fatte le riduzioni diviene:

$$\frac{AP}{BP} = \sqrt{2}$$

La diagonale maggiore d'una delle losanghe del fondo è quindi la diagonale del quadrato costrutto sulla minore la quale è espressa da:

$$\frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Il rapporto $\frac{AP}{BP}$ è poi la tangente trigonometrica dell'angolo $A\,B\,P$.

Ora, $\sqrt{2}$ corrisponde alla tangente dell'angolo di 54° 44′ 8″, da cui $A\widehat{B}C = 109° 28' 16''$ e il suo supplemento $B\widehat{C}S = 70° 31' 44''$. — Calcoliamo ora quale economia realizzano le api con la forma alla quale hanno dato la preferenza per i loro alveoli. Indicando con a il lato della sezione retta comune alla cellula a fondo piatto e a quella a fondo cuspidato, la lunghezza della costola è $\frac{25}{6}\,a$. Le superfici totali della cellula a fondo cuspidato e di quella a fondo piatto sono:

$$\frac{a^2}{2}\left(50 + 3\sqrt{2}\right) \qquad \text{e} \qquad \frac{a^2}{2}\left(50 + 3\sqrt{3}\right)$$

facendo astrazione dal *coperchio* di cera dell'alveolo. La prima superficie sta dunque alla seconda come:

$$50 + 3\sqrt{2} \qquad \text{a} \qquad 50 + 3\sqrt{3}$$

ossia press'a poco come 54 a 55. Le api economizzano quindi una cellula su 55.

Paralogismi geometrici.

Trattandosi di paralogismi, naturalmente l'errore vi deve essere e, in questi casi, esso sta o nella costruzione difettosa (che si farà a mano, per meglio trarre in inganno la..... vittima)

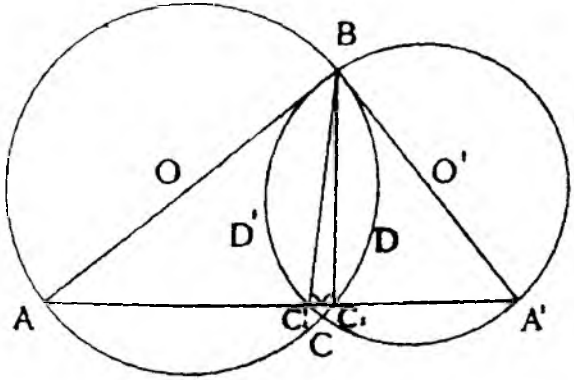


Fig. 492.

o nel ragionamento. Mentre l'errore del primo tipo è facile a rilevare, sia meditando sulla figura (sia pure scorretta), sia costruendola esattamente, quello dell'altro tipo è talvolta assai meno evidente.

I. — *Per un punto preso fuori d'una retta si possono condurre due perpendicolari alla retta stessa.*

Costrutta la fig. 492 si vede che i due angoli BC_1A, $BC_1'A'$ sono retti perchè iscritti in mezza circonferenza e quindi da B si sono condotte *due perpendicolari* BC_1 e BC_1' alla AA'.....

II. — *In un triangolo qualunque, un lato è uguale alla somma degli altri due.*

Siano ABC il triangolo dato e D, E, F i punti di mezzo dei suoi lati. Si sa che conducendo FD, FE si ha:

$$AD + DF + FE + EC = AB + BC$$

Ora, se G, H, I; L, K, M sono i punti di mezzo dei lati dei triangoli ADF, FEC si avrà analogamente che la spezzata $AGHIFMKLC$ è uguale ad $AB + BC$. Cosicchè continuando indefinitamente a dividere i lati dei nuovi triangoli ottenuti si avrà che la lunghezza dei segmenti costituenti le spezzate andrà costantemente diminuendo poichè i loro vertici si avvicineranno sempre più ad AC, ed *al limite, il perimetro delle linee spezzate finisce per confonderei con* AC. Dunque:

$$AB + BC = AC$$

Osserviamo che una grandezza variabile K ha per limite una grandezza fissa L quando la differenza tra K ed L può divenire e rimanere minore di qualsiasi quantità stabilita in precedenza per quanto piccola essa sia.

Ora, nel nostro caso, le grandezze K ed L cioè il perimetro delle spezzate e la lunghezza del lato AO sono entrambe *costanti* epperò anche la loro differenza rimarrà *costante*; sicchè non si può parlare di *limite* e quindi il ragionamento risulta necessariamente erroneo.

III. — *La circonferenza d'un circolo e il suo diametro sono uguali.*

Descritte due circonferenze sul *raggio* di quella data, preso come *diametro*, la somma di tali due circonferenze equivale alla circonferenza data. Così procedendo, le quattro piccole circonferenze nella fig. 493 varranno ancora la circonferenza data, e così di seguito, per modo che queste circonferenze si confonderanno, *al limite*, con AB e si avrà:

$$\text{circonf. } O = \text{diam. } AB$$

Il difetto del ragionamento è identico a quello del paralogismo precedente.

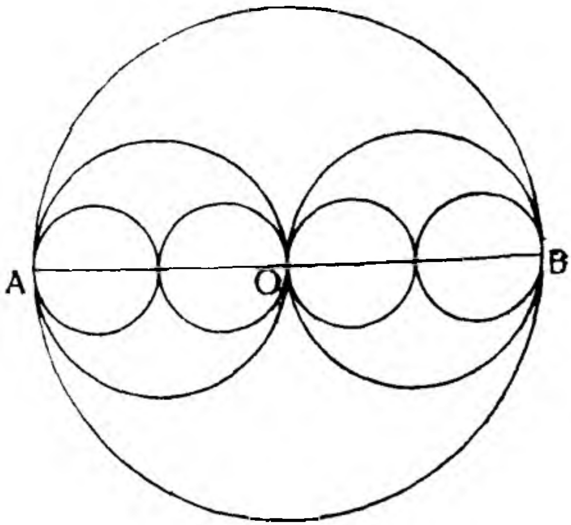


Fig. 493.

IV. — *Una parte d'un segmento di retta è uguale al segmento intero, ossia, la parte è uguale al tutto.*

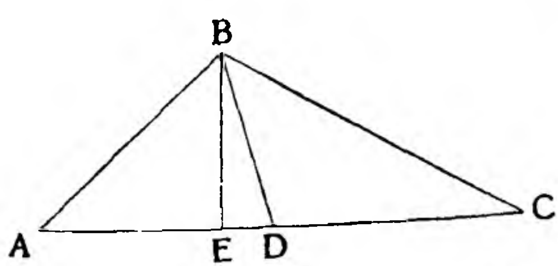


Fig. 494.

Sia $A\,B\,C$ un triangolo qualunque, nel quale il massimo angolo sia $\widehat{B}$. conduciamo $B\,D$ in modo che risulti $C\widehat{B}D = \widehat{A}$ e abbassiamo su AC la perpendicolare $B\,E$. Si ha, dai due triangoli equiangoli ABC , BDC:

$$\frac{A\,B\,C}{B\,D\,C} = \frac{\overline{A\,B}^2}{\overline{B\,D}^2}$$

e siccome essi hanno la stessa altezza BE:

$$\frac{ABC}{BDC} = \frac{AC}{DC}$$

dalle quali due relazioni si deduce:

$$\frac{\overline{AB}^2}{AC} = \frac{\overline{BD}^2}{DC} \tag{1}$$

Ma un teorema noto ci permette di scrivere:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,AC \times EC$$

$$\overline{BD}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,DC \times EC$$

e sostituendo questi valori in (1) si ha

$$\frac{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,AC \times EC}{AC} = \frac{\overline{DC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,DC \times EC}{DC}$$

e, semplificando:

$$AC + \frac{\overline{BC}^2}{AC} = DC + \frac{\overline{BC}^2}{DC}$$

$$\frac{\overline{BC}^2}{AC} - DC = \frac{\overline{BC}^2}{DC} - AC$$

e infine:

$$(\overline{BC}^2 - AC \times DC)\ DC = (\overline{BC}^2 - AC \times DC)\ AC \tag{2}$$

Dividendo i due membri per il fattore in parentesi si trova:

$$DC = AC$$

come appunto ci eravamo proposti di dimostrare. Basta però osservare che la quantità:

$$\overline{BC}^2 - AC \times DC$$

è nulla perchè i triangoli simili ABC, BDC danno:

$$\frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC}$$

Dunque la relazione (2) è sempre soddisfatta essendo il suo primo fattore sempre uguale a zero, per cui non ne segue che *debba* essere:

$$AC - DC = o \qquad \text{ossia} \qquad AC = DC$$

V. — *Un angolo retto è uguale ad un angolo ottuso* (v. n. VI).

Sia il rettangolo $ABCD$ (fig. 495). Conduciamo per A una retta $AE = AB$ e facente con AB un angolo acuto. Pel punto di mezzo R della CE innalziamo ad essa la perpendicolare fino

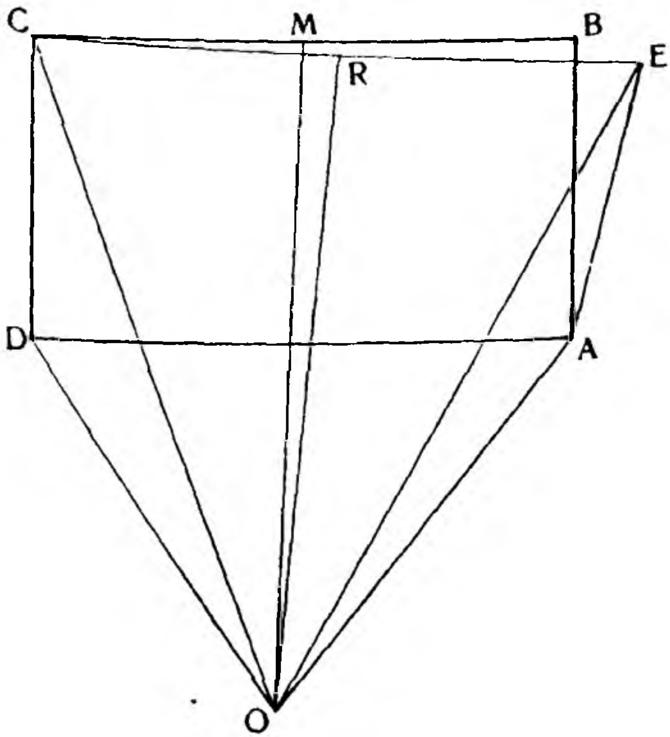


Fig. 495.

ad incontrare in O la perpendicolare condotta pel punto di mezzo M della CB e conduciamo le rette OA, OE, OC, OD.

Avremo:

$$OD = OA \qquad OC = OE$$

per cui nei due triangoli COD , EOA sarà l'angolo CDO uguale all'angolo EAO. Ma essendo:

$$A\widehat{D}O = D\widehat{A}O \quad \text{si dovrà avere} \quad A\widehat{D}C = D\widehat{A}E$$

cioè un angolo retto uguale ad uno ottuso.

VI. – *Tutti gli angoli sono uguali.*

Ho modificato in questo modo la costruzione relativa al paralogismo precedente; mi pare riesca più semplice, mentre è pure più generale.

Abbiasi un triangolo STU qualunque (fig. 496). Si conduca per T una retta, esterna al triangolo, $TV = TU$. Si unisca V col punto di mezzo R del lato SU e si prolunghi la congiungente fino ad incontrare in K il lato ST prolungato. Condotta

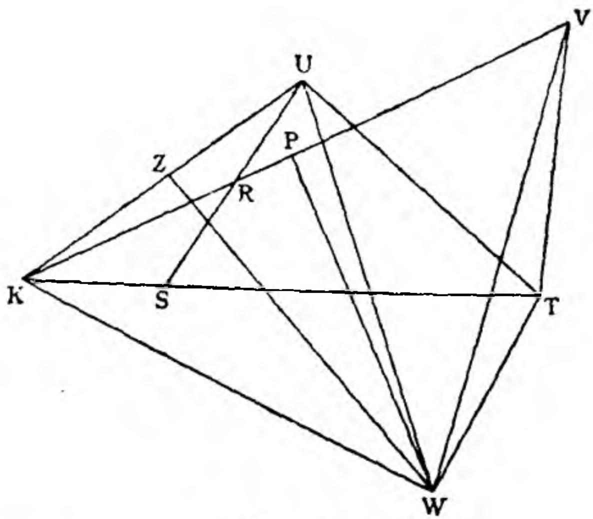


Fig. 496.

la KU si innalzi la perpendicolare sul suo punto di mezzo Z; si conduca parimente la perpendicolare sul punto di mezzo P della KV; le due perpendicolari dovranno incontrarsi in un punto W, che uniremo con U , V , K , T. Essendo $WK = WU$ e $WK = WV$ avremo $WU = WV$ per cui nei triangoli WTU, WTV che hanno i lati rispettivamente uguali, risulterà essere l'angolo WTU uguale all'angolo WTV; il che è assurdo.

VII. — *Tutti i triangoli sono isosceli.*

Consideriamo un triangolo qualunque ABC. Nel punto medio O del suo lato BC innalziamo la perpendicolare fino all'incontro in K con la bisettrice dell'angolo BAC. Il punto K potrà cadere all'interno o all'esterno del triangolo. Supponiamolo all'interno. Abbassiamo da K le perpendicolari KP, KN sui lati AC, AB. Per essere K sulla bisettrice dell'angolo BAC, sarà $KN = KP$, e per essere sulla KO, sarà $KB = KC$. I due triangoli ret-

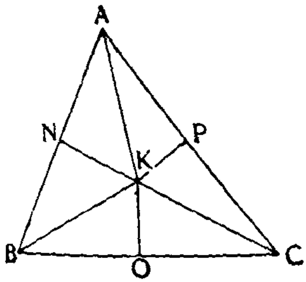


Fig. 497.

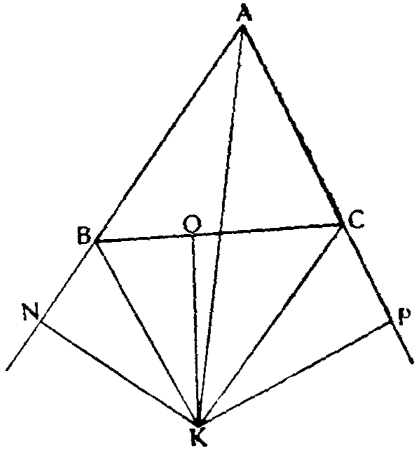


Fig. 498.

tangoli BKN, CKP sono dunque uguali e si ha $BN = CP$. Dai triangoli rettangoli AKN, AKP essi pure uguali, si ha ancora $AN = AP$ dunque:

$$AN + NB = AP + PC \qquad \text{ossia} \qquad AB = AC$$

vale a dire che il triangolo ABC è isoscele.

Se K esce fuori dal triangolo (fig. 498) facciamo la stessa costruzione indicata per la figura precedente. Avremo, nello stesso modo.

$$AN = AP \qquad BN = CP$$

quindi, per sottrazione:

$$AN - BN = AP - CP \qquad \text{ossia} \qquad AC = BC$$

e il triangolo ABC sarebbe ancora isoscele.

È superfluo aggiungere che se la bisettrice dell'angolo A non incontra la perpendicolare innalzata sul mezzo di BC, essa coincide con la stessa e il triangolo è isoscele senz'altro; esso lo *sarebbe* quindi in *ogni caso*. Anche di questo sofisma è facile trovare il lato debole.

VIII. — *Se due lati opposti di un quadrilatero sono uguali, gli altri due sono paralleli.*

Sia il quadrilatero $ABCD$ nel quale i due lati opposti AD, BC sono uguali; siano P e Q i loro punti di mezzo; innalziamo da essi le perpendicolari a tali lati, rispettivamente. Se tali

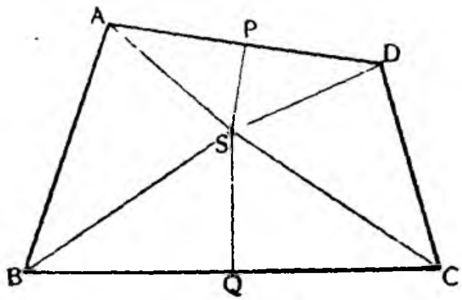


Fig. 499.

perpendicolari non s'incontrano esse sono parallele e quindi lo sono pure i lati AD, BC. Se s'incontrano, ciò può aver luogo entro o fuori del quadrilatero.

Consideriamo il primo caso (fig. 499) e conduciamo le rette SA, SB, SC, SD. Si avrà:

$$SA = SD \qquad\qquad SB = SC$$

dunque i due triangoli SAB, SDC sono uguali perchè hanno i lati uguali, per cui:

$$A\widehat{S}B = D\widehat{S}C$$

Si ha pure:

$$A\widehat{S}P = P\widehat{S}D \qquad\qquad B\widehat{S}Q = Q\widehat{S}C$$

addizionando queste tre uguaglianze, si ha:

$$A\widehat{S}B + A\widehat{S}P + B\widehat{S}Q = D\widehat{S}C + P\widehat{S}D + C\widehat{S}Q$$

$$P\widehat{S}A + A\widehat{S}B + B\widehat{S}Q = 180^\circ$$

Essendo dunque i punti P, S, Q in linea retta, i lati opposti AD BC sono paralleli.

Supponiamo ora che S (fig. 500) risulti esterno al quadrilatero, e facciamo la stessa costruzione. Avremo ancora:

$$A\widehat{S}B = D\widehat{S}C \qquad B\widehat{S}Q = Q\widehat{S}C$$

dunque:

$$A\widehat{S}B + B\widehat{S}Q = D\widehat{S}C + Q\widehat{S}C \qquad \text{ossia} \qquad A\widehat{S}Q = Q\widehat{S}D$$

per cui SQ è la bisettrice dell'angolo ASD; essa coincide perciò con SP, quindi i due lati opposti AD, BC sono paralleli.

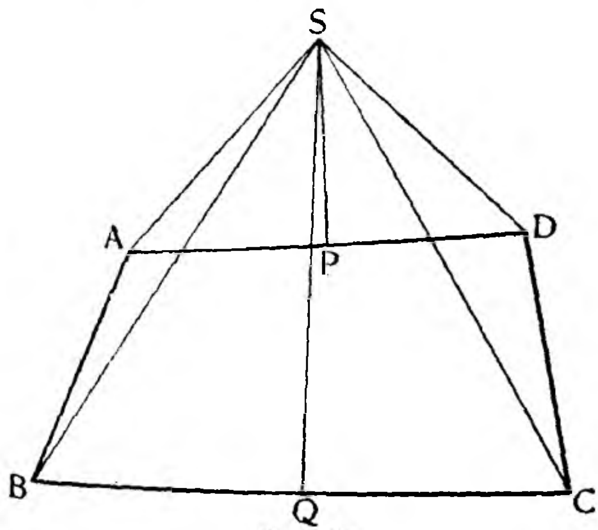


Fig. 500.

Questa conclusione non è generalmente esatta e la dimostrazione contiene un punto vizioso. Infatti l'angolo ASQ può risultare non la *somma*, ma la *differenza* fra gli angoli BSQ e ASB nei quali occorre tener conto del *senso*, cioè della posizione relativa.

IX. — Diversi.

Un vettore OA di lunghezza l può essere scomposto in infiniti modi in due vettori OM ed MA di lunghezze l' ed l''. Possiamo fare in modo che il rapporto $\frac{l'}{l''}$ abbia un valore qualsiasi compreso tra zero e ∞.

Immaginiamo il sistema riferito a due assi ortogonali OX, OY e siano α, α', α'' rispettivamente gli angoli di OA, OM ed MA con l'asse OX. Proiettando sui due assi si ottengono le relazioni:

$$l \operatorname{sen} \alpha = l' \operatorname{sen} \alpha' + l'' \operatorname{sen} \alpha''$$
$$l \cos \alpha = l' \cos \alpha' + l'' \cos \alpha''$$

dividendo e ponendo:

$$\frac{l'}{l''} = m \qquad \operatorname{tg} \theta = \frac{m \operatorname{sen} \alpha' + \operatorname{sen} \alpha''}{m \cos \alpha' + \cos \alpha''}$$

Qualunque sia il valore attribuito ad m, tale risultato è vero; ora m è suscettibile di qualsiasi valore. Se facciamo $m = \infty$ ed $m = o$ perveniamo alla doppia disuguaglianza:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} \alpha''$$

che e un risultato impossibile. Senonchè per m i valori O ed ∞ non sono ammissibili.

X. — **Il valore di π.** *Ecco una determinazione erronea di π basata su note quadrature.*

L'area d'una semi-ellisse limitata dall'asse minore è espressa da $\frac{1}{2} \pi a b$, secondo le usuali notazioni. Supponiamo ora che il centro si sposti sull'asse maggiore, in modo che questo diventi sempre più grande crescendo sino all'∞. L'ellisse diverrà, al limite, una parabola e in tale posizione limite l'area sarà uguale ai due terzi del rettangolo circoscritto. Ma anche la prima espressione $\frac{1}{2} \pi a b$ è sempre vera, qualunque siano i valori di a e b, per cui si ha:

$$\frac{1}{2} \pi a b = \frac{2}{3} a \times 2 b$$

e se ne deduce:

$$\pi = \frac{8}{3} = 2{,}666 \ldots.$$

XI. — *Dal seguente esempio, indicato da Schwartz e Peano, risulta come non si possa definire, senz'altra precauzione, l'area d'una superficie curva come* il limite dell'area d'un poliedro a faccette indefinitamente descrescenti inscritto alla superficie, *poichè questo limite può non esistere.*

Abbiasi un cilindro a base circolare di raggio R, e di altezza H. Dividiamo questo cilindro con piani equidistanti, paralleli alla base, in $2n$ tronchi uguali, di altezza $\frac{H}{2n}$, e consideriamo uno di questi tronchi. Dividiamo le due circonferenze di base di questo tronco in $2m$ parti uguali, nei punti 1, 2, 3 . . . . . $(2m)$ sulla base inferiore, $1'$, $2'$, $3'$ . . . . . $(2m)'$ sulla base superiore. Supponiamo che le coppie di punti $11'$, $22'$ . . . . . corrispondenti, si trovino su generatrici del cilindro. Inscriviamo nella superficie del tronco cilindrico considerato, il poliedro formato dalle faccette triangolari isosceli $12'3$, $2'34'$, $34'5$ . . . . . che sono in numero di $2m$: sia s la superficie di una di esse. Se operiamo in egual modo sui $2n$ tronchi dei quali è composto il cilindro totale, vi avremo iscritto $4mn$ faccette triangolari isosceli di superficie s. Poniamo:

$$S = 4mns$$

e cerchiamo il valore di S in funzione di R, H, m ed n.

Consideriamo perciò uno dei triangoli $12'3$, p. es. Chiamando $2''$ il punto d'incontro del raggio $2C$ del cilindro con 13, si vede subito che $2'2''$ è l'altezza del triangolo $12'3$ di base 13. Si ha dunque:

$$s = 12'' \times 2'2''$$

Ma:

$$12'' = R \operatorname{sen} 1C2'' = R \operatorname{sen} \frac{2\pi}{2m} = R \operatorname{sen} x$$

se si pone $\pi = mx$. Si ha poi:

$$2'2'' = \sqrt{(2'2)^2 + (2\,2'')^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{H}{2n}\right)^2 + R^2(1 - \cos x)^2} = \sqrt{\frac{H^2}{4n^2} + 4R^2 \operatorname{sen}^4 \frac{1}{2}x}$$

per conseguenza:

$$s = R \operatorname{sen} x \sqrt{\frac{H^2}{4n^2} + 4R^2 \operatorname{sen}^4 \frac{1}{2}x}$$

$$S = 4mnR \operatorname{sen} x \sqrt{\frac{H^2}{4n^2} + 4R^2 \operatorname{sen}^4 \frac{1}{2}x}$$

e infine:

$$S = 2\,\pi\,R\,\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\sqrt{H^2 + 16\,R^2\,n^2\operatorname{sen}^4\frac{1}{2}\alpha}$$

Se m ed n crescono indefinitamente, α tende verso zero, $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$ verso l'unità; ma $16\,n^2\operatorname{sen}^4\frac{1}{2}\alpha$ non ha limite determinato. Infatti se si fa:

$$n = km = \frac{k\,\pi}{\alpha} \qquad 16\,n^2\operatorname{sen}^4\frac{1}{2}\alpha = k^2\,\pi^2\,\alpha^2\,\frac{\operatorname{sen}^4\frac{1}{2}\alpha}{\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^4}$$

quantità che ha per limite zero se k è fisso. In questo caso:

$$\text{lim. } S = 2\,\pi\,RH$$

Ma se si suppone $n = km^2 = k\,\frac{\pi^2}{\alpha^2}$, si ha:

$$6\,n^2\operatorname{sen}^4\frac{1}{2}\alpha = k^2\,\pi^4\,\frac{\operatorname{sen}^4\frac{1}{2}\alpha}{\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^4}$$

quantità che ha per limite $k^2\,\pi^4$, se k è fisso. Allora:

$$\text{lim. } S = 2\,\pi\,R\sqrt{H^2 + k^2\,\pi^4\,R^2}$$

Se, infine, si suppone $n = km^3$, si ha:

$$\text{lim. }\left(16\,n^2\operatorname{sen}^4\frac{1}{4}\alpha\right) = \text{lim. } k^2\,m^2\,\pi^4\,\frac{\operatorname{sen}^4\frac{1}{2}\alpha}{\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^4} = \infty$$

$$\text{lim. } S = \infty$$

Il teorema di Pitagora.

Il teorema famoso dell'equivalenza fra il quadrato dell'ipotenusa e la somma dei quadrati dei cateti del triangolo rettangolo, era noto agli antichi, limitatamente però ai lati 3, 4 e 5. Gli Indù l'indicavano col nome di *seggiola della piccola sposa*; i Persiani con quello di *figura della donna maritata*: i Greci lo chiamano pure *teorema della maritata*. Esso venne poi denominato *teorema di Pitagora* perchè sembra accertato che sia dovuta a questo geometra la sua generalizzazione.

Il triangolo 3, 4 e 5 era considerato come *magico* dagli antichi; i Greci lo considerarono come simbolo del Matrimonio e Platone lo fece entrare nella composizione del suo celebre *numero nuziale*. Per Plutarco esso era *il più bello dei triangoli*; egli così ne enumera le proprietà: «Il 3 è il primo numero «dispari (l'unità non essendo allora considerata come un nu- «mero); 4 è il quadrato del primo numero pari; 5 è la somma «di 3 e 2; il quadrato di 5 dà il numero delle lettere dell'alfa- «beto egizio e quello degli anni di vita del bue sacro *Api*».

Si potrebbe aggiungere che l'area del triangolo magico è 6, numero che segue il 5, e che il cubo di tale area è la somma dei cubi dei lati:

$$6^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3$$

In un papiro magico sono disegnati due cuori uniti con righe, con la scritta: 3 è l'uomo, 4 è la donna (7 l'indivisibile). Plutarco riferisce (come un *si dice*) che le divinità egizie Osiris, Isis, Horus fossero simbolizzate col triangolo 3, 4 e 5 che rappresentava tutta la natura e il suo moltiplicarsi.

Non è dunque, probabilmente, un semplice caso che tali proporzioni si trovino nella piramide di Chephren (esterno), in molte pietre usate come lapidi o come coperchi, nei canali di aerazione, ecc. Così pure le enormi pietre di Baalbek in Siria sono larghe 3 e lunghe 4.

La fig. 501 mostra come nella famosa *Camera dei Re* della piramide di Cheope si riscontrino non solo tali rapporti, ma molti altri, la cui concomitanza non si saprebbe invero come attribuire a mera casualità. Da questo lato le piramidi egiziane furono oggetto di studio per parte dell'astronomo Piazzi e di molti matematici, specialmente inglesi.

I Cinesi pure conoscevano le proprietà di questo triangolo, poichè ne è fatta menzione nel Tceu-pei. I preti Indù e gli *arpedonapti* (tenditori di cordicelle) ossia canneggiatori egiziani, se ne servivano per innalzare la perpendicolare ad una retta nelle operazioni topografiche.

La leggenda, secondo Vitruvio, dice che Pitagora facesse un *secrificio* agli dei in ringraziamento della sua scoperta.

Plutarco riferisce due versi di Apollodoro secondo i quali Pitagora avrebbe offerto una *vittima*, che diventa un'*ecatombe* in Diogene Laerzio; ma Proclo riduce l'offerta ad un *bove*. E Cicerone ne dubita nella considerazione che i Pitagorici rifuggivano dal sangue; ed infatti Porfirio, scrittore greco del III secolo riferisce che, secondo gli autori più degni di fede Pita-

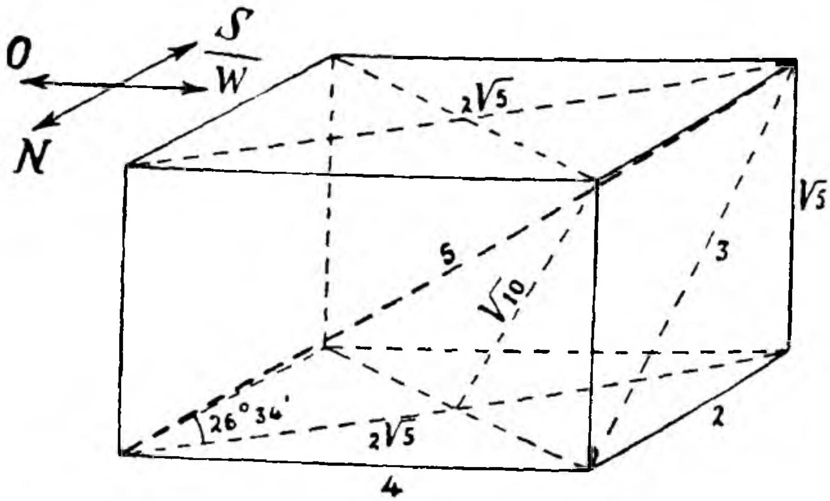


Fig. 501.

gora offerse si un *bue*, ma di pasta di frumento, il che restituirebbe al grande Geometra e per riflesso ai matematici la buona fama di miti e tranquilli speculatori.

Quanto alla dimostrazione data da Pitagora nulla se ne sa, essendo la più antica che si conosca quella data da Euclide, al quale Proclo ne attribuisce la peternità.

Secondo P. Tannery le cognizioni della geometria ai tempi di Pitagora gli avrebbero permesso di fare la dimostrazione del suo teorema per mezzo dei triangoli simili.

Cantor ritiene che, secondo l'uso in allora seguito per altri teoremi, si dovessero distinguere molti casi particolari, fra i quali quello del triangolo rettangolo isoscele si presenta come il più semplice e rende ovvia la dimostrazione come si rileva dalla fig. 502.

Passando ora all' esposizione di alcune delle dimostrazioni del *Ponte dell' asino*, mi limiterò a dei cenni solamente, bastando nella maggior parte dei casi l'esame della figura, per lo scopo di questo libro.

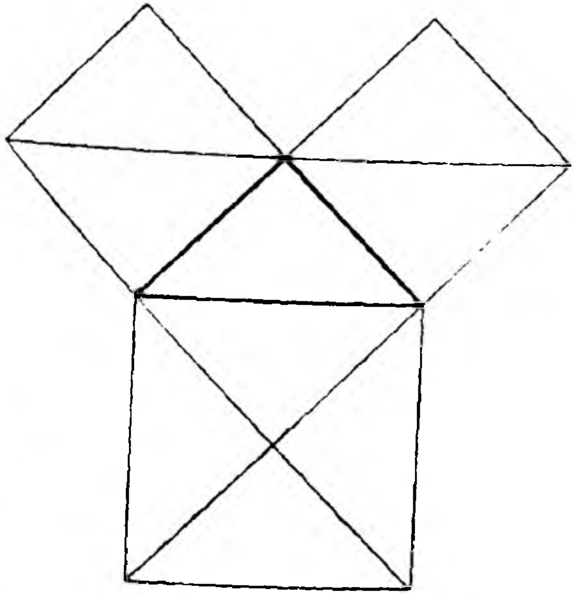


Fig. 502.

I. — Euclide. Si possono considerare otto casi *nella figura*, secondo che i quadrati costrutti sui lati del triangolo *ABC* ricoprono o non ricoprono esso triangolo.

1.° Fig. 503. — *Dimostrazione classica di Euclide.*

2.° Fig. 504 — Si ha $b^2 \equiv$ rettangolo *DM*; triangolo $ABE \equiv$ $\equiv \frac{1}{2}$ rettangolo $BK \equiv c^2$.

3.° Fig. 505. — Dimostrazione analoga alla precedente.

4.° Fig. 506. — Dimostrazione analoga alla precedente.

5.° Fig. 507. — Rettangolo $CK \equiv 2$ triangolo $CAD \equiv b^2$ e rettangolo $BK \equiv 2$ triangolo $BAE \equiv c^2$.

6.° Fig. 508. — Triangolo $CAD \equiv$ triangolo CIB; triangolo $CAD \equiv \frac{1}{2}$ rettangolo *CK*; triangolo $CIB \equiv \frac{1}{2}\, b^2$; quindi rettangolo $CK \equiv b^2$. Ci prova che $BK \equiv c^2$, come nel *caso precedente*.

7.° Fig. 509. — Rettangolo $CK \equiv 2$ triangolo $CAD \equiv b^2$; triangolo $AEB \equiv$ triangolo *FCB*; triangolo $AEB \equiv \frac{1}{2}$ rettangolo *BK*; triangolo $FCB \equiv \frac{1}{2}\, c^2$. Dunque rettangolo $BK \equiv c^2$.

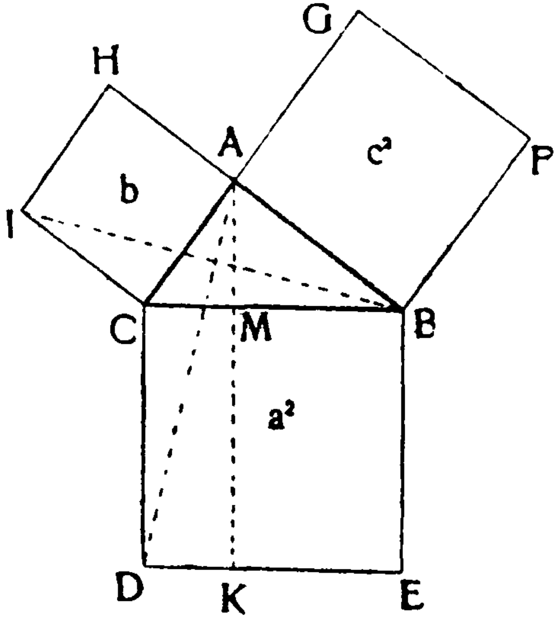


Fig. 503.

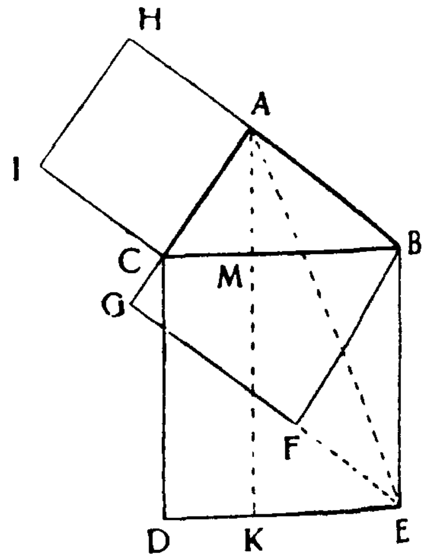


Fig. 504.

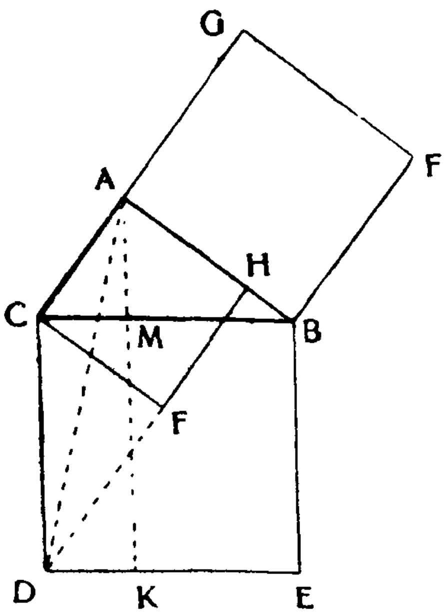


Fig. 505.

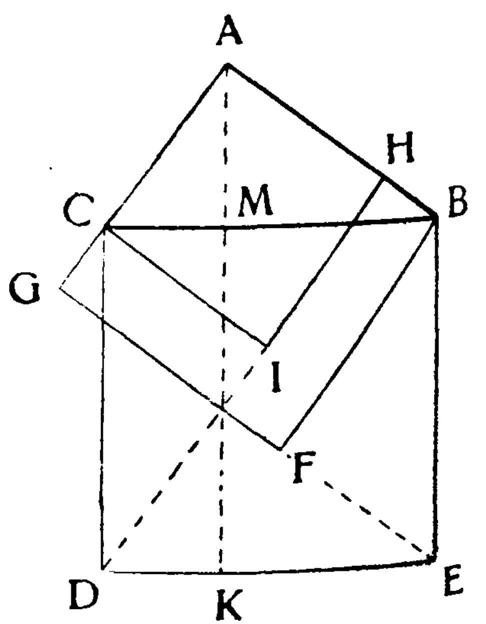


Fig. 506.

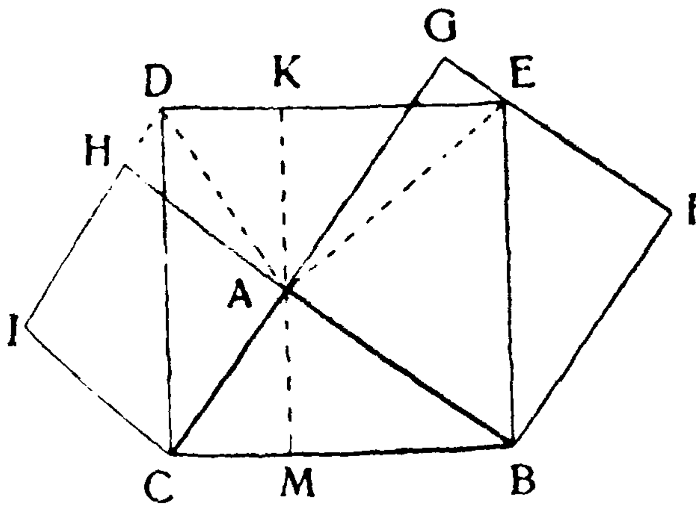


Fig. 507.

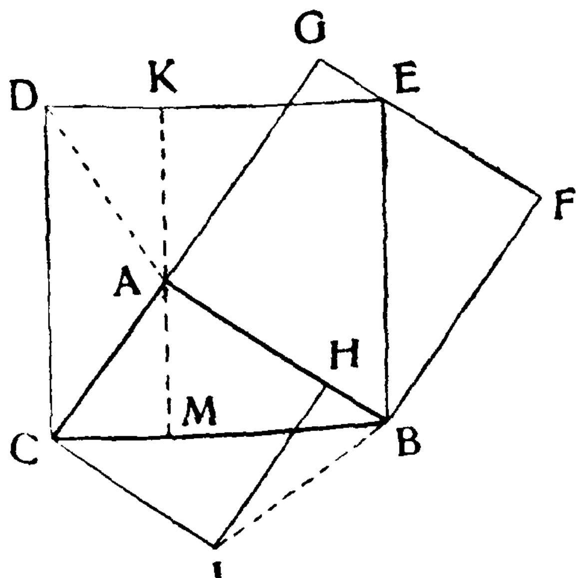


Fig. 508.

8.° Fig. 510. — Si dimostra che rettangolo $CK \equiv b^2$ come nel 6° caso il rettangolo $BK \equiv c^2$ come nel 7° caso.

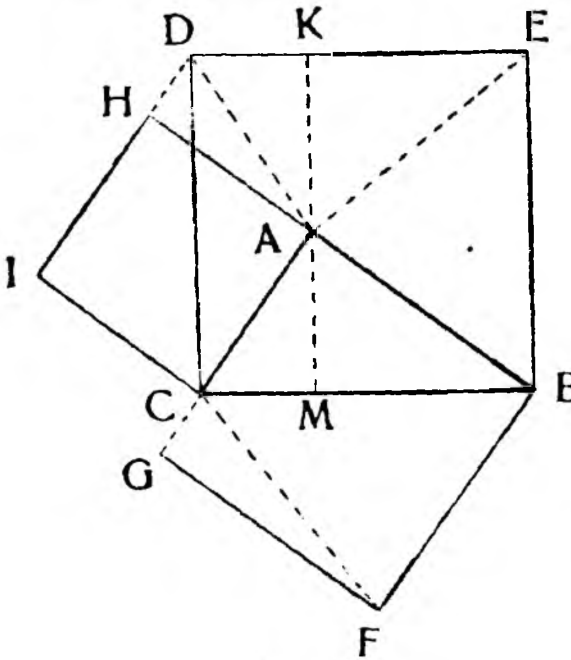


Fig. 509.

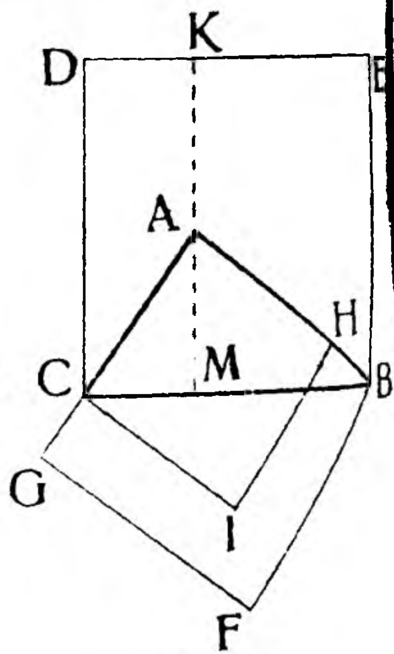


Fig. 510.

II. — **Nassir - ed - Din.** Edizione araba degli Elementi di *Euclide*, Roma 1594, in folio. Riprodotta nella Geometria di *Amiot*, Parigi 1850 e da altri molti.

Anche Nassir-ed-Din considera otto casi, ma basta considerare quello nel quale i quadrati non ricoprono il triangolo (fig. 511).

Triang. GAL = tiang. ABC; $LA = BC$; $G\widehat{A}L = A\widehat{B}C = C\widehat{A}M$ quindi $LAMK$ è una retta.

Parallelogr. $ACD'\,L \equiv b^2$; parallelogr. $ACD'\,L \equiv$ rettang. CK dunque rettang. $CK \equiv b^2$. Parimente parallelogr. $ABE'\,L \equiv a^2$; parallelogr. $ABE'\,L \equiv$ rettang. BK, per cui:

$$\text{rettang. } BK \equiv a^2 \qquad \text{e} \qquad c^2 \equiv a^2 + b^2$$

Si può avere la fig. 514 alquanto più semplice della precedente, notando che:

$$C\,D' = B\,E' = C\,B$$

per cui $BCD'E'$ è il quadrato costrutto sull'ipotenusa se si suppone che a^2 ricopra il triangolo ABC.

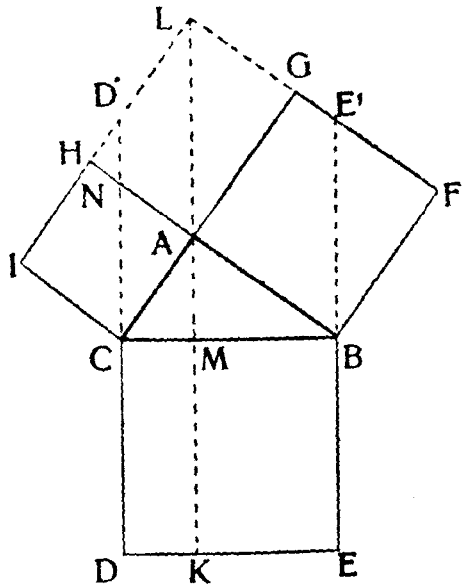


Fig. 511.

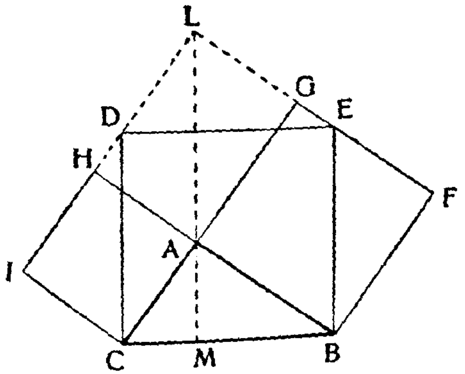


Fig. 512.

III. — **Hoffmann** (1821). Prolungando nella fig. 512 CD fino in O (fig. 513) si ha parall. $ACDL \equiv b^2$ e parall. $ANOL \equiv$ $\equiv ACDL \equiv b^2$; ma parall. $ABEL \equiv c^2$. Cosicchè parallelogr. $BNOE \equiv b^2 + c^2$ e poichè parall. $BNOE \equiv a^2$ se ne deduce $a^2 \equiv b^2 + c^2$.

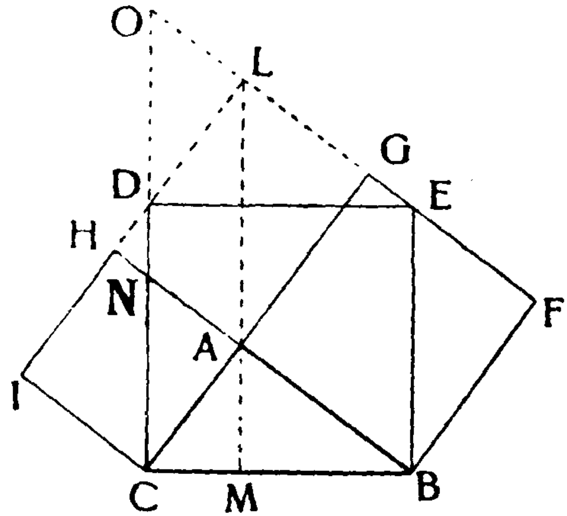


Fig. 513.

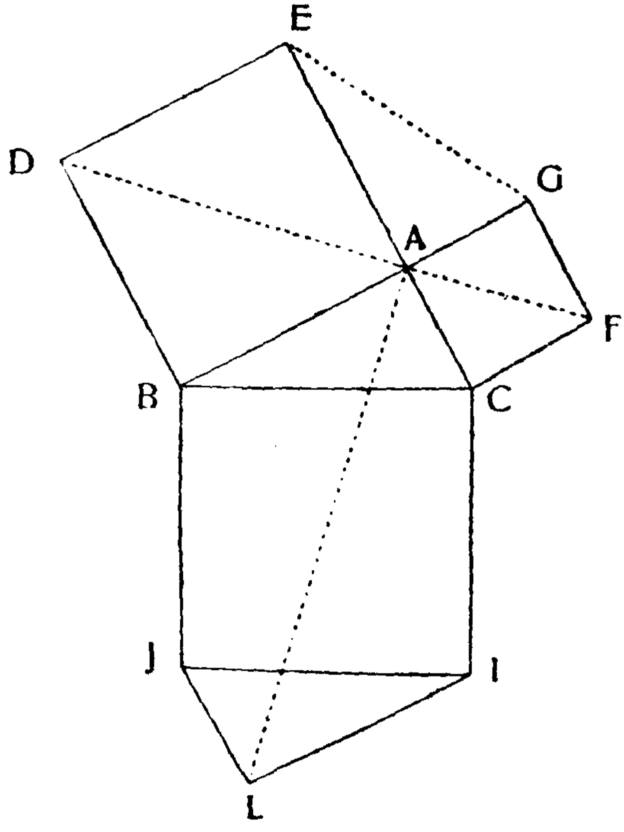


Fig. 514.

IV. – Tempelhoff. *Anfangsgründe der Geom.* Berlino, 1769. Siano costrutti i quadrati sui tre lati del triangolo rettangolo ABC, e il triangolo IJL uguale ad ABC, nel modo indicato nella fig. 514. Conduciamo le rette EG, DF, AL. I quadrilateri $DBCF$, $DEGF$, $ABJL$, $ACIL$ sono uguali come è facile vedere. Quindi l'esagono $EGFCBD$ è equivalente all'esagono $BJLICA$. Ma questi due poligoni hanno una parte comune ABC ed $AEG = ILJ$, quindi i resti sono equivalenti, cioè:

$$CIJB = ABDE + ACFG$$

V. – Sonndorfer. Sia ABC il triangolo rettangolo dato (fig. 515) e $BCDE$ il quadrato costrutto sull'ipotenusa. Conduciamo le perpendicolari DF, EG sulla AB, poi CM EN su DF. Avremo così quattro triangoli rettangoli uguali ABC, DNE, CDM, BEG.

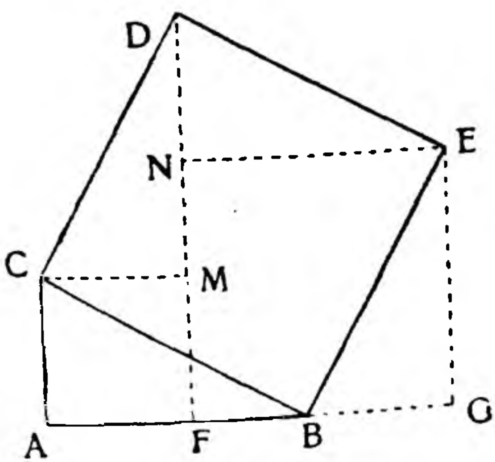


Fig. 515.

Ora, se dal pentagono $ACDEG$ si tolgono i triangoli ABC, BEG, si ottiene il quadrato dell'ipotenusa, mentre se dallo stesso pentagono si tolgono i triangoli CDM, DNE si ottengono come resto i quadrati fatti sui cateti del triangolo dato; dunque:

$$CBED = CAFM + FNEG$$

VI. – Hoffmann. *Der Pythagor. Lehrsatz.* Magonza 1821. Conduciamo (fig. 516) le perpendicolari $BF = AB$ ad AB in B; $CI = CA$ [illegible] $BF = BC$ a BC in B. I punti I, A, E

sono in linea retta. I due quadrilateri $IFBC$, $ABEC$ sono equivalenti; infatti, triang. $CBF \equiv$ triang. ABE come pure

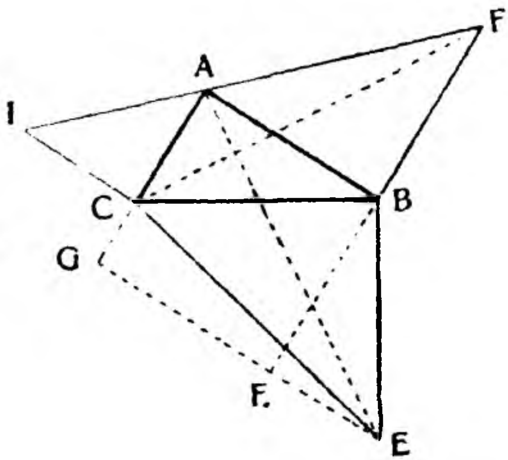


Fig. 516.

triang $ICF \equiv$ triang. ACE. Sottraendo da ciascuno di detti quadrilateri il triangolo ABC si hanno resti equivalenti, cioè:

$$\frac{a^2}{2} = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2}$$

VII. — O. Werner. *Arch. d. Math. und Physik.* Grunert 1855. Conducasi (fig. 517) IZ parallela a BC e le perpendicolari CX, AM a BC. Si ha $b^2 \equiv$ parall. $IZBC \equiv BC \times CX$; ma per

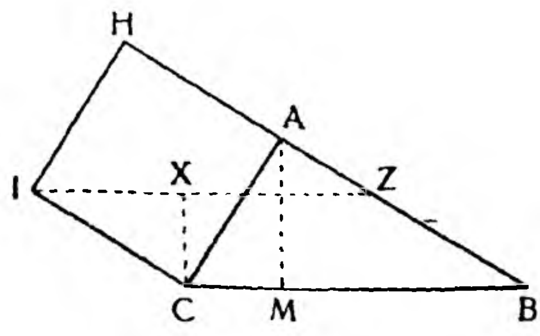


Fig. 517.

l'eguaglianza dei triangoli ICX, CMA si ha $CX \times CM$ quindi $b^2 \equiv BC \times CM$. Così pure $c^2 \equiv BC \times BM$; per cui addizionando membro per membro, si avrà;

$$b^2 + c^2 \equiv BC\,(CM + BM) \equiv BC \times BC \equiv a^2$$

VIII. — P. Fabre. *Journ. de Mathém. élém.* 1888.

Conduciamo AQ uguale e parallela a CD, ecc. Risulterà parall. $ABEQ \equiv c^2$; parall. $ACDQ \equiv b^2$ da cui $b^2 + c^2 \equiv$ pentagono $CBEQD$ + triangolo $ABC \equiv$ pentagono $CBEQD$ + triangolo QED e infine $b^2 + c^2 \equiv$ quadrato $CBED = a^2$.

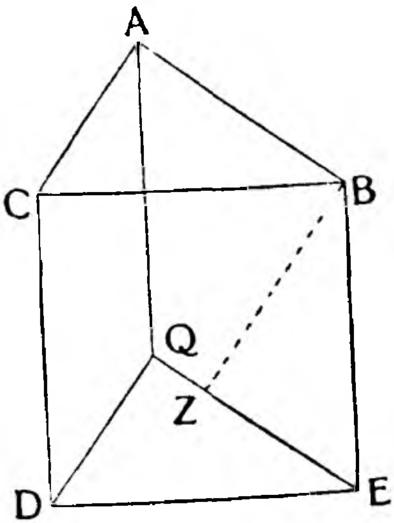


Fig. 518.

IX. — Renan. *Revue scientifique*, 1889.

Conduciamo da c e da B le perpendicolari alle IB, CF (figura 519); esse si segheranno in un punto R della perpendicolare da A su BC; infatti tanto per l'eguaglianza dei triangoli CBF, ABR si ha ICB e CAR, come per quella dei triangoli CBF, ABR si ha $AR = BC$.

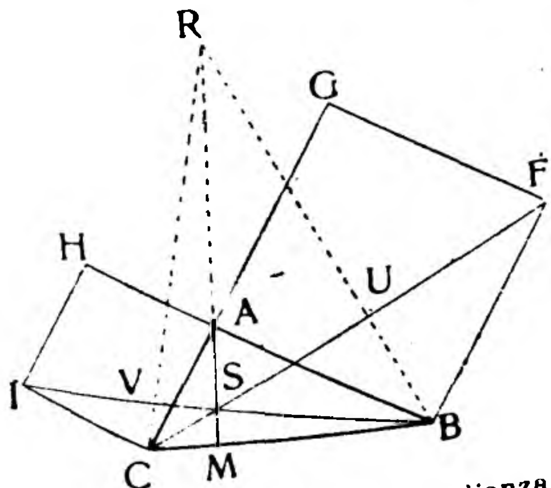


Fig. 519.

Ora si ha:

$$\text{triang. } CAR = \text{triang. } ICB \equiv \frac{1}{2} b^2$$

$$\text{triang. } BAR = \text{triang. } FBC \equiv \frac{1}{2} c^2$$

e quindi:

$$\text{triang. } CAR + \text{triang. } BAR \equiv \frac{1}{2} (b^2 + c^2)$$

E siccome triang. CAR + triang. $BAR \equiv \frac{AR}{2} (MC + MB) =$ $= \frac{BC}{2} \times BC \equiv \frac{a^2}{2}$; si ha infine $a^2 \equiv b^2 + c^2$.

X. — Piton-Bressant. Siano X, Y, Z i centri dei quadrati a^2, b^2, c^2; YAX è una retta ed AZ è parallela a BX poichè il quadrilatero $ABZC$ è inscrittibile; e siccome $BZ = CZ$ la

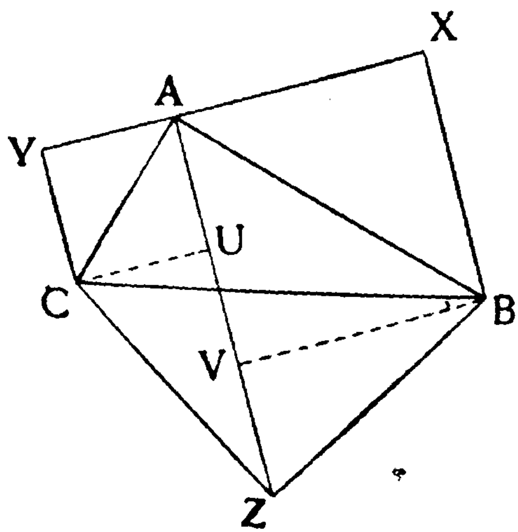


Fig. 520.

AZ è bisettrice di $B\widehat{A}C$; dunque $X\widehat{A}Z = 90^\circ = \widehat{A}XB$. Si vede poi che $AZ = BX + CY$ poichè i triangoli CUZ, BVZ sono uguali. Infine i quadrilateri $ABZC$, $YXBC$ sono equivalenti perchè si ha:

$$\text{quadr. } ABZC \equiv \frac{AZ}{2} \times (CU + BV) = \frac{AZ}{2} \times YZ$$

$$\text{quadr. } YXBC \equiv \frac{BX + CY}{2} \times YX = \frac{AZ}{2} \times YX$$

Sottraendo da ciascuno dei due quadrilateri la parte comune ABC si avrà, triang. $BCZ \equiv$ triang. $AYC +$ triang. AXB e prendendo il quadruplo $a^2 \equiv b^2 + c^2$.

Dimostrazioni mediante trasposizione di elementi.

XI. — Pitagora, *secondo* Bretschneider. Siano $CI = b$ e $CO = c$. Costruiamo il quadrato $IOFL$ (fig. 521) sulla loro somma e scomponiamolo nei due quadrati b^2, c^2 e nei due rettangoli HG, BC che a loro volta scomporremo nei triangoli:

$$AGL = AHL = ABO = ACO = \frac{bc}{2}$$

Disponendo questi triangoli nel modo indicato nella fig. 522 formeranno coi loro cateti un quadrato di lato $b + c$ e con la loro ipotenusa un altro quadrato di lato a; il primo eccede sul secondo per l'area dei 4 triangoli considerati per cui:

$$b^2 + c^2 \equiv a^2 \quad .$$

Si potrebbero considerare anche qui otto casi di figura come si è veduto nella dimostrazione d'Euclide.

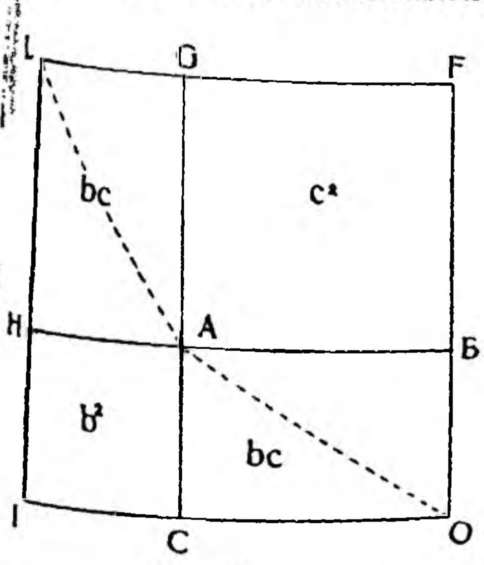


Fig. 521.

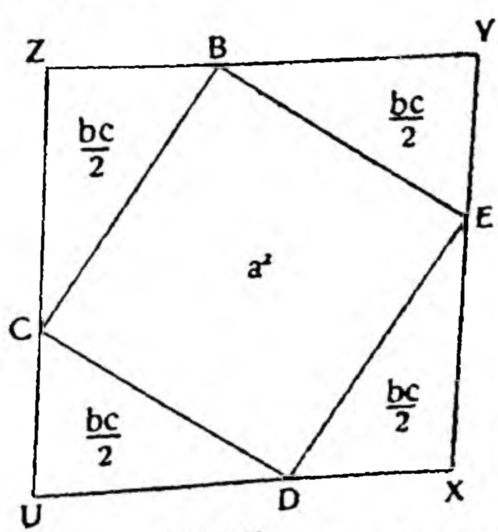


Fig. 522.

XII. — **Bhâskara.** *Vîgia Ganita.* L'autore indù ammette come dimostrata la formola:

$$(c - b)^2 + 4 \frac{bc}{2} = b^2 + c^2 \qquad (A)$$

poichè non fa che disporre i quattro triangoli uguali ad ABC nel modo indicato dalla fig. 523 cioe cosifattamente che le loro

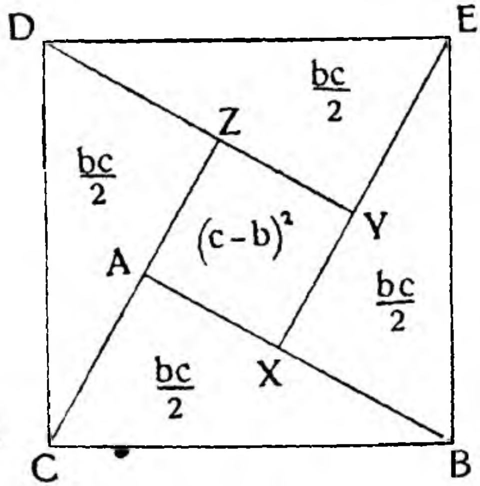


Fig. 523.

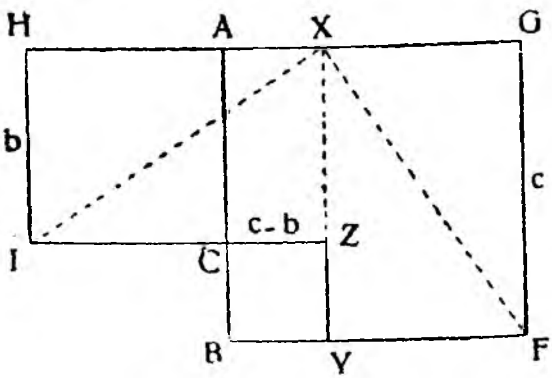


Fig. 524.

ipotenuse formano il quadrato a^2 e nel centro il quadrato $(c - b)^2$; e poi aggiunge semplicemente « Vedete! ».

— Seguendo il procedimento di Bretschneider si può fare a meno dell'uso della formola (A). Consideriamo il quadrato BZ costrutto su $c - b$; se vi uniamo, nel modo indicato, nella fig. 524 i quadrati $IA = b^2$ e $BG = c^2$ possiamo considerare la somma $b^2 + c^2$ come equivalente alla somma del quadrato BZ

d'area $(c-b)^2$ e di due rettangoli IX e XF aventi ciascuno per area bc che è appunto il risultato della formola (A). I due rettangoli divisi ciascuno in due triangoli mediante la diagonale danno 4 triangoli che possono, col quadrato $B\,Z$ completare il quadrato IXF . . . . . , di lato a per cui:

$$b^2 + c^2 \equiv a^2$$

XIII. — **Marre.** *Dall' opera sancrita « Yucti Bâcna » — Bollettino di Bibliografia del Principe Boncompagni XX - 1887.*

Si costruiscono (fig. 525) i quadrati CE , AF su a e c. Si è già veduto che E cade su GF. Conducendo da D le parallele a GF

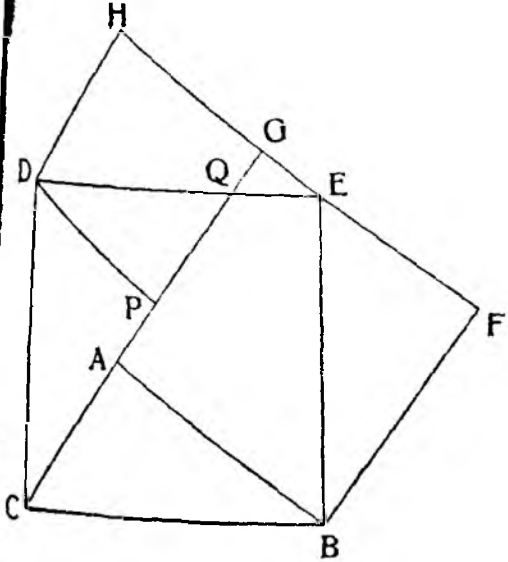


Fig. 525.

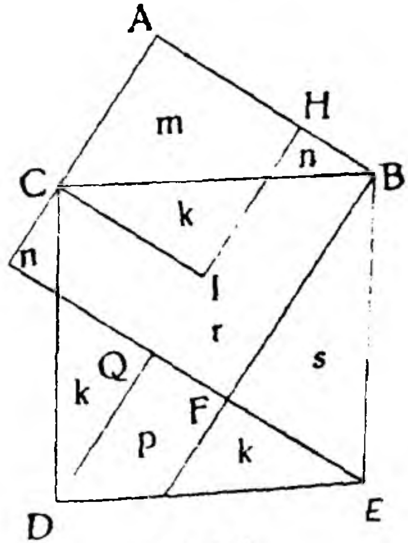


Fig. 526.

ed AG si ha il quadrato $DHGP$ di lato b, come è facile vedere. Sicchè togliendo i triangoli ABC e PCD, che insieme al pentagono $A\,B\,E\,D\,P$ formano a^2, e disponendoli in DHE , EFB si viene a formare la figura:

$$D\,H\,F\,B\,A\,P\,D = b^2 + c^2$$

XIV. — **Reichenberger.** *Philosophia et Mathesis universa - Ratisbona 1774.* — Nella fig. 526 si ha:

$$a^2 \equiv p + 3\,k + r + s \qquad b^2 + c^2 \equiv 2\,m + 2\,n + 2\,k + r$$

Dai triangoli uguali ABC , FBE , QED si ha:

$$m + n \equiv s \equiv p + k$$

quindi:

$$b^2 + c^2 \equiv (s) + (p + k) + (2\,k + r) \equiv a^2$$

XV. — Périgal. *Messenger of Mathematics, 1873.*

Sia U il centro del quadrato C^2 (fig. 527). Conduciamo XY e VZ, parallela e perpendicolare a BC. I quattro quadrilateri uguali m che così si ottengono hanno i lati come UY uguali a $\frac{BC}{2}$ epperò si possono sovrapporre al quadrato a^2 nel modo indicato nella figura. Il quadrato $A'\ C'\ I'\ H'$ risulterà uguale ad $A\ I\ C\ H$ poichè:

$$H'A' = H'A'_1 - A'A'_1 = BX - AY = CY - AY = CA$$

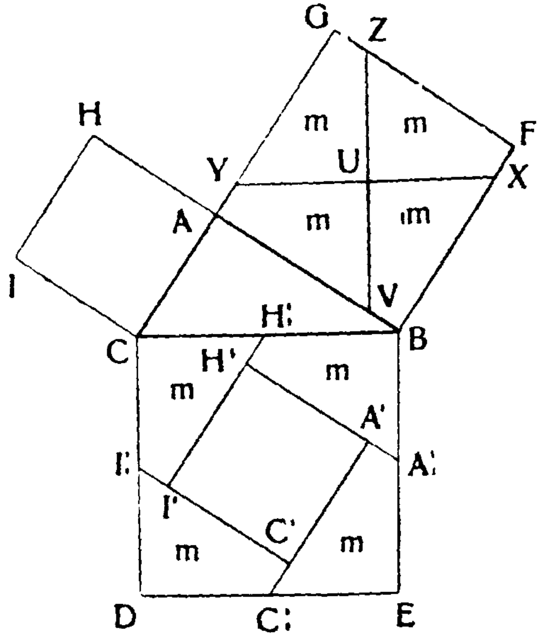


Fig. 527.

XVI. — Ozanam. *Récréat. Math. et Physiques - Parigi 1778.* In questa fig. 528, nella quale si sarà fatto $DX = DX = CN$ è facile vedere che il quadrato a^2 e composto delle cinque figure nelle quali risultano scomposti i quadrati b^2 e c^2.

XVII. — Wipper. *Sechs. Bew. des Pyth. Lehrs. - Lipsia 1880.* Costruiscansi i due triangoli rettangoli LST, $AS'T'$ che è facile dimostrare essere uguali. Togliendo dal primo b^2 e c^2 e dal secondo a^2 restano rispettivamente queste somme di triangoli:

$$ICS + HLA + GLA + BFT + ABC \quad \text{e} \quad DCS' + EBT' + ABC$$

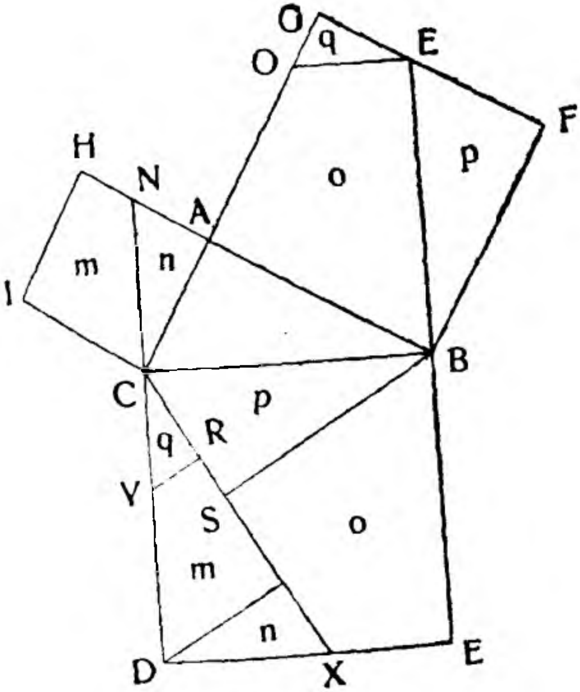


Fig. 528.

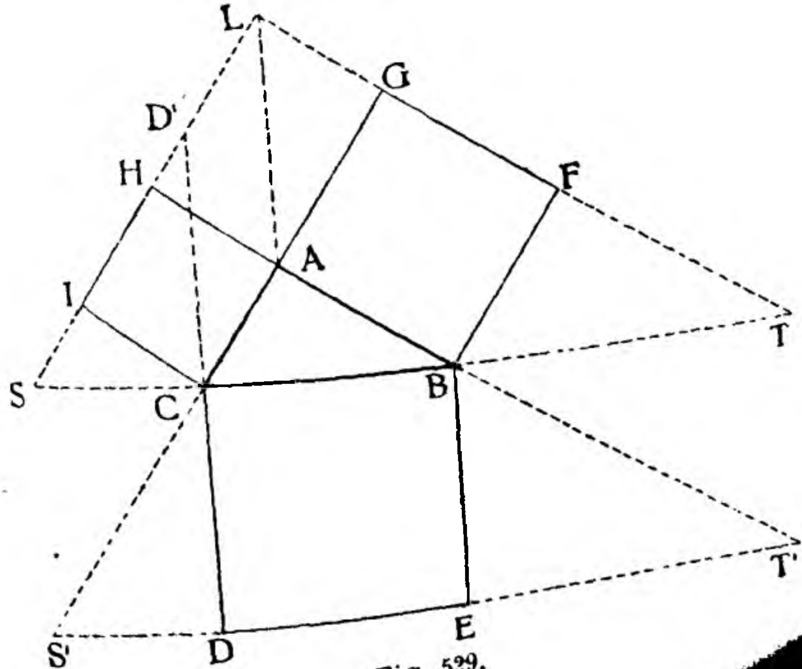


Fig. 529.

Per dimostrare il teorema basta dimostrare che i triangoli:

$$ICS + HLA \equiv DCS' \qquad \text{e} \qquad GLA + BFT \equiv EBT$$

il che facilmente si rileva dalla fig. 529.

XVIII. — Rojot. È facile vedere che $c^2 \equiv$ rett. BK poichè sono composti del quadrilatero comune $BMOF$ e dei triangoli:

$$ABM = KEO \qquad \text{e} \qquad AGO = BFE$$

Si ha poi $b^2 \equiv$ rett. CK, infatti b^2 è costituito del triangolo CMN, del triangolo ABM e del quadrilatero $AHIN$. Portando ACM sul suo eguale ODK; poi $AHIN$ in $CH'N'$ e infine INO sul suo uguale $I'N'D$ si sarà appunto formato il rettangolo $CMKD$ con le figure componenti b^2 (fig. 530).

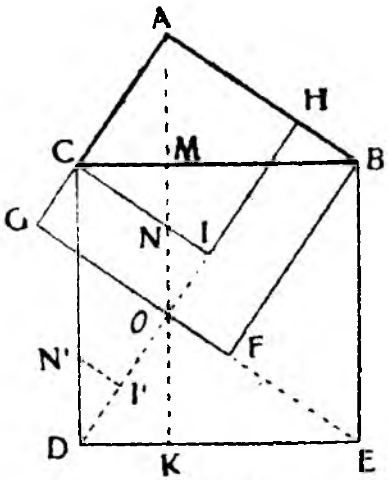


Fig. 530.

XIX. — Sia ABC (fig. 531) un triangolo rettangolo in A. Costruiamo esteriormente i quadrati $BCDE$, $CAFG$, $ABHK$. Le rette CG e BH si incontrano in V, le rette GF e HK in U. La figura $GVHN$ è il quadrato costrutto sulla somma $b+c$; esso si compone dei quadrati costrutti su AB e AC e di quattro triangoli uguali ad ABC (conducendo la retta FK). Conduciamo pure per E una parallela ad AC e per D una parallela ad AB; queste rette si segano in un punto Y e segano rispettivamente AB in X ed AC in Z. Si dimostra facilmente che i triangoli XEB, EYD, CZD sono uguali ad ABC; ne risulta che la figura $AXYZ$ è parimente un quadrato costrutto su $b+c$ e si compone del quadrato costrutto su BC e di quattro triangoli

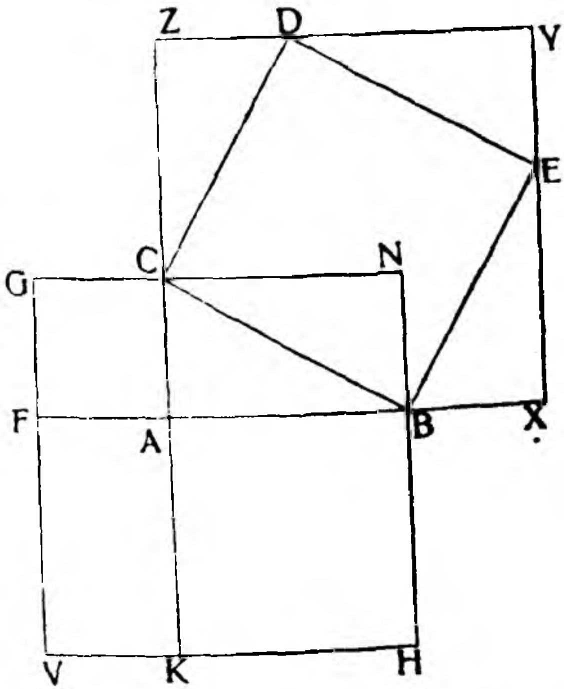


Fig. 531.

uguali ad ABC. Per conseguenza se da ciascuno dei quadrati uguali $AXYZ$, $NHVG$ si detraggono i quattro triangoli uguali ad ABC i resti sono uguali; dunque:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

Dimostrazioni algebriche.

XX. — Bhâskara. *Vigia Ganita.* Dai triangoli (fig. 532) simili DAC, DBA si ha:

$$\frac{CD}{AC} = \frac{AC}{BC} \quad \text{ossia} \quad \overline{AC}^2 = CD \times BC \tag{1}$$

e:

$$\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC} \quad \text{ossia} \quad \overline{AB}^2 = BD \times BC \tag{2}$$

Addizionando membro a membro le uguaglianze (1) e (2) si ha:

$$\overline{A\,C}^2 + \overline{A\,B}^2 = (C\,D + B\,D)\;B\,C = \overline{B\,C}^2$$

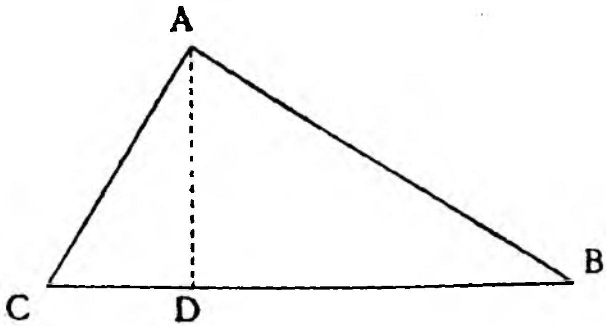


Fig. 532.

XXI. — **Bezout.** *Cours de Mathém. 2.ª parte - Parigi 1768.*
Si ha, per la similitudine dei tre triangoli (fig. 532):

$$\frac{\text{triang. } DAC}{\overline{A\,C}^2} = \frac{\text{triang. } DBA}{\overline{A\,B}^2} = \frac{\text{triang. } ABC}{\overline{B\,C}^2}$$

Per una nota proprietà delle proporzioni si può scrivere:

$$\frac{\text{triang. } DAC + \text{triang. } DBA}{\overline{A\,C}^2 + \overline{A\,B}^2} = \frac{\text{triang. } ABC}{\overline{B\,C}^2}$$

e siccome:

$$\text{triang. } DAC + \text{triang. } DBA \equiv \text{triang. } ABC$$

risulta:

$$\overline{A\,C}^2 + \overline{A\,B}^2 \equiv \overline{B\,C}^2$$

XXII. — **Marre.** *Dal Matem. cieco Saunderson. Bollettino di Bibliografia del Princ. Boncompagni - t. XX, 1887.*
Abbiasi il quadrato *STUR* o $(c + b)^2$; il quadrato $AXYZ = (c - b)^2$ e il quadrato $B\,C\,D\,E = a^2$ formati mediante otto triangoli uguali ad *ABC* (fig 533).

Si ha:

$a^2 \equiv (c+b)^2 - 4$ triang. ABC $\qquad a^2 \equiv (c-b)^2 + 4$ triang. ABC

da cui:

$$2\,a^2 \equiv (c+b)^2 + (c-b)^2 = 2\,b^2 + 2\,c^2$$

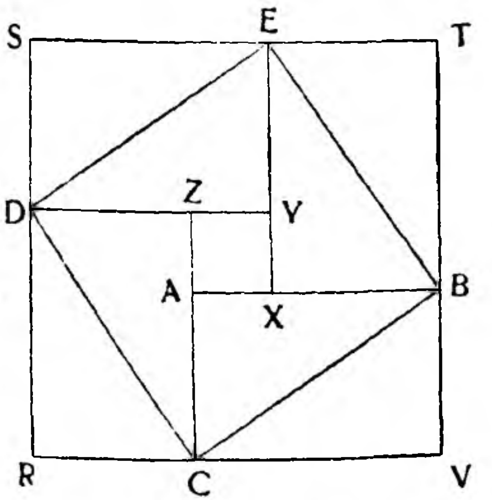


Fig. 533.

XXIII. — Möllmans. *Archices de Grunert* - *t. XVII.* La superficie del triangolo ABC, rettangolo in A, ha per espressione $\frac{1}{2}\,b\,c$ ed anche $p\,r$; ma r (raggio del circolo iscritto) è pure uguale, nel triangolo rettangolo, a:

$$\frac{b+c-a}{2} \quad \text{quindi} \quad p\,r = \left(\frac{a+b+c}{4}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right)$$

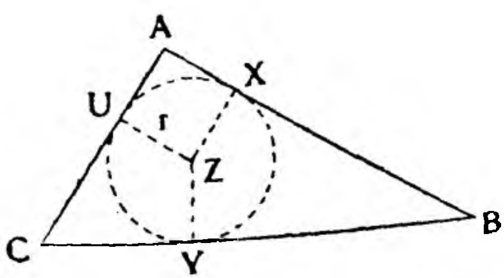


Fig. 534

ossia:

$$\frac{1}{2}\,b\,c = \frac{1}{4}\,(a+b+c)\,(b+c-a)$$

da cui si deduce:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

XXIV. — Hoffmann. *Der Pythag. Lehrsatz* - *Magonza* 1821.

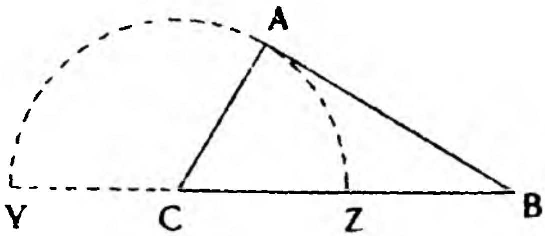
1. — Il cateto AB (fig. 535) risultando tangente alla semicirconferenza di centro C e di raggio CA, si ha:

$$\overline{AB}^2 = BY \times BZ = (BC + AC)\,(BC - AC) = \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$$

da cui:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

Fig. 535.



2. — Facciamo $AZ = AC$; la circonferenza descritta con centro C e raggio CZ (fig. 536) determina i punti X, Y, U; si avrà:

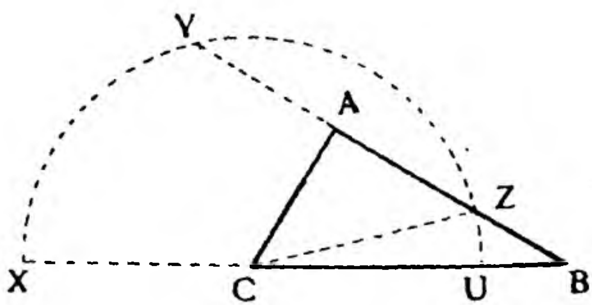
$$BZ \times BY = BU \times BX$$

e, ponendo:

$$CZ = CU = p \qquad BU = n \qquad BZ = m$$

$$m\,(m + 2\,b) = n\,(n + 2\,p) \quad \text{ossia} \quad m^2 + 2\,bm = n^2 + 2\,pn$$

Fig. 536.



Ma nel triangolo rettangolo *isoscele* ACZ si ha $2\,b^2 = p^2$ quindi:

$$b^2 + m^2 + 2\,b\,m + b^2 = n^2 + 2\,p\,n + p^2$$

ossia:

$$b^2 + (b + m)^2 = (n + p)^2 \quad \text{e infine} \quad b^2 + c^2 = a^2$$

XXV. — Garfield (1). *The mathematical Magazine* - 1882.
Abbassiamo (fig. 537) la perpendicolare a BC in C e facciamo $CD = BC$, ecc. L'area dei triangoli uguali ABC, CDZ è

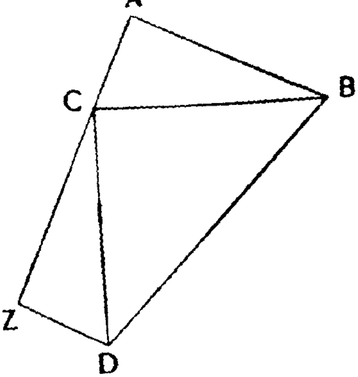


Fig. 537.

espressa da $\frac{bc}{2}$ e quella del triangolo BCD da $\frac{a^2}{2}$. Ora, i tre triangoli formano un trapezio d'area:

$$\frac{(b+c)^2}{2}$$

Si ha dunque:

$$\frac{(b+c)^2}{2} \equiv \frac{a^2}{2} + 2\,\frac{bc}{2} \qquad \text{da cui} \qquad b^2 + c^2 = a^2$$

Proprietà curiose della figura del quadrato dell'ipotenusa.

Indicherò alcune di queste proprietà, senza dimostrarle, per brevità e per esserne facili le dimostrazioni (fig. 538).

1. — $AZ = BX + CY$.
2. — Triang. $RSZ \equiv$ triang. CYR + triang. SXB.
3. — Triang. $XYZ \equiv$ quadril. $XYCB \equiv$ quadril. $ABZC$.
4. — Triang. $XYZ \equiv \frac{1}{4}\,(b+c)^2$

(1) Presidente degli Stati Uniti assassinato nel 1881.

5\. — I quadrilateri $ABEC$, $ABDC$, $BCIF$ sono equivalenti.

6\. — Le rette AZ, BY, CX sono le altezze del triang. XYZ.

7\. — I triangoli ABC, XYZ sono isobaricentrici.

8\. — Le rette (fig. 519 a pag. 583) BI, CF, AM concorrono in un punto S.

9\. — Triang. $AGH \equiv$ tr. $BEF \equiv$ tr. $CDI \equiv$ tr. ABC.

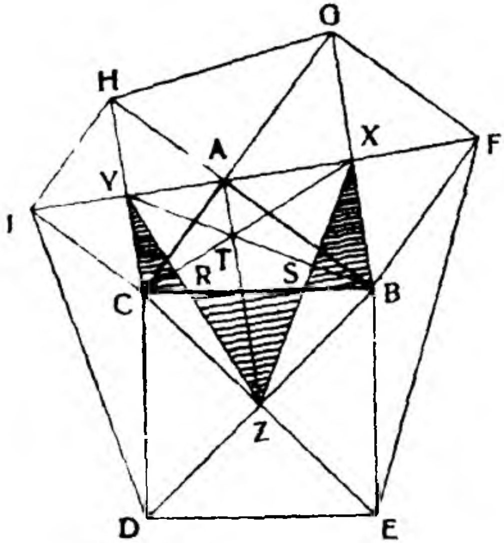


Fig. 538.

10\. — La somma dei quadrati costrutti sui lati dell'esagono $IHGFED$ è uguale ad 8 volte il quadrato dell'ipotenusa.

11\. — Le distanze dall'ortocentro di XYZ ad AB e AC sono uguali a:

$$\frac{bc}{2(b+c)}$$

12\. — I punti d'incontro di XZ con AB e BC e quelli di YZ con AC e BC sono su di una conica che tocca XY in A ed ha per equazione:

$$(2c+b)\,bx^2 + (2b+c)\,cy^2 - bcxy + bc(b+c)(x+y) = 0$$

Generalizzazione del teorema di Pitagora.

1\. — Euclide. *Se si costruiscono sui lati d'un triangolo rettangolo come lati omologhi, dei poligoni simili, il poligono corrispondente all'ipotenusa è la somma dei poligoni corrispondenti ai cateti.*

Siano X, Y, Z le aree dei poligoni simili di cui si tratta. Si ha, per una ben nota proprietà:

$$\frac{X}{\overline{BC}^2} = \frac{Y}{\overline{AC}^2} = \frac{Z}{\overline{AB}^2} = \frac{N + P}{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2}$$

Ma per il teorema di Pitagora:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 \qquad \text{dunque} \qquad M \equiv N + P$$

Nella fig. 532 a pag. 592 è evidente che i triangoli simili ACD, ABD presi insieme sono equivalenti al loro simile ABC.

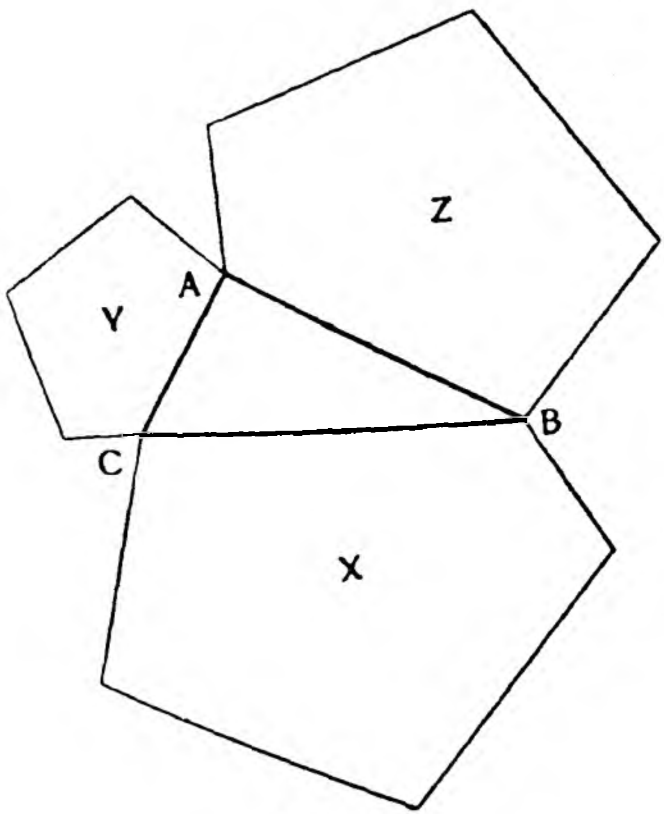


Fig. 539.

II. — Pappo. *Su due lati* AB *e* AC *d'un triangolo qualunque* ABC, *si costruiscano dei parallelogrammi qualunque* ABFG, ACIH; *si prolunghino i lati* FG, IH *fino al loro incontro* L; *si conduca* AL *e la si prolunghi al di là di*

BC *d'una lunghezza* MK = LA. *Il parallelogramma* BCDE *avente per lati, in grandezza e direzione,* BC *e* MK *è equivalente alla somma dei due parallelogrammi precedenti.*

Infatti si ha:

parallelogr. $ABFG \equiv$ parallelogr. $ABE'L$
parallelogr. $ACIH \equiv$ parallelogr. $ACD'L$

ed essendo $MK = AL$ si ha pure:

parallelogr. $ABE'L \equiv$ parallelogr. $BEKM$
parallelogr. $ACD'L \equiv$ parallelogr. $CDKM$

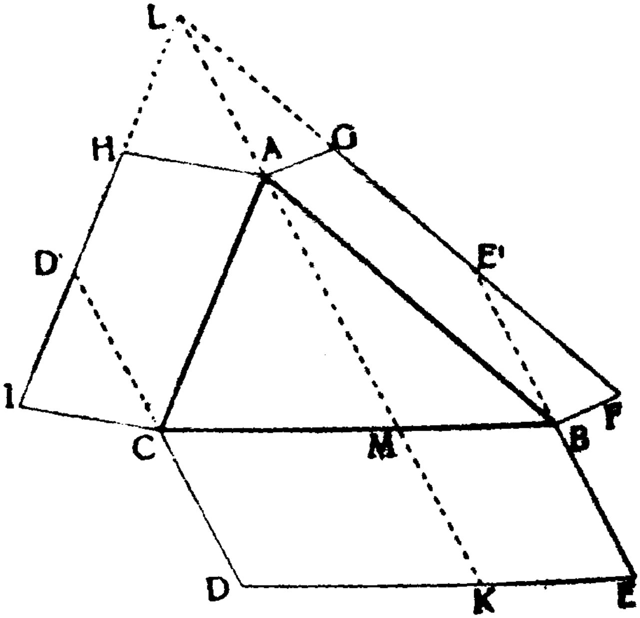


Fig. 540.

Dunque:

parall. $ABFG$ + parall. $ACIH \equiv$ parall. $BCDE$

Osservazioni. — Applicando questo procedimento di dimostrazione al teorema di Pitagora, si ricade nella figura di Nassir-ed-Din (fig. 511 a pag. 579).

333. — *In un parallelepipedo rettangolo il quadrato della diagonale è equivalente alla somma dei quadrati delle 3 costole.*

IV. – *In ogni piramide triangolare nella quale 3 facce siano tra loro perpendicolari, il quadrato della quarta faccia è equivalente alla somma dei quadrati delle tre prime.*

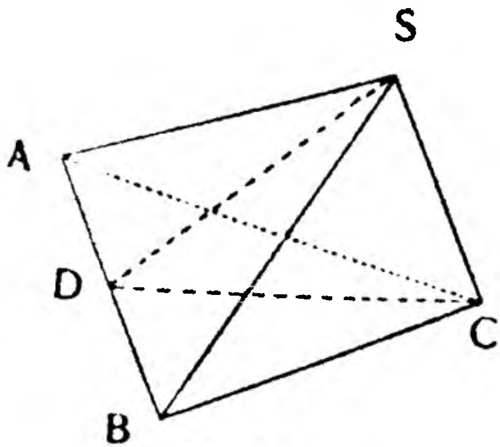


Fig. 541.

Sia S il vertice del triedro tri-rettangolo e ABC la base corrispondente della piramide. Abbassiamo la perpendicolare SD su AB e conduciamo CD. Essendo CS perpendicolare al piano ASB, CD lo è ad AB. Applicando allora il teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli della fig. 541, si ha:

$$\overline{AB}^2 \times \overline{CD}^2 = \overline{AB}^2 \times (\overline{SD}^2 + \overline{SC}^2) =$$

$$= \overline{AB}^2 \times \overline{SD}^2 + \overline{AB}^2 \times \overline{SC}^2 =$$

$$= \overline{AB}^2 \times \overline{SD}^2 + (\overline{SA}^2 + \overline{SB}^2)\,\overline{SC}^2 =$$

$$= \overline{AB}^2 \times \overline{SD}^2 + \overline{SA}^2 \times \overline{SC}^2 + \overline{SB}^2 \times \overline{SC}^2$$

Dunque sarà:

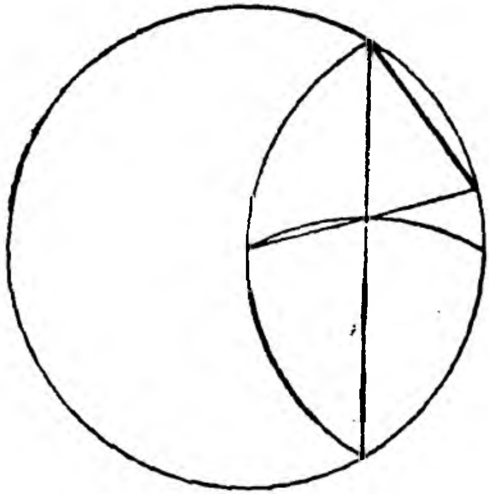
$$\overline{ABC}^2 \equiv \overline{ASB}^2 + \overline{ASC}^2 + \overline{BSC}^2$$

Soluzioni semplici di alcuni problemi.

Non sempre nei trattati di Geometria o nei Corsi di Disegno geometrico è indicata, per un dato problema, la costruzione più semplice, come già ebbe a rilevare il Lemoine nella sua *Geometrografia*. Ciò potrà rilevarsi dai pochi esempi che seguono.

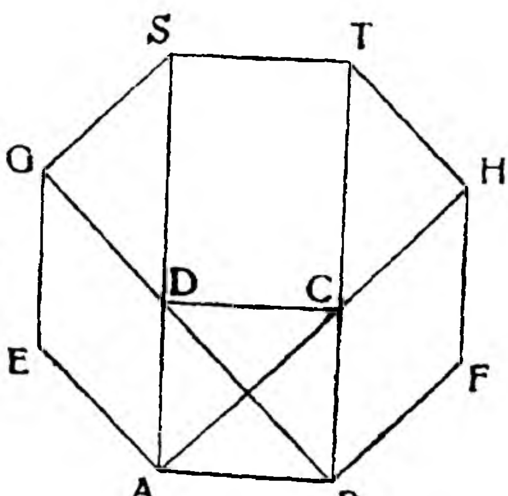
I. — *Ottagono regolare.* La costruzione indicata nella fig. 542 è forse la più semplice possibile per iscrivere l'ottagono in un circolo.

Fig. 542.



II. — *Costruire l'ottagono regolare, dato il lato.* Costrutto il quadrato (fig. 543) sul lato dato e condotte le sue diagonali AC, BD basterà condurre le parallele ad esse per A e B. Por-

Fig. 543.



tare AB su queste rette in E, F e da C in H e da D in G sulle diagonali del quadrato e finalmente da G ed H in S e T sui lati AD, BC del quadrato stesso, prolungati.

In modo analogo si farebbe la costruzione quando fosse dato il lato dell'ottagono stellato.

III. — *Costruire il pentagono regolare, dato il lato.* Sia AB il lato dato; DE la perpendicolare sul suo mezzo; $AC = AD$, ecc. Descrivendo da A e B come centri, con raggio BF due archi si

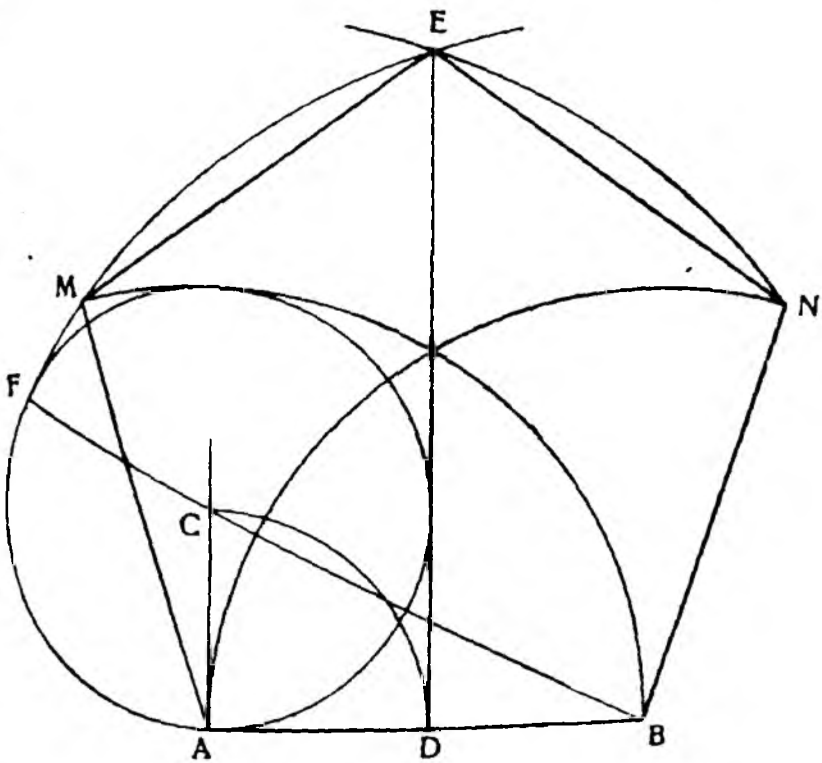


Fig. 544.

ha nella loro intersezione il vertice E del pentagono; segando detti archi con quelli descritti dagli stessi centri col raggio AB si hanno gli altri due vertici MN del pentagono.

La dimostrazione è ovvia, poichè BF non è altro che il lato del pentagono stellato iscritto.

IV. — *Dati quattro punti* A, B, C, D *non tutti sulla stessa retta, costruire il quadrato i cui lati passano rispettivamente per essi punti.* Conduco AC (fig. 545) e da B la perpendicolare ad essa, sulla quale porto $BE = AC$. La retta DE sarà la direzione d'uno dei lati del quadrato; basterà quindi condurre ad essa la parallela da B e le perpendicolari da A e C.

Si noti che la perpendicolare alla AC si può condurla da B o da D, e che su ciascuna di queste rette si può portare il segmento AC in due sensi da B o da D, d'onde quattro solu-

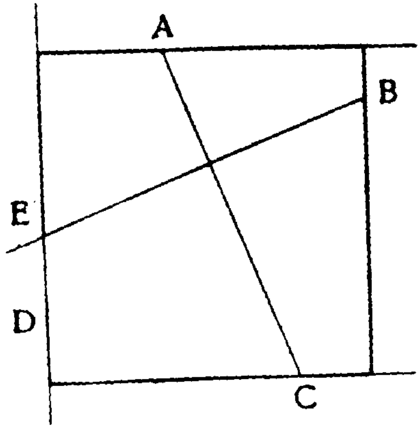


Fig. 545.

zioni, che due a due coincidono. Inoltre, come prima coppia di punti, si può scegliere una qualsiasi delle sei combinazioni binarie dei quattro punti dati; a tali coppie primitive di punti

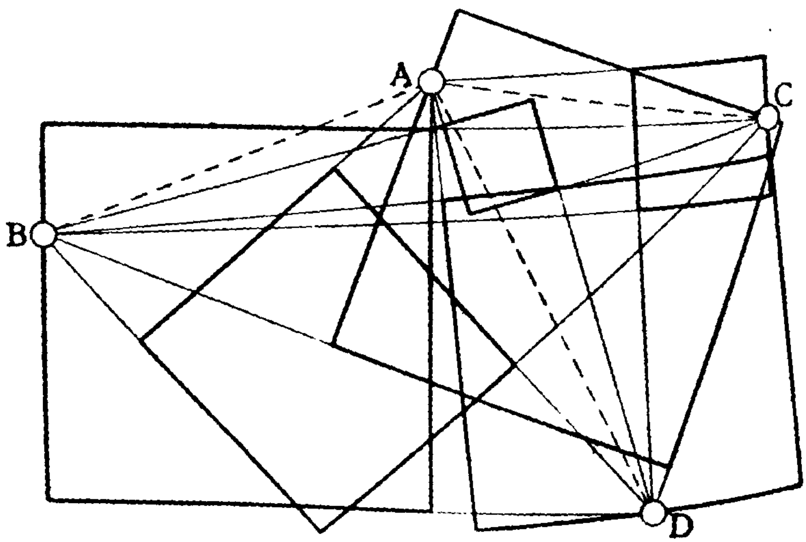


Fig. 546.

corrisponderebbero queste soluzioni fra le sei che indicheremo con a, b, c, d, e, f:

AB	$2a, 2b$	BC	$2e, 2f$
AC	$2c, 2d$	BD	$2c, 2d$
AD	$2e, 2f$	CD	$2a, 2b$

Evidentemente basta considerare, ad es., la terza di coppie di punti AB, AC, AD e le relative perpendicolari dai soli punti C, D, B, rispettivamente, con le già accennate doppie soluzioni dipendenti dal doppio senso del segmento AB, AC o AD.

Nella fig. 546 sono rappresentate le 6 soluzioni.

Osservazione. — Quando i punti dati E, F, G, H, sono in linea retta, le 6 soluzioni sono due a due simmetriche rispetto alla retta stessa.

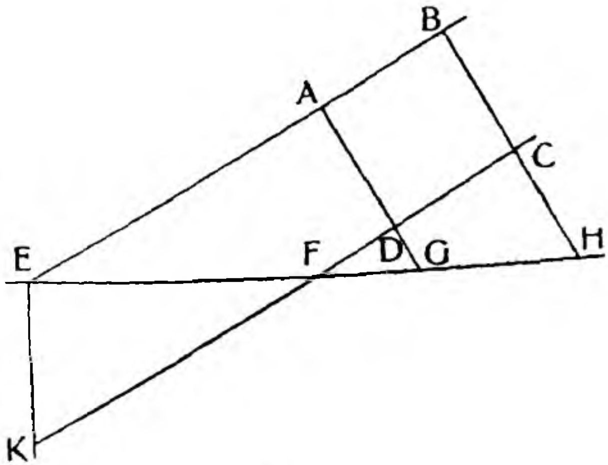


Fig. 547.

Nella fig. 547, posta la condizione che AB, BC, CD, DA debbano passare, rispettivamente, per E, H, F, G non avremo che da portare, sulla perpendicolare alla EH in E, $EK = GH$, unire K con F, ecc. Portando EK in senso opposto si avrebbe la soluzione simmetrica.

V. — *Costrurre il quadrato sul segmento di retta dato AB.*

Da A e B come centri (fig. 548) con AB per raggio, descriviamo due archi di circolo che si segheranno in C. Da C come centro, e con lo stesso raggio, tracciamo un'altra circonferenza; conduciamo i diametri ACD, BCE, poi le rette AE

e BD che incontreranno i primi due archi nei due vertici voluti M, N del quadrato. In questa costruzione si ha il vantaggio che tutti gli archi vengono tracciati con lo stesso raggio.

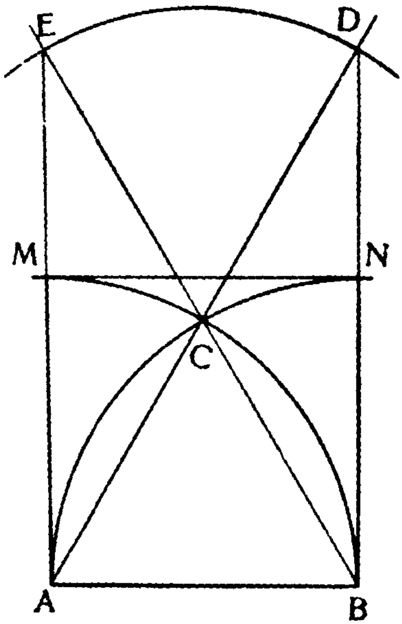


Fig. 548.

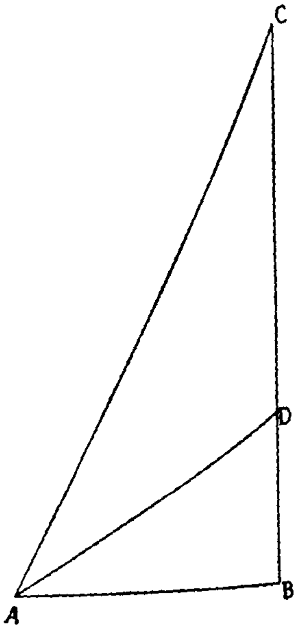


Fig. 549.

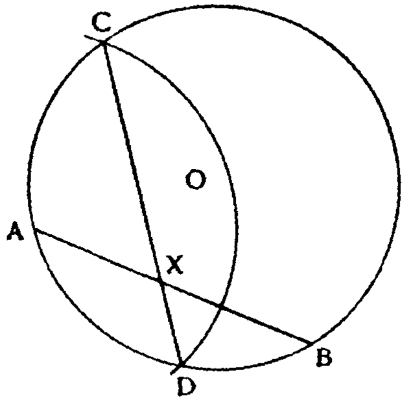


Fig. 550.

VI. — *Divisione d'un segmento di retta, in media ed estrema ragione.* Sia $A B = a$ (fig. 549) il segmento di retta dato. Conduciamo $B C = 2 a$ perpendicolare ad $A B$, e la bisettrice $A D$

vo- dell'angolo BAC; questa incontrerà BC in D; BD risulterà il
gio segmento maggiore di AB diviso in media ed estrema ragione.

VII. – *Costruzione d'una terza proporzionale.* Per costruire l'espressione $x = \frac{a^2}{b}$ descriviamo un circolo qualunque O.

C Prendiamo (fig. 550) una corda $A B = b$ e dal punto A come centro, con raggio a, descriviamo una seconda circonferenza che segherà la prima in C e D. Sia X il punto d'intersezione delle corde AB , CD; AX sarà la terza proporzionale cercata, poichè i triangoli ADX , ABD sono equiangoli, ecc. (1).

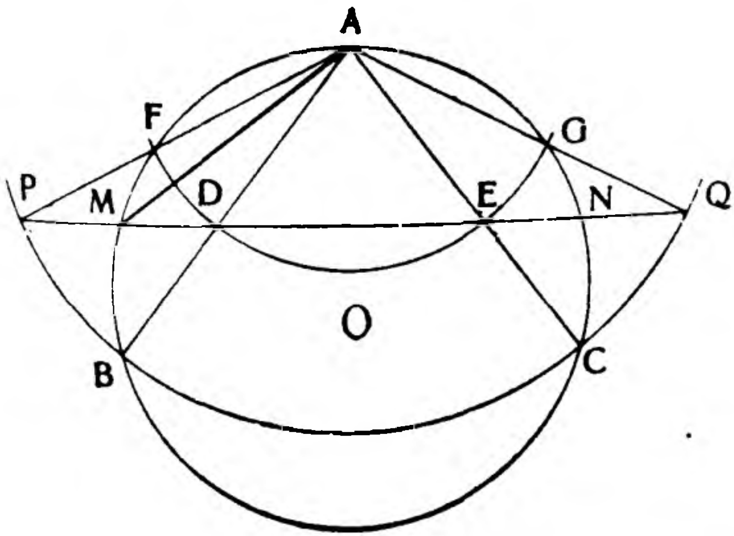


Fig. 551.

VIII. – *Costruire la media proporzionale fra due lunghezze date* a , b. La seguente costruzione, del Prof. L. Collette, non richiede che quattro operazioni di compasso e tre di riga.

Tracciamo una circonferenza O con raggio (fig. 551) visibilmente maggiore della metà della maggiore delle lunghezze date a , b. Da un punto qualunque A di detta circonferenza, come centro, con raggi a e b tracciamo due archi di circolo che segheranno la prima circonferenza rispettivamente in B , C e F, G. Il secondo arco sega le rette AB , AC in D , E; la retta $D E$ sega la circonferenza O in M , N. La corda $A M$ è media proporzionale fra le rette $A D$ e $A B$, perchè i triangoli AMD , ABM sono equiangoli.

(1) Vedasi pure al § « *Geometria del compasso* » la soluzione di Mascheroni.

Geometria dei poligoni articolati.

Con sistemi di sbarre rigide articolate si possono ottenere trasformazioni di movimenti e tracciamenti di linee geometriche assai interessanti. Tali sistemi sono quindi da tempo usati sia in meccanica, sia come *compassi* per il tracciamento di curve, ecc. Il ben noto *pantografo* (pagina 616) ne è un esempio. Non esiste ancora che una teoria frammentaria relativa a questa materia; non darò qui che un cenno su alcuni dei principali e meno complicati sistemi immaginati, a complemento di quanto in proposito se ne è già detto trattando di argomenti diversi (vedi pag. 249, 380, 479 e seguenti).

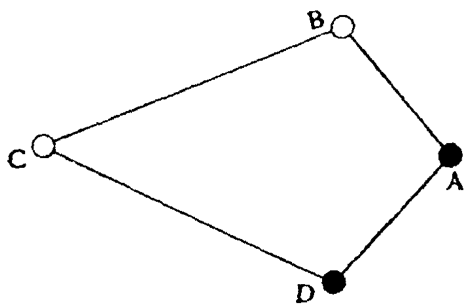


Fig. 552.

Il *romboibe* (fig. 552) è costituito da due coppie di sbarre $AB = AD$ e $CB = CD$. Nelle sue deformazioni le diagonali si conservano perpendicolari, il che si verifica in tutti i quadrilateri deformabili, a diagonali perpendicolari.

Reso fisso uno dei lati del romboide (1) un punto del piano rigidamente collegato al lato opposto descrive una curva *inversa di conica* e l'intersezione dei due lati adiacenti descrive una curva di Cassini. Nel caso particolare in cui (come nella fig. 553) si ha $\overline{GH} = 2\,\overline{HL}$, se IL è fissa, A descrive un giro mentre H ne descrive due.

---

(1) Nelle figure relative a sistemi articolati sono indicate con cerchietto *nero* le articolazioni che rimangono *fisse* durante il moto del sistema.

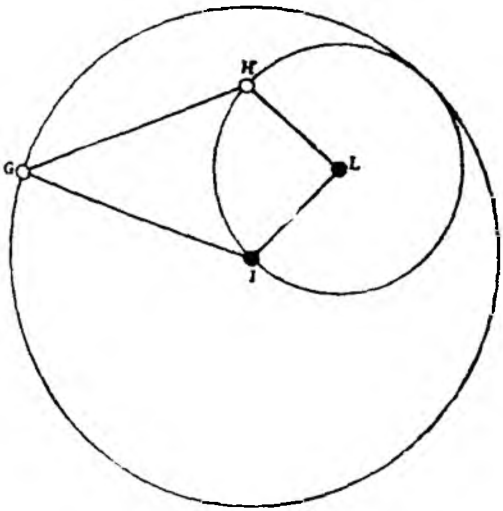


Fig. 553.

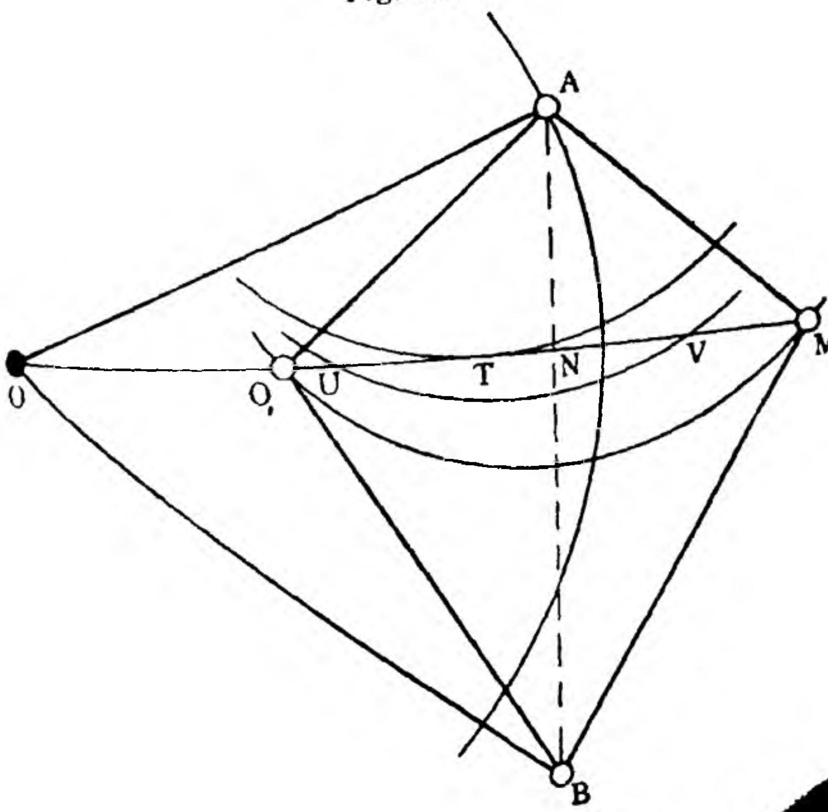


Fig. 554

Inversori. — Diconsi *inversori* i sistemi articolati coi quali si può ottenere la curva *inversa* d'una curva data, come già si è veduto sopra.

Consideriamo (fig. 554) un circolo $O\ (O\,A)$. I circoli di raggio costante qualunque aventi il centro sulla circonferenza $O\,(OA)$ segheranno un raggio di questa in punti O_1, M; U, V . . . . . tali che si avrà (1):

$$\overline{O\,O} \cdot \overline{OM} = \overline{O\,U} \cdot \overline{O\,V} = \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot = \overline{O\,T}^2$$

È facile costruire su questo principio un inversore (fig. 555) nel quale, se O è fisso, i vertici O_1 ed M descriveranno curve una inversa dell'altra. Nell'inversore rappresentato nella figura 556 al punto O_1 si fa descrivere un *circolo* collegandolo

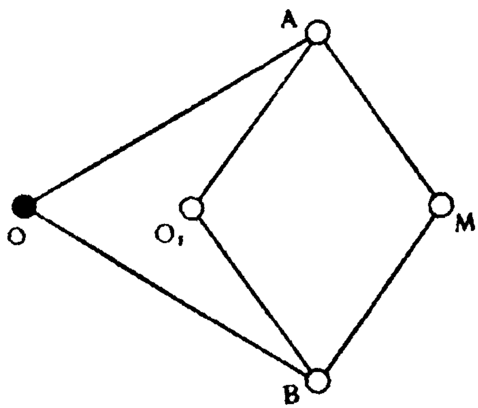


Fig. 555.

alla sbarra $C\,O_1$; in tal caso lo strumento può servire come *compasso* per descrivere archi di circolo di grande diametro.

Si noti che non è necessario che l'inversore di cui si tratta sia simmetrico rispetto all'asse $O\,O_1\,M$ (fig. 555) bastando che il vertice B si trovi sulla perpendicolare condotta da A sul punto di mezzo N di $O_1\,M$, come vedesi nella figura medesima.

Quando M coincide con O_1 (fig. 556) le sbarre $O_1\,A$ e $O_1\,B$ si trovano sulla stessa retta e costituiscono una corda del circolo $O\,(OA)$; il circolo di centro O tangente a tale corda, se-

(1) Questa mia dimostrazione mi sembra più semplice di quella basata sul *teorema di Peaucellier*. (N. Annales, Mathém. 1873 - pag. 73).

gherà il circolo CO_1 in R ed S che appartengono al circolo inverso di CO_1 ossia:

$$\overline{OO_1} \cdot \overline{OM} = \overline{OS}^2$$

Il tracciamento della circonferenza C_1 (C_1 R) inversa di CO_1 si può ottenere solo limitatamente all'arco $VRSZ$, essendo V e Z le intersezioni di tale circonferenza OC_1 con l'altra di

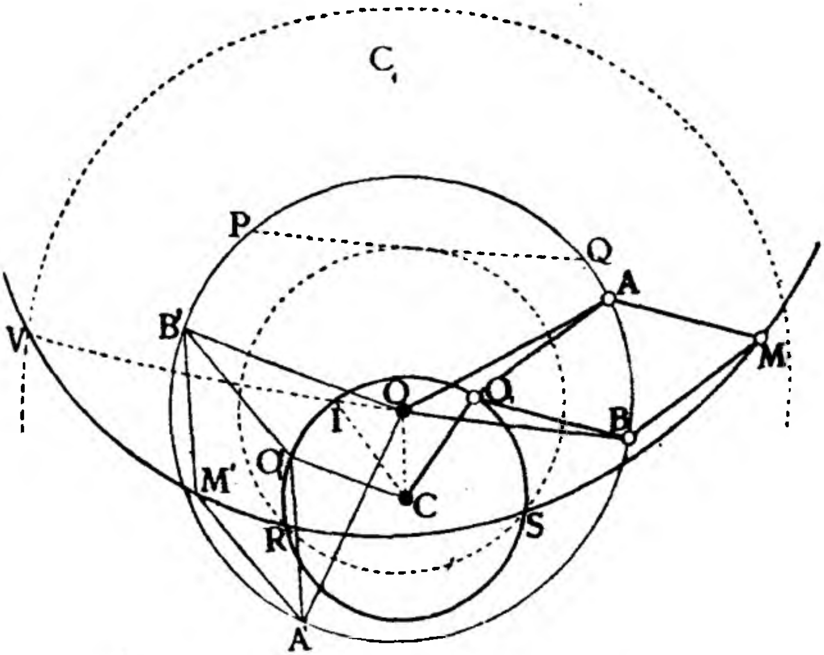


Fig. 556.

centro O e raggio $OA + AO_1$. È facile determinare i punti V, Z, indipendentemente dal circolo C_1 (C_1 R) costruendo il triangolo COI, nel quale:

$$\overline{OI} = \overline{OA} - \overline{AO_1}$$

e facendo poi $\overline{IV} = 2\,\overline{AO_1}$, ecc.

— L'inversore di Hart è basato sul teorema di S. Roberts: *In un trapezio isoscele articolato OSTP i cui due lati uguali e le diagonali hanno lunghezze invariabili, una retta* a b c d *condotta parallelamente alle basi per un punto fisso di* $O\,S$, *dà un prodotto* a b · a c *che è costante, qualunque sia il trapezio formato dalle quattro rette date* (fig. 557).

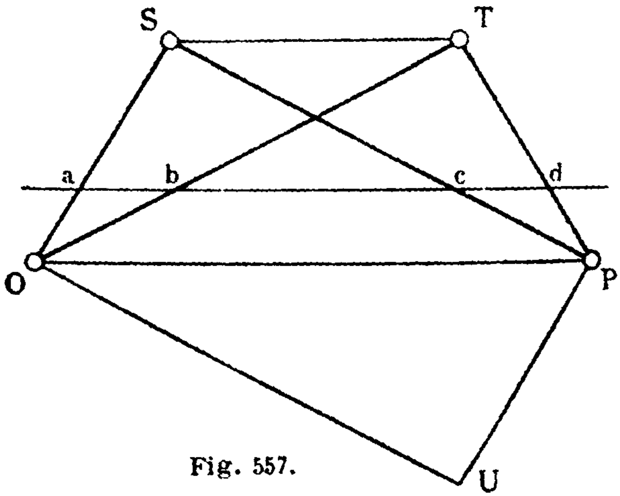


Fig. 557.

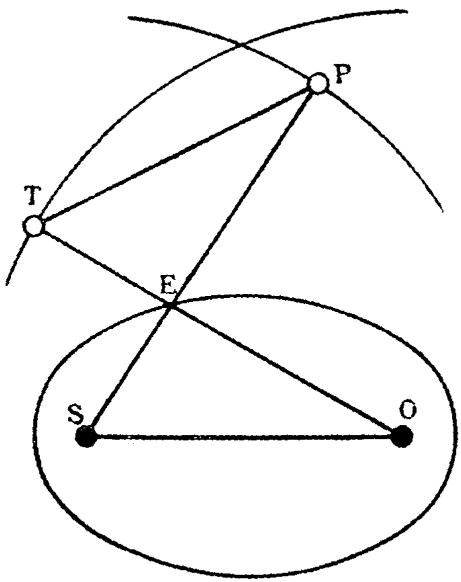


Fig. 558.

Siccome $b\,a \cdot b\,d = a\,b \cdot a\,c$ si può prendere a o b come polo d'inversione. Questo inversore viene detto anche *contro-*

tra-

parallelogramma poichè risulta dal ribaltamento del semi-parallelogramma OPU attorno alla diagonale OP.

Se O, S sono fissi, il luogo dell' intersezione I di OT con PS è un'ellisse (fig. 558) e un punto qualsiasi della PT descrive una inversa di conica.

Se O, T sono fissi, il luogo delle intersezioni M di OS con PT è un' iperbola (fig. 559). Se inoltre si ha $OT = PT\sqrt{2}$, il punto di mezzo di PS descrive una lemniscata.

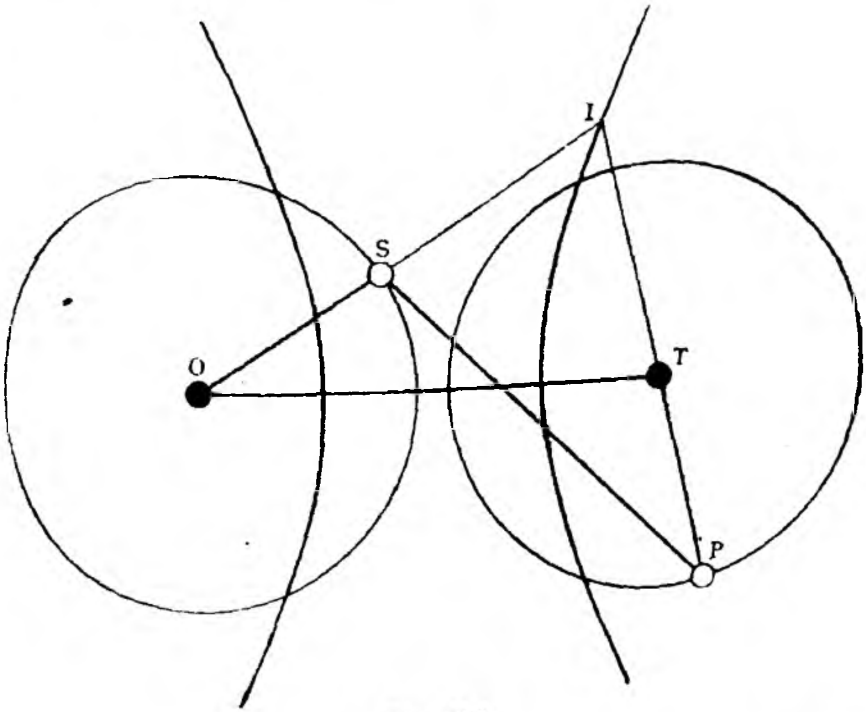


Fig. 559.

Estrattori binomii quadratici. Consideriamo un romboide $ABCD$ (fig. 560). Articoliamo nei punti di mezzo M, N dei suoi lati minori que sbarre di lunghezza $\frac{AB}{2}$ cioè AM, e articoliamole in O. Avremo l'estrattore di Sylvester, nel quale:

$$\overline{OC}^2 - \overline{OA}^2 = \text{Costante}$$

Infatti la diagonale BD, perpendicolare ad AC, passa per O e si ha:

$$\overline{OC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BO}^2 \qquad \overline{OA}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BO}^2$$

e sottraendo membro a membro:

$$\overline{OC}^2 - \overline{OA}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{AB}^2 = \text{Costante}$$

Analogo risultato si ottiene prolungando i due lati adiacenti disuguali d'un romboide, di quantità ad essi uguali rispettivamente.

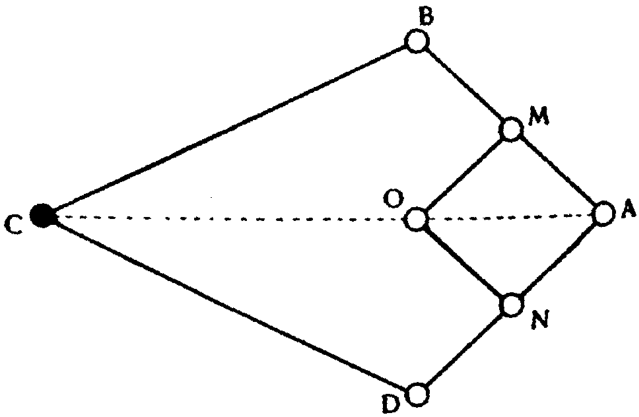


Fig. 560.

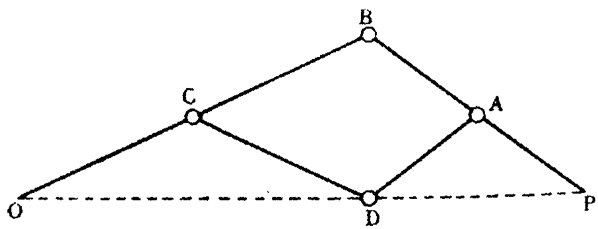


Fig. 561.

Si ha la relazione seguente fra i tre punti O, D, P (fig. 561) che risultano in linea retta:

$$\overline{OD}^2 - \overline{DP}^2 = \text{Costante}$$

Inoltre, se, come nella fig. 562, facciamo $\overline{BC} = \overline{AB}\sqrt{2}$, il punto P descrive una *lemniscata*, quando C, D sono fissi. È ovvio che la sbarra CD è superflua, come tutte quelle che collegano due articolazioni *fisse*.

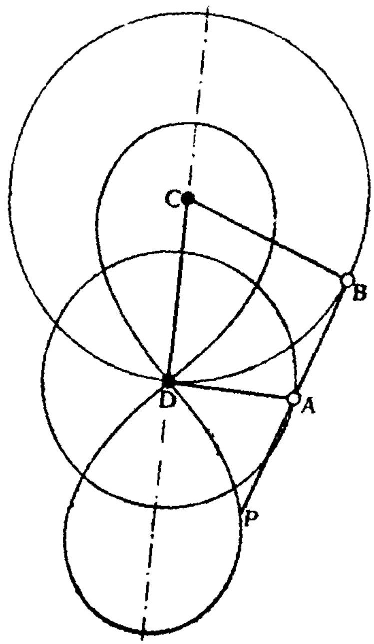


Fig. 562.

Guide per trasformare il moto circolare continuo in rettilineo continuo. — Se nella fig. 556 si fa $OC = CO_1$, il luogo del punto M si riduce ad una retta MN perpendicolare alla OC (fig. 563). Con questo inversore di Peaucellier venne risolto per la prima volta il problema della trasformazione *rigorosa* del movimento circolare in rettilineo. Enunciatone il principio in *Nouvelles Annales Mathémat.* del 1864 p. 414 il Peaucellier ne diede i particolari nello stesso periodico del 1873 p. 71, mentre Lipkine di Pietroburgo aveva trovato lo stesso principio nel 1870 e ne aveva dato la teoria nel 1871. Gli inglesi Sylvester, Hart e Kempe svilupparono questa teoria.

Lo stesso risultato si può ottenere con altre disposizioni quali, ad es., quelle di Kempe costituite da un doppio *romboide* come vedesi nelle fig. 564 e 565. Nella prima i due romboidi sono $ABCD$, $BCEF$; il sistema è completato con le due sbarre DO, BO che formano con AB, AD una losanga. Essendo fissi D e O, il punto E descrive la punteggiata perpendicolare a DO.

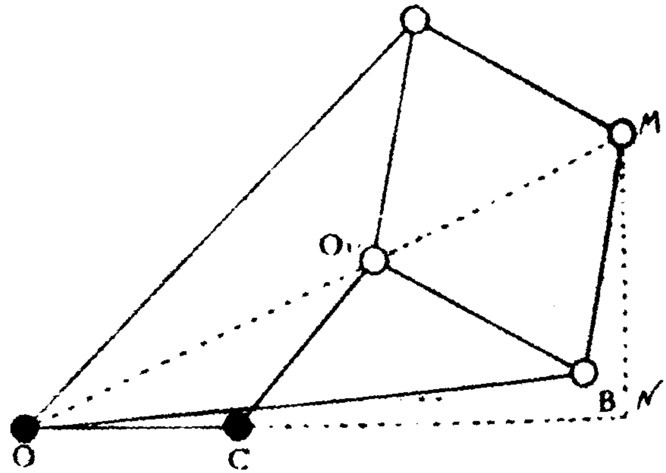


Fig. 563.

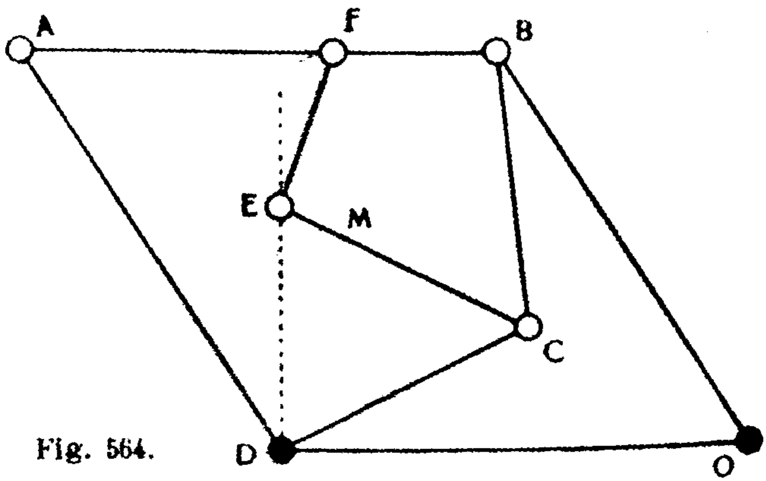


Fig. 564.

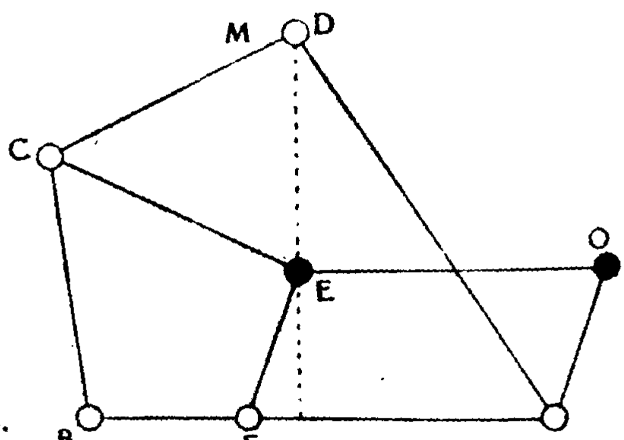


Fig. 565.

Nella fig. 565 il sistema dei due romboidi è completato con le sbarre $A\,O$, $E\,O$ che formano con $F\,A$, $F\,E$ un parallelo-

Fig. 566

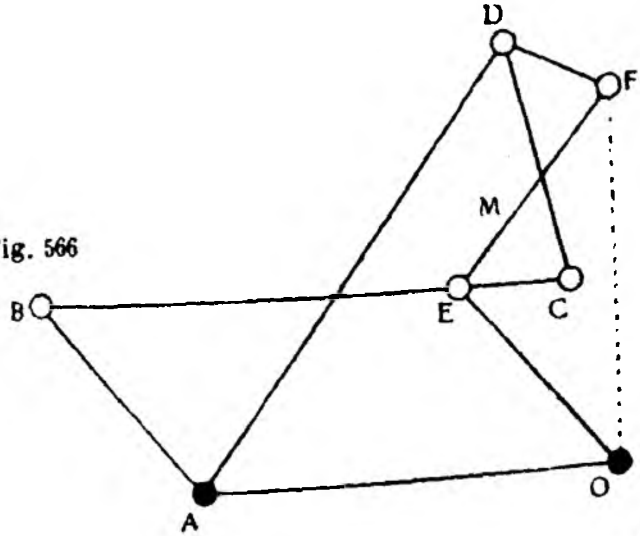
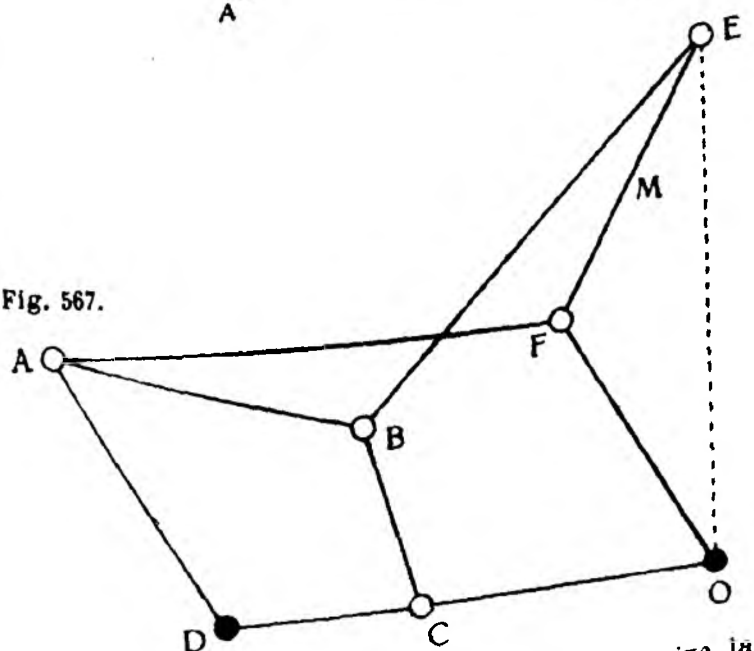


Fig. 567.



gramma. Quando E , O sono fissi, il punto D descrive la perpendicolare alla $A\,B$ che passa per E. Come abbiamo veduto combinati due romboidi, così possiamo combinare due controparallelogrammi (fig. 566) $ABCD$, $CDFE$ completando con EO, AO il parallelogramma $BAOE$. Fissando i punti A ed O, il punto F descrive la perpendicolare ad AO che passa per O.

Così pure si possono combinare un romboide $ABCD$ con un contro-parallelogramma $ABEF$ completando il parallelogramma $AFDO$; nel qual caso, fissi D e O il punto E descrive la perpendicolare sulla DO che passa per O (fig. 567).

Altri sistemi articolati furono ideati da Sylvester, da Kempe, da Hart ed altri per trasportare una lunghezza sulla propria direzione o parallelamente a sè stessa in modo che ogni suo punto descriva una perpendicolare alla sua direzione, per tracciare una figura simmetrica d'una figura piana rispetto ad una retta fissa, per estrarre la radice quadrata, per tracciare una parallela ad una retta data per due punti, per tracciare per un punto dato una retta formante angolo dato con una retta data, ecc., ma sono in generale assai complicati.

Pantografo.

Sui lati d'un parallelogramma articolato $ABCD$ (fig. 568) o sui prolungamenti di essi si prendano quattro punti L, M, N, O in linea retta. Ammettendo che essi rimangano fissi sui lati ai quali rispettivamente appartengono, mentre il parallelogramma si deforma, il rapporto delle distanze d'uno di questi punti a due degli altri rimane costante. Infatti, p. es., i triangoli MLB, MNC danno:

$$\frac{ML}{MN} = \frac{MB}{MC}$$

rapporto costante; così pure si ha:

$$\frac{LM}{LO} = \frac{BM}{AO}$$

rapporto costante, ecc. Su questo teorema è basata la costruzione del *Pantografo*, strumento ben noto, che permette di riprodurre rapidamente un disegno ampliandolo o rimpicciolendolo in una data proporzione.

Fissando, ad esempio, il punto M e facendo descrivere al punto L una figura data, il punto N descriverà una figura simile alla prima. Le due figure omotetiche descritte da L ed N avranno M per centro interno di similitudine.

Fissando L, i punti M ed O descriveranno figure omotetiche il cui centro di similitudine esterno sarà L. Lo stesso dicasi per il punto N poichè si ha:

$$\frac{LM}{MN} = \frac{MB}{MC}$$

da cui:

$$\frac{LM}{LM + MN} = \frac{MB}{MB + MC}$$

ossia:

$$\frac{LM}{LN} = \frac{BM}{BC}$$

rapporto costante. Goneralmente, in pratica, nelle applicazioni meccaniche $ABCD$ è una losanga; ma le stesse proprietà si hanno con un parallelogramma.

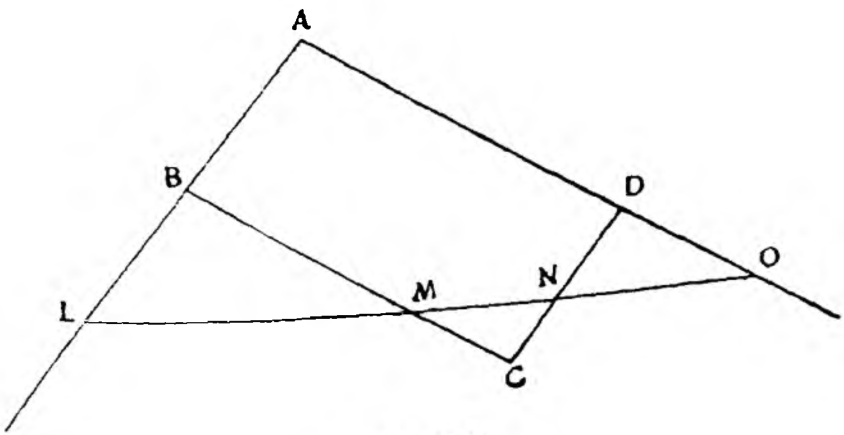


Fig. 568.

Il pantografo fu inventato da Scheiner nel 1601 e divulgato nella sua opera Pantographice (Roma, 1631). Sylvester lo modificò in varii modi, così da ottenere delle omotetie oblique nel qual caso gli ha dato il nome di *plagiografo*.

Polipantografo.

Una modificazione del comune pantografo abbiamo rappresentata nella fig. 569. Le sbarre sono articolate nei punti:

A , B , C , D , E , F , G 2 , 3 , 4

Quando si prende come centro di rotazione (punto fisso) il punto 1, e si fa scorrere la punta 5 sul disegno, le matite 2, 3, 4,

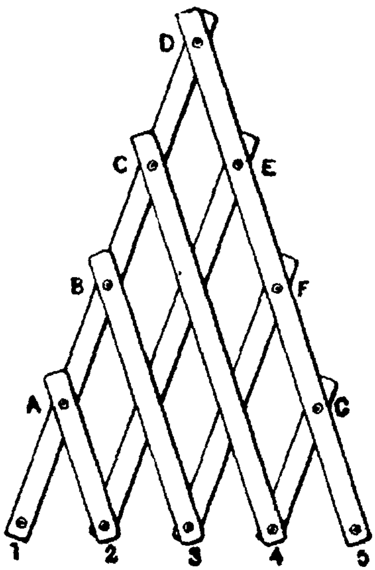


Fig. 569.

daranno copie rispettivamente $^1/_4$, $^1/_2$, $^3/_4$ più grandi del modello Quando 2 sarà scelto come punta tracciante sul modello, le matite 3 , 4 , 5 daranno copie rispettivamente due, tre e quattro volte più grandi dell'originale.

ROMPICAPO GEOMETRICI

Trasformazioni e scomposizioni di Poligoni.

1. – *Trasformare un poligono in un triangolo equivalente.*

Sia $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ il poligono dato e si voglia trasformarlo nel triangolo equivalente con la base sulla retta $A_1 A_5$; un vertice B assegnato su questa retta e un secondo vertice in

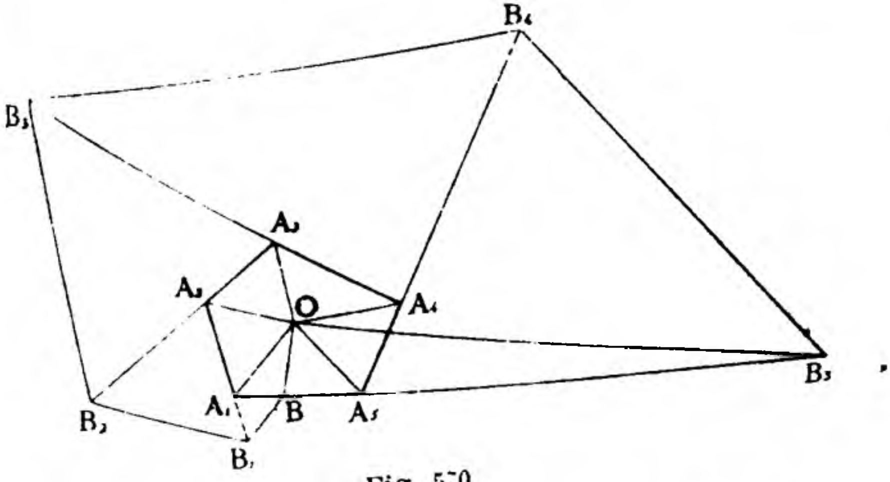


Fig. 570.

un punto O assegnato nell'interno del poligono. Congiunto O con i vertici del poligono si conduce per B una parallela ad OA_1 che determinerà sul prolungamento di $A_1 A_2$ un punto B_1; da questo si conduce la parallela ad $O A_2$ e così via fino ad ottenere sul prolungamento di $A_1 A_5$ il punto B_5.

I triangoli $OA_1 B_1$, OBA_1 sono equivalenti come, pure $OA_2 B_2$ $OB_1 A_2$, quindi:

$$OA_2 B_2 = O B A_1 + OA_1 A_2$$

epperò in ultimo si avrà:

$$OB B_5 = OBA_1 + OA_1 A_2 + OA_2 A_3 + OA_3 A_4 + OA_4 A_5$$

quindi:

$$O B B_5 \equiv A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$$

II. — *Trasformare un esagono regolare in un quadrato.*

Si comincia col trasformare l'esagono regolare in un parallelogramma, riunendone le due metà come in figura ottenendo $ADEF$ (fig. 571). Con centro F e raggio uguale alla media pro-

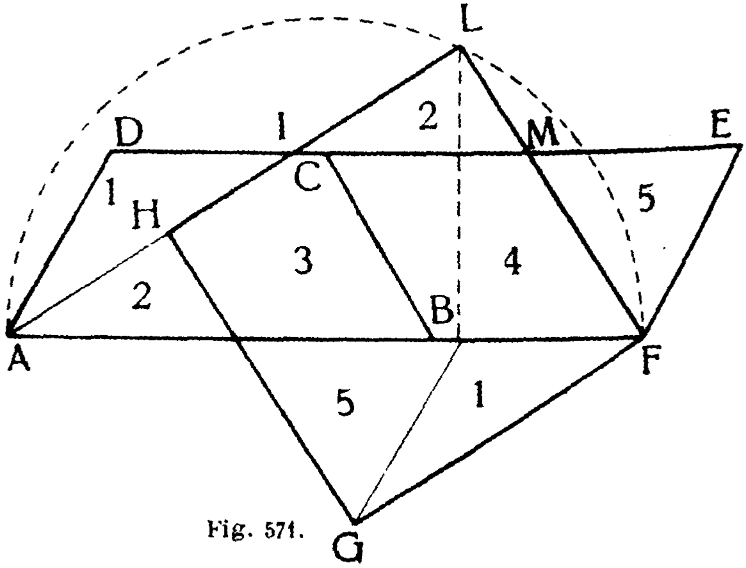


Fig. 571.

porzionale tra AF e l'altezza del parallelogramma, si traccia un arco, segando in L la semi-sirconferenza descritta su $A F$ come diametro. Condotta la $A L$, si fa $L H = L F$. Risulta così diviso l'esagono in cinque parti 1, 2, 3, 4, 5 che si possono riunire in quadrato nel modo indicato nella figura.

III. - *Scomporre un pentagono regolare in sette parti tali da poterle riunire formando un quadrato.*

Sia $ABCDE$ il pentagono dato (fig. 572). Prolunghiamo la sua diagonale AC di $AF = AB$ e conduciamo EF. Risulterà il trapezio $CFED$ equivalente al pentagono dato. Conduciamo allora pel punto medio H di EF la parallela a DC; avremo in tal modo il parallelogramma $GICD$ equivalente al pentagono.

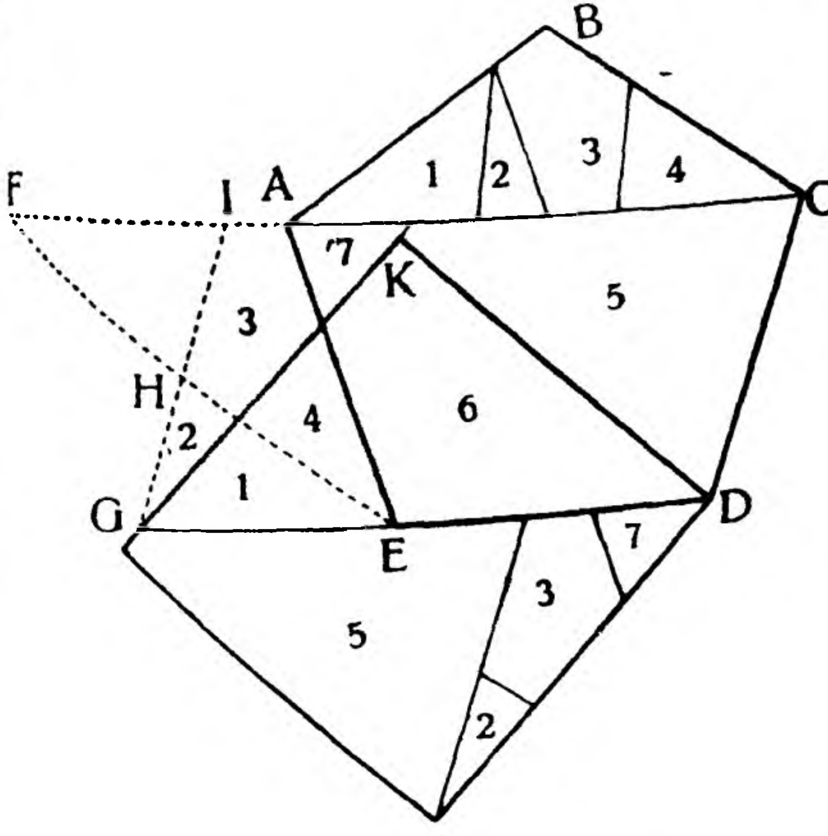


Fig. 572.

Descriviamo una semi-circonferenza su GD come diametro e seghiamola in K con un arco di centro D e di raggio uguale alla media proporzionale tra la base e l'altezza del parallelogramma $GICD$. Conducendo GK otteniamo i segmenti 1, 2, 3, 4, che corrispondono al triangolo ABC. Costrutto il quadrato con DK come lato riesce facile vedere come si possa comporlo con i segmenti del pentagono: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

IV. — *Dato un quadrato scomporlo in venti triangoli uguali.*

Si opera la scomposizione come è indicato nella fig. 573 partendo dai punti di mezzo de' lati del quadrato. Si può mettere il problema anche sotto questa forma: *Dati venti triangoli*

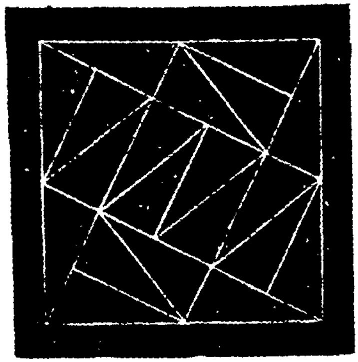


Fig. 573.

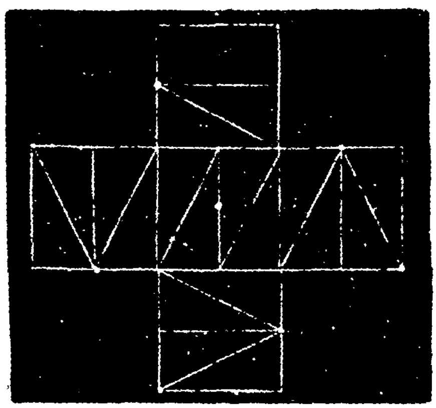


Fig. 574.

rettangoli uguali, coi cateti uno doppio dell'altro, disporli in quadrato o in cinque quadrati uguali. La fig. 574 risolve il problema nella sua seconda parte, dando di più la disposizione di croce ai cinque quadrelli.

V. — *Dato un quadrato* **ABCD** *scomporlo in parti che, riunite in altro modo, riproducano lo stesso quadrato in* **P Q R S.**

Si costruisca il quadrato *P Q R S* uguale al dato, con un lato passante per uno dei vertici *D* del medesimo. Si porti su *P Q*, il segmento $QT = PD$ e si tracci la parallela da *T* a *Q R*. Si porti ancora *A V* in *T H* e si conduca da *H* la parallela *H M*

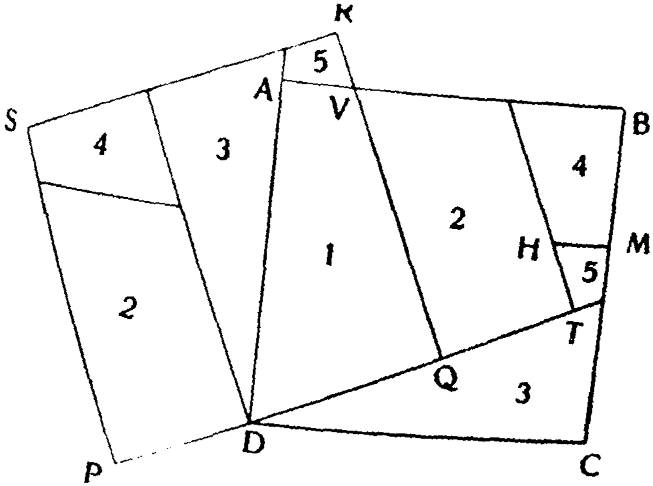


Fig. 575.

ad *AB*. Si avrà così scomposto il quadrato *ABCD* in un triangolo 3, e quattro quadrilateri 1, 2, 4, 5; di questi, il primo è comune ai due quadrati; quanto alle figure 2, 3, 4, 5, è facile vedere come si devono disporre per completare il quadrato *PQRS*.

VI. — *Dato un triangolo rettangolo coi cateti nel rapporto di 8 a 9 scomporlo in tre figure che, convenientemente unite, formino un quadrato* (fig. 576).

I. Soluzione. — Siano $AB = 9$ $BC = 8$. Conduco dal punto *D* medio di *AB* la parallela a *BC*. Divido *B D* in tre parti uguali e conduco *m p* , *n r* parallele a *B C*. Parimente divido *B C* in quattro parti uguali e conduco le parallele ad *AB* , *eF* , *gE* , *N*s. Ottengo così la spezzata *F G H L M N* che divide il trapezio *DECB* in due parti. Disponendo queste e il trapezio *ADE* come nella fig. 577 avrò il quadrato di lato 6.

II. Soluzione. — Faccio $BM = \frac{A\,B}{3}$ (fig. 578) e conduco $M\,N$ parallela a $B\,C$. Dal punto medio P dell'ipotenusa abbasso la

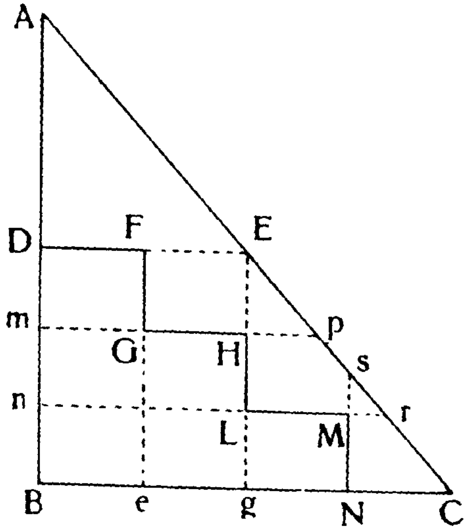


Fig. 576.

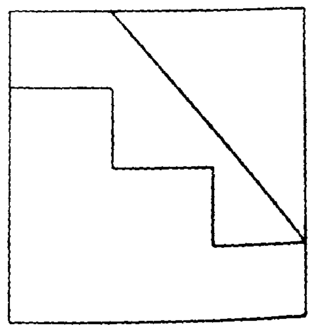
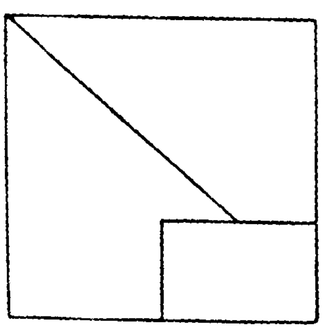


Fig. 577.



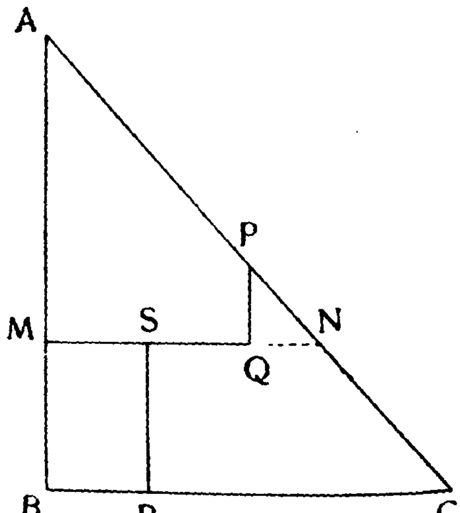


Fig. 578.

perpendicolare su BC fino in Q. Faccio poi $BR = \frac{B\,C}{4}$ e conduco la parallela RS ad AB. Dispongo infine le figure $APQM$, $PQSRC$, $MSRB$ nel modo indicato in figura ed ottengo il quadrato voluto.

VII. – *Dati due triangoli* A B C , A D C *di base comune e di altezze uguali, si può scomporli in elementi sovrapponibili.* (Gerwien).

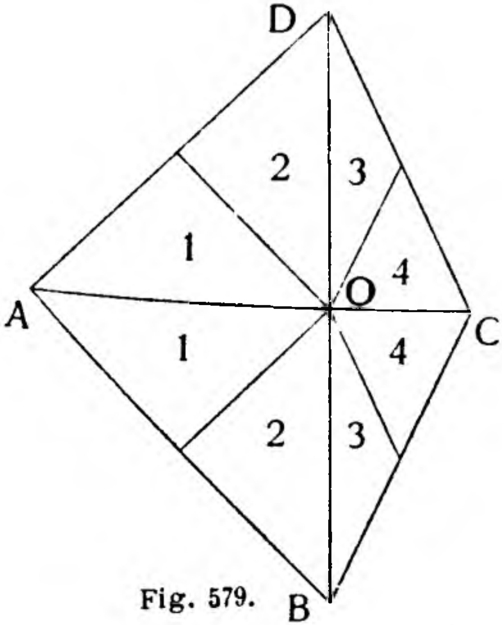


Fig. 579.

Condotta la congiungente dei vertici B e D che incontrerà in O la base comune $A\ C$, basterà tracciare da O in ciascuno dei triangoli dati, le parallele ai lati dell'altro. Si otterranno così quattro triangoli, due a due sovrapponibili, che in figura sono designati coi medesimi numeri.

Se il punto O cade in C, ciascuno dei triangoli dati riuscirà scomposto in due soli triangoli anzichè in quattro, ecc. Quando O cade fuori di AC la figura riesce molto complicata.

VIII. – Loculus di Archimede.

Secondo Mario Victorino (IV secolo) e Attilio Fortunaziano (VI secolo) Archimede avrebbe inventato un gioco geometrico, che essi chiamano *Loculus Archimedius*, e che consisterebbe in questo: *Dato un quadrato d'avorio suddiviso in 14 pezzi di forme poligonali assai differenti, riprodurre con questi pezzi non solamente il quadrato primitivo, ma anche altre figure.*

Mancavano altri schiarimenti in proposito, quando nel 1899 Enrico Suter di Zurigo, trovò una versione araba d'un libro d'Archimede sull'argomento. In detto libro l'immortale Geometra si propone di scomporre un quadrato in 14 elementi che siano in un rapporto razionale con la figura intiera o *sinte-*

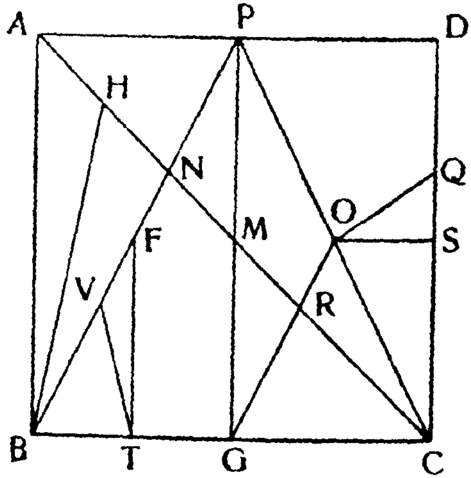


Fig. 580.

machion (riunione di ritagli). Come si vede lo scopo è dunque inverso di quello indicato dagli autori latini ed anche assai più scentifico, come era da presumere trattandosi di materia trattata da quel sommo.

La soluzione d'Archimede (una fra le tante che il problema comporta) è la seguente.

Sia $ABCD$ (fig. 580) il quadrato dato e G, S, P i punti di mezzo dei lati BC, CD, DA; conduciamo la diagonale AC e le rette PB, PG, PC; PB e PG segando la diagonale in N ed M. Uniamo B al punto di mezzo H di AN, G al punto medio O di PC, e O ad S. Facciamo poi passare per A e T una retta limitandola fra T e V ove sega la PB; uniamo T col punto medio F di PB; conduciamo la BOQ limitatamente al tratto OQ.

Avremo così scompartito il quadrato dato in 14 porzioni, 7 pel rettangolo PB e 7 pel rettangolo PC, che soddisfano alla condizione del problema. Sia Σ l'area del quadrato dato; avremo:

1.° Triang. $CSO \equiv \frac{1}{3}$ triang. $DCP = \frac{1}{16}\Sigma$

2.° $BC = 4\ OS$; $QC = 4\ QS$; $SC = 3\ QS$; triang. $OSQ \equiv$ $\equiv \frac{1}{3}$ triang. $CSO \equiv \frac{1}{48}\Sigma$.

3.° Quadrato $DQOP \equiv$ triangolo $DCP -$ (triangolo $CSO +$ triangolo $OSQ) \equiv \frac{1}{4}\Sigma - \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{48}\right)\Sigma \equiv \frac{1}{6}\Sigma$.

4.° 5.° 6.° — Triangolo $GMR \equiv \frac{1}{24}\Sigma$; triang. $COR \equiv \frac{1}{24}\Sigma$ e triang. $GCR \equiv \frac{1}{12}\Sigma$. Infatti i triangoli simili MOR e CGR danno:

$$\frac{MO}{GC} = \frac{1}{2} = \frac{OR}{GR} = \frac{MR}{CR}$$

dunque triang. $GMR \equiv \frac{1}{2}$ triang. $GCR \equiv$ triang. COR; triangolo $GMR \equiv \frac{1}{3}\ GMC$. Ma triang. $GMC \equiv \frac{1}{2}$ triang. $PGC \equiv$ $\equiv \frac{1}{8}\Sigma$; dunque triang. $GMR \equiv$ triang. $COR \equiv \frac{1}{24}\Sigma$ e triangolo $GCR \equiv \frac{1}{12}\Sigma$.

7.° Quadrato $MROP \equiv$ triangolo $PGO -$ triangolo $GMR \equiv$ $\equiv \frac{1}{8}\Sigma - \frac{1}{24}\Sigma \equiv \frac{1}{12}\Sigma$.

8.° Triang. $MPN =$ triang. $GMR \equiv \frac{1}{24}\Sigma$.

9.° Triang. $VTF \equiv \frac{1}{48}\Sigma$. Infatti i triangoli simili VTF e VBA danno:

$$\frac{TF}{BA} = \frac{1}{2} = \frac{VF}{BV}$$

dunque triang. $VTF \equiv \frac{1}{2}$ triang. $BTV \equiv \frac{1}{3}$ triang. $BVF \equiv$ $\equiv \frac{1}{12}$ triang. $PGB \equiv \frac{1}{48}\Sigma$.

10.° Triang. $BTV \equiv 2$ triang. $VTF \equiv \frac{1}{3}\Sigma$.

11.° Triang. $ANP \equiv \frac{1}{12}\Sigma$ poichè i triangoli ANP e GCR sono uguali.

12.° e 13° Triang. $ABH \equiv$ triang. $NBH \equiv \frac{1}{12}\Sigma$. Infatti, siccome $BC = 2\,AP$ si ha $BN = 2\,NP$ e triangolo $NAB \equiv 2$ triangolo $ANP \equiv \frac{1}{6}\Sigma$; dunque triang. $ABH \equiv$ triang. $NBH \equiv \frac{1}{2}$ triang. $NAB \equiv \frac{1}{12}\Sigma$.

14.° Pentagono $NMGTF \equiv$ trapez. $PGTF$ — triang. $MPN \equiv$ $\equiv \frac{3}{4}\ BGP$ — triang. $MPN \equiv \frac{3}{16}\Sigma - \frac{1}{24}\Sigma \equiv \frac{7}{48}\Sigma$.

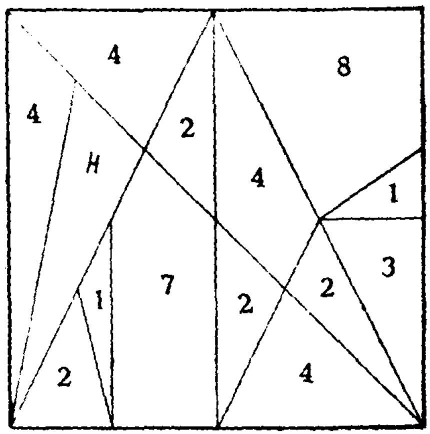


Fig. 581.

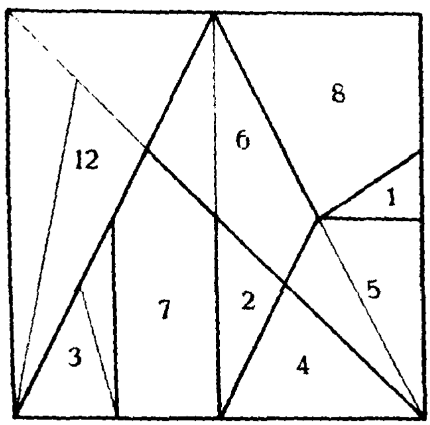


Fig. 582.

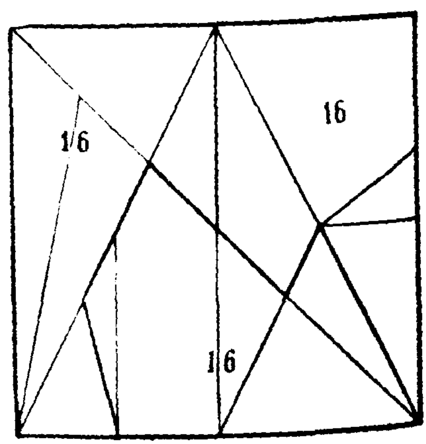


Fig. 583.

In questa fig 581 sono indicati in quarantottesimi dell'area del quadrato i valori delle aree parziali.

Nota A. — La costruzione indicata, e i relativi risultati valgono per un parallelogramma qualunque.

Nota B. — Si possono dare ai 24 pezzi ora studiati, altri aggruppamenti, come ad esempio, quello indicato dalla fig. 582 in cui le aree sono come 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 12; e dalla fig. 583 nella quale sono come tre numeri uguali (16).

IX. — **Problema di Hart.** *Dati due poligoni simili, scomporre il maggiore in modo che con una conveniente disposizione degli elementi ottenuti si possa comporre un terzo poligono simile ai dati e che contenga nel suo interno il minore.*

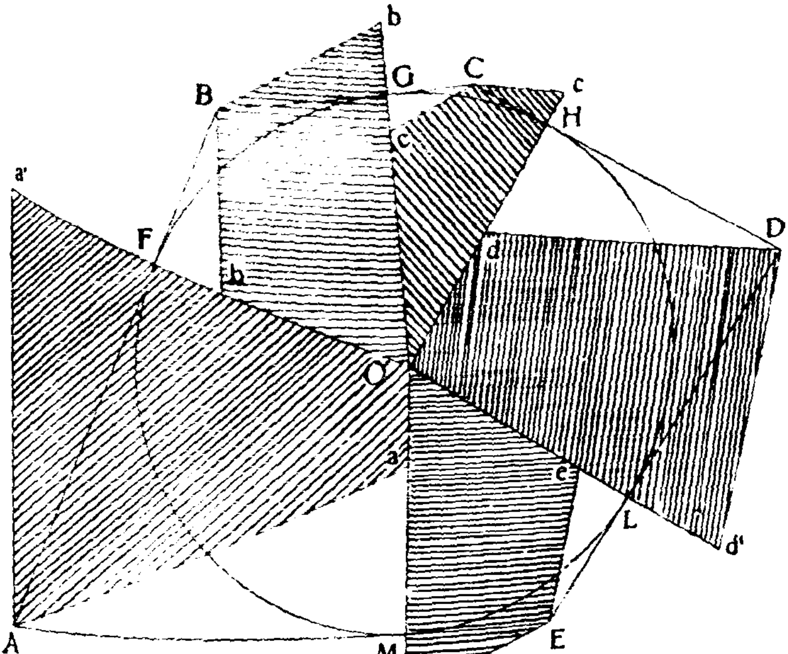


Fig. 584.

Questo problema proposto da Hart nel 1877 venne da lui risolto soltanto nei due casi di poligoni iscrittibili e circoscrittibili al cerchio.

Poligoni circoscrittibili. Siano $A\,B\,C\,D\,E$, $A'\,B'\,C'\,D'\,E'$ (fig. 584 e 585) i due poligoni simili dati; F, G, H, L, M e F', G', H', L, I', i punti di contatto dei loro lati col circolo iscritto. Indichiamo le distanze dei vertici A', B'.... ai punti di contatto F', G'.... con m, n, p, q, s. Dal centro O abbassiamo le perpendicolari sui lati del poligono $ABCDE$ e portiamo m su OF, da F in a', e su OM da M in a: portiamo q su OM da M in e' e su OL da L in e e così di seguito rispettivamente sui lati omologhi.

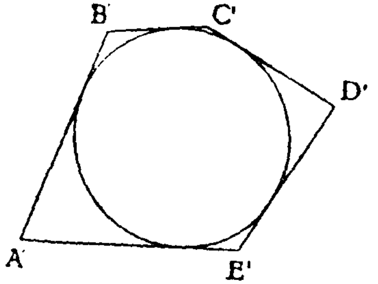


Fig. 585.

Otterremo così dei triangoli rettangoli due per due uguali AMa, AFa'; MEe, EHe ..... Quindi l'area della figura poligonale tratteggiata equivale al poligono $A\,B\,C\,D\,E$.

I poligoni tratteggiati, disposti come nella fig. 586 costituiscono un poligono simile ai dati e il poligono interno ad esso

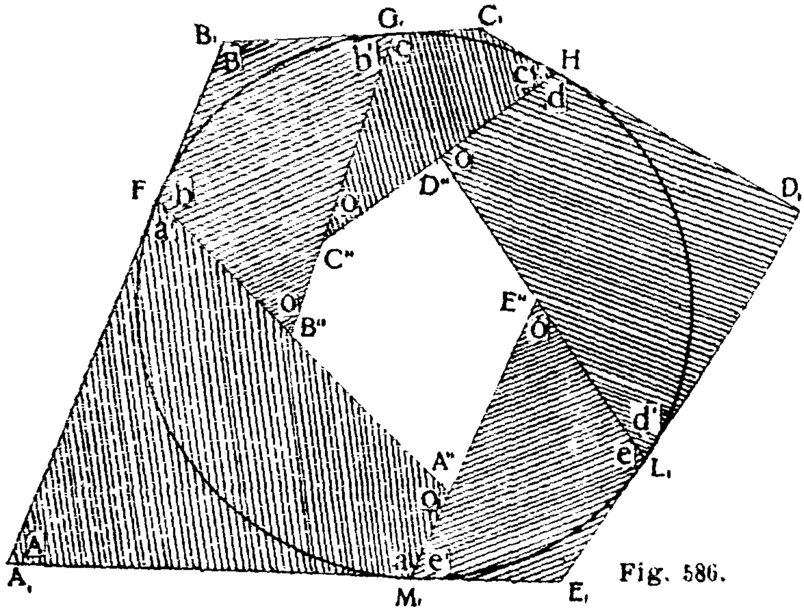


Fig. 586.

$A''\,B''\,C''\,D''\,E''$ è uguale al poligono dato $A'\,B'\,C'\,D'\,E'$. Infatti, per la similitudine dei triangoli AFa', BFb gli angoli $Aa'\,O$, $B\,b\,O$ sono supplementari epperò $A_1\,F_1\,B_1$ è una retta, come

$B_1 F_1 C_1$ ecc. Il poligono $A_1\,B_1\,C_1\,D_1\,E_1$ e poi simile ad $ABCDE'$ perchè:

$$\widehat{A}_1 = \widehat{A} \qquad \widehat{B}_1 = \widehat{B} \;\ldots\ldots \qquad \frac{Aa' + Bb}{A\,B} = \frac{Bb' + Cc}{BC} = \ldots\ldots$$

ossia:

$$\frac{A_1\,B_1}{A\,B} = \frac{B_1\,C_1}{B\,C} = \ldots\ldots$$

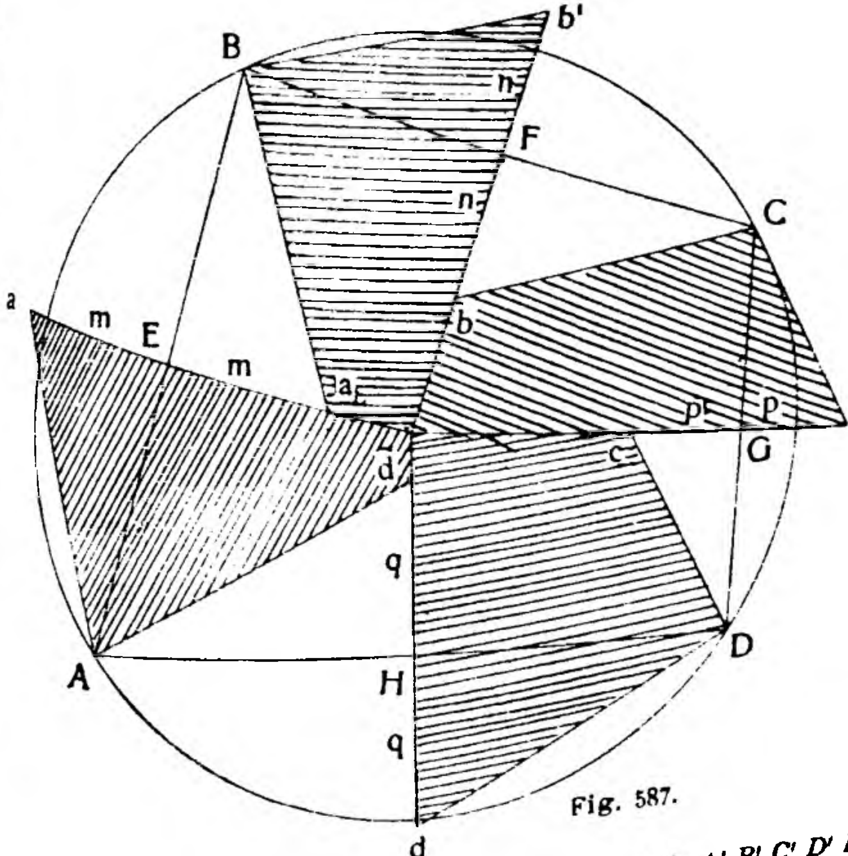


Fig. 587.

Quanto ad $A''\,B''\,C''\,D''\,E''$, esso è simile ad $A'\,B'\,C'\,D'\,E'$ essendo $\widehat{A''} = \widehat{A}$ come supplementari dello stesso angolo $F_1\,A''\,M_1 = FOM$ e $A''\,B'' = a'\,b = m + n = A'\,B'$, ecc.

Anche $A_1\,B_1\,C_1\,D_1\,E_1$ è circoscrittibile ed F_1, G_1, H_1, L_1, M_1 sono i punti di contatto dei suoi lati col circolo iscritto. Condizione di possibilità della costruzione si è che la maggiore fra le distanze m, n, p, q, s sia minore del raggio OF del circolo iscritto nel maggiore dei poligoni dati.

Poligoni iscrittibili. Siano $A\,B\,C\,D$, $A'\,B'\,C'\,D'$ (fig. 587 e 588) i due poligoni dati. Seguendo le medesime costruzioni ed annotazioni del caso precedente avremo la figura poligonale trat-

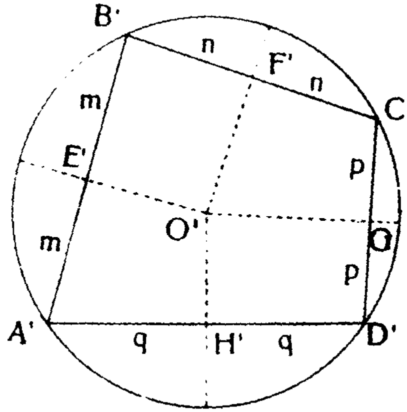


Fig. 588.

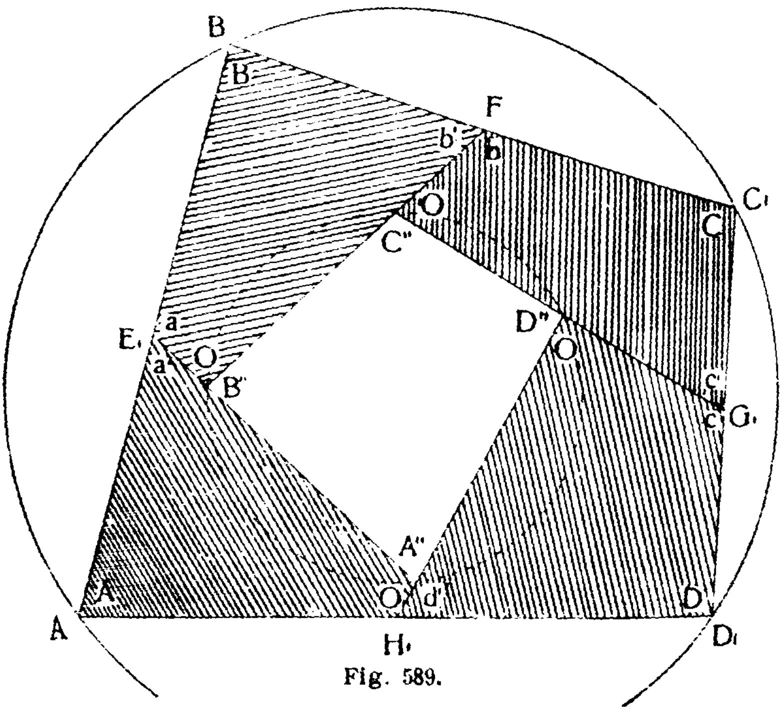


Fig. 589.

teggiata $A a' a B b'$ . . . . . i cui elementi disposti come nelle fig. 587-588-589 formeranno il poligono cercato, come è facile dimostrare in modo analogo a quello seguito per la dimostrazione nel primo caso. La condizione di possibilità della costruzione si è che ciascuna delle perpendicolari abbassate da O sui lati di $A\ B\ C\ D$ sia maggiore della metà del corrispondente lato di $A'\ B'\ C'\ D'$.

X. – *Dato un quadrilatero trovare un punto tale che, unendolo coi punti di mezzo dei lati ne risulti scomposto il quadrilatero in quattro parti fra loro equivalenti.*

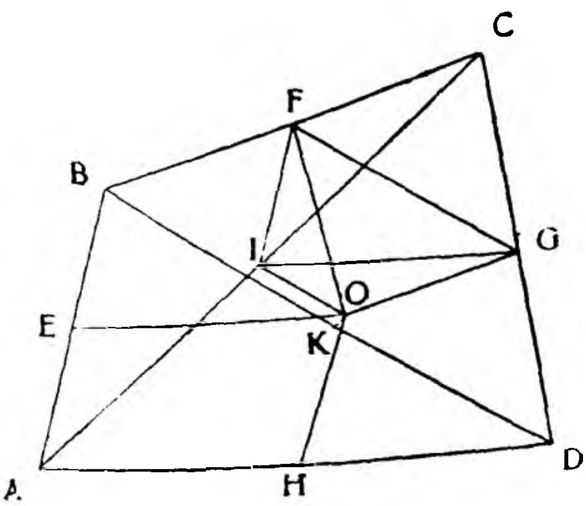


Fig. 590.

Il punto cercato si ottiene come intersezione delle parallele condotte rispettivamente dal punto di mezzo d'una diagonale all'altra. Dimostriamolo per una delle quattro parti $F\,O\,G\,C$ (fig. 590); analogamente si dimostrerebbe per le altre. Conduciamo la $F\,G$ (che sarà parallela alla $B\,D$) e quindi ad $I\,O$.

Avremo:

$$FCGI \equiv \frac{1}{4}\ ABCD$$

poichè :

$$IBCD \equiv \frac{1}{2} ABCD \quad \text{e} \quad FCGI \equiv \frac{1}{2} IBCD .$$

Ma si ha pure $FOGC \equiv FCGI$ perchè hanno una parte comune FGC e i triangoli FGO , FIG sono equivalenti; dunque;

$$FOGC = \frac{1}{2} ABCD$$

XI. — *Scomporre un circolo dato in un numero qualunque di parti equivalenti fra loro, tanto in area che in periferia.*

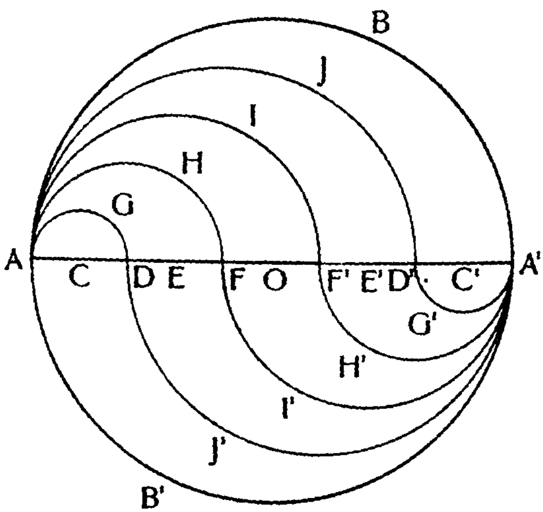


Fig. 591.

Se AA' il diametro del circolo che si deve dividere, per es., in 5 parti equivalenti. Si divide AA' in $5 \times 2 = 10$ parti uguali r, in C , D , E · · · · · ; indi con raggi uguali ad r, $2r$, $3r$, $4r$ si descrivono i semi-circoli indicati nella fig. 591. Si hanno così cinque superfici a contorni circolari che soddisfano alla questione proposta come si dimostra facilmente.

Pavimentazioni geometriche.

La riunione di piastrelle di varie forme poligonali presenta in varii casi non lievi difficoltà epperò si presta ad un'analisi matematica, cui accennerò sommariamente.

Le forme poligonali comunemente usate per pavimenti o decorazioni geometriche in genere, sono le più elementari, cioè: triangolo equilatero; quadrato; esagono e ottagono regolari.

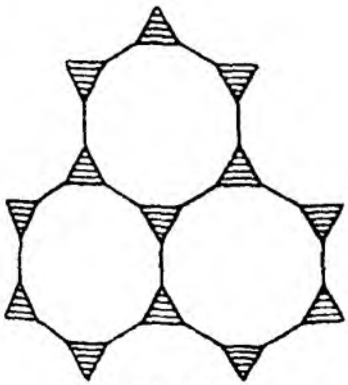


Fig. 592.

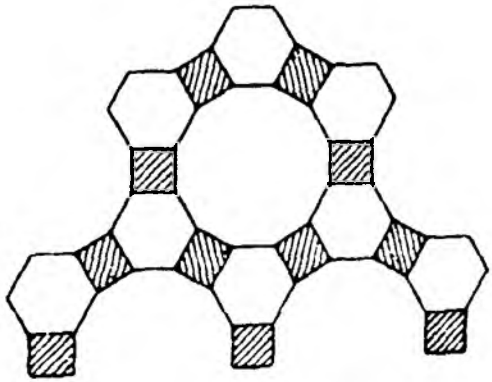


Fig. 593.

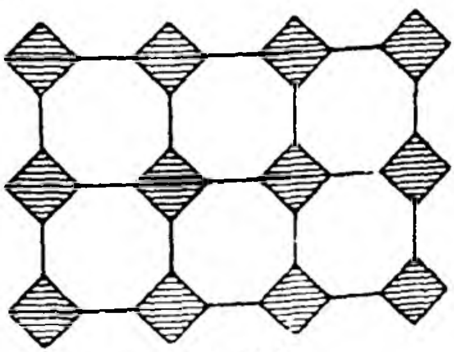


Fig. 594.

Cominciamo con lo stabilire che il triangolo, il quadrato e l'esagono sono i soli poligoni che si possano usare per formare disegni d'un medesimo tipo di poligoni; in altri termini con pentagoni regolari, ad es., con ettagoni, ottagoni, ecc. non si possono comporre d segni senza lacune. Si dicono *isosceli* quelle unioni di poligoni nelle quali in ciascun vertice convergono gli stessi angoli; esse possono inoltre ottenersi sovrapposte per capovolgimento, applicando in una certa posizione un poligono sopra un poligono uguale qualunque.

Così, per esempio, nelle fig. 592-593-594-595-596-597-598 l'unione è isoscele. Si può verificare la condizione di sovrapposizione

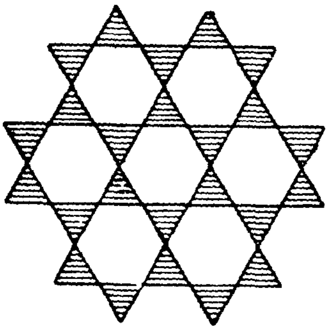


Fig. 595.

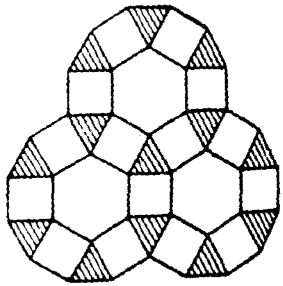


Fig. 596.

per capovolgimento servendosi di carta trasparente sulla quale si decalcherà ciascun disegno. Dopo capovolgimento si farà coincidere un poligono del disegno iniziale con un poligono

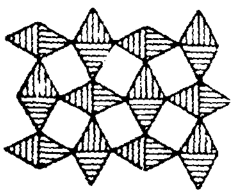


Fig. 597.

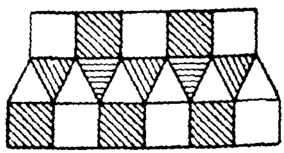


Fig. 598.

uguale qualunque del trasparente; si vedrà, facendo ruotare quest'ultimo, se in tutte le possibili coincidenze dei due poligoni se ne trovi almeno una che dia una sovrapposizione perfetta per tutta la figura, supposta indefinita.

Nelle fig. 599 e 600, ad esempio, l'unione non è isoscele.

In un poligono regolare di n lati, la somma degli angoli è data da $(n-2)\pi$, ed ognuno di essi da:

$$\frac{(n-2)\pi}{n}.$$

Perchè sia possibile riunirne diversi, uguali, attorno ad uno stesso punto è necessario che tale espressione rappresenti una parte aliquota di 360°; si deve dunque avere:

$$\frac{(n-2)\,\pi}{n} = \frac{2\,\pi}{k} \qquad \text{ossia} \qquad \frac{n-2}{n} = \frac{2}{k}$$

dove k è un numero intero uguale a 3 o maggiore di 3. Per $k=3$ si ha $n=6$ e per $k>3$ si ha $n<6$, dunque non si può risolvere il problema con poligoni di 7 o più di 7 lati.

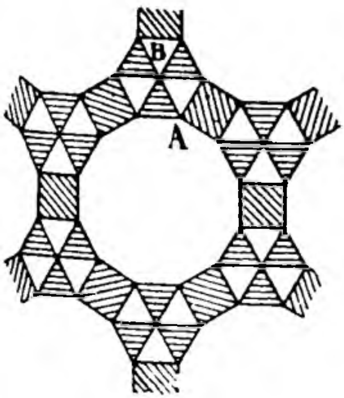


Fig. 599.

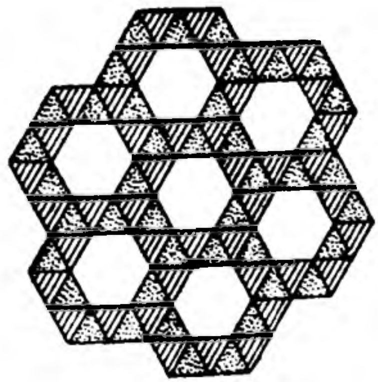


Fig. 600.

Se n è dispari, i numeri $n-2$ ed n sono primi fra loro e la frazione $\frac{n-2}{n}$ è irriducibile; quindi 2 e k sono equimultipli di $n-2$ e di n. Per conseguenza:

$$n-2=1 \qquad\qquad n=3$$
$$k=n\times 2 \qquad\qquad k=6$$

Se n è pari, poniamo $n=2\,m$; avremo:

$$\frac{m-1}{m} = \frac{2}{k}$$

La frazione $\frac{m-1}{m}$ essendo irriducibile si ha:

$$m-1=1 \qquad m=2 \qquad n=4 \qquad k=2\,m=4$$

Si può anche dimostrare che è impossibile associare poligoni stellati con poligoni convessi.

— Il problema generale riguardante questa materia consiste nel riconoscere se e come si possano associare, senza sovrapposizione di parti e senza spazi vuoti dei poligoni *regolari convessi*, omettendo la condizione che essi debbano essere tutti d'uno stesso numero di lati. Si potrà poi studiare una estensione del problema al caso di poligoni irregolari.

Non si potranno far convergere in un punto meno di 3 poligoni. Indichiamo con a , b , c i numeri dei loro lati, supponendoli disposti per ordine crescente di grandezza. Come già abbiamo osservato gli angoli al vertice di ciascuno dei poligoni hanno per misura:

$$\frac{(a-2)\,2}{a} \qquad \frac{(b-2)\,2}{b} \qquad \frac{(c-2)\,2}{c}$$

e si dovrà avere:

$$\frac{(a-2)\,2}{a} + \frac{(b-2)\,2}{b} + \frac{(c-2)\,2}{c} = 4$$

ossia:

$$\frac{a-2}{a} + \frac{b-2}{b} + \frac{c-2}{c} = 2$$

e infine la relazione condizionale:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$$

Cominciamo dal poligono più semplice, il triangolo; cioè facciamo $a = 3$ e proponiamoci di determinare quali poligoni si possano ad esso associare. La relazione condizionale diviene:

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

e:

$$b > 6 \qquad \text{con} \qquad c = 12$$

Per $\quad b = 7 \qquad \frac{1}{c} = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} \qquad c = 42$

$\quad b = 8 \qquad \frac{1}{c} = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} \qquad c = 24$

Per: $b = 9$ $\qquad \frac{1}{c} = \frac{1}{6} - \frac{1}{8}$ $\qquad c = 18$

» $b = 10$ $\qquad \frac{1}{c} = \frac{1}{6} - \frac{1}{9}$ $\qquad c = 15$

» $b = 11$ $\qquad \frac{1}{c} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}$ $\qquad c$ frazionario

» $b = 12$ $\qquad \frac{1}{c} = \frac{1}{6} - \frac{1}{11}$ $\qquad c = 12$

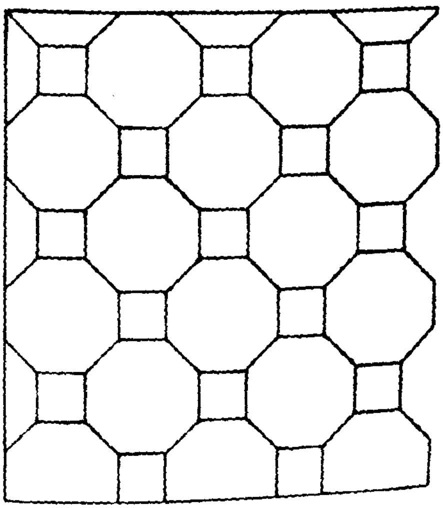


Fig. 601.

La sola combinazione possibile è $a = 3$, $b = 12$, $c = 12$ cioè triangolo equilatero e dodecagono regolare. Per $a = 4$ si ha:

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{4}$$

e combinando questa uguaglianza con la relazione $b = c$ abbiamo:

$$4 < b \leqq 8$$

Per $b = 5$, $c = 20$ associazione inammissibile
» $b = 6$, $c = 12$ associazione inammissibile
» $n = 7$, c è frazionario
» $n = 8$, $c = 8$ è la sola combinaz. possibile (fig. 601)

Per $a = 5$ si ha:

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{10} \qquad e \qquad 5 \leqq b \leqq 6$$

Per $b = 5$. $c = 10$ combinazione inammissibile.

Ponendo infine $a = 6$ si trova $b = 6$, $c = 6$ che è la comunissima associazione di esagoni. Riepilogando abbiamo dunque queste sole combinazioni possibili:

$a = 3 \qquad b = 12 \qquad c = 12$

$a = 4 \qquad b = 8 \qquad c = 8$

$a = 6 \qquad b = 6 \qquad c = 6$

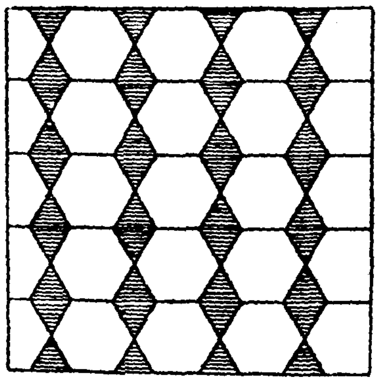


Fig. 602.

Con analogo procedimento si trova per *quattro* poligoni da riunire attorno ad un punto:

(*)	$a = 3$	$b = 3$	$c = 4$	$d = 12$
(**)	$a = 3$	$b = 3$	$c = 6$	$d = 6$
(***)	$a = 3$	$b = 4$	$c = 4$	$d = 6$
(****)	$a = 4$	$b = c = d = 4$		

Con la combinazione (*) non è possibile risolvere il problema.

La (**) dà luogo alle figure 602 e 595. Nella prima i due *triangoli* adiacenti vengono a costituire delle losanghe.

La combinazione (***) dà luogo alle tre associazioni delle fig. 603-604-605.

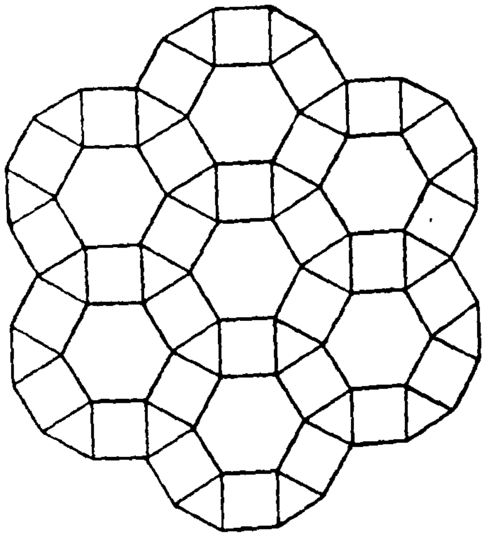


Fig. 603.

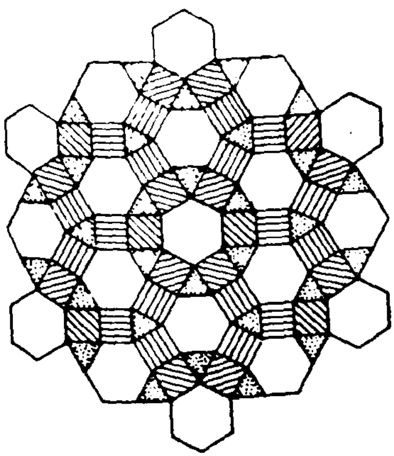


Fig. 604.

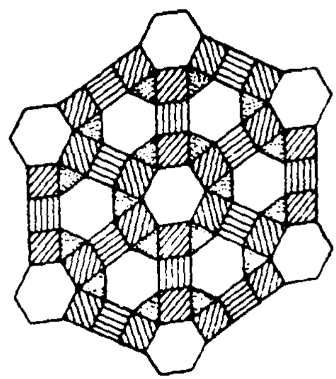


Fig. 605.

Con associazione di cinque poligoni non si hanno che due combinazioni:

$$a = 3 \quad b = 3 \quad c = 3 \quad d = 4 \quad e = 4$$
$$a = 3 \quad b = 3 \quad c = 3 \quad d = 3 \quad e = 6$$

delle quali la prima fornisce le disposizioni rappresentate nelle fig. 606-607-608 e la seconda quella della fig. 609.

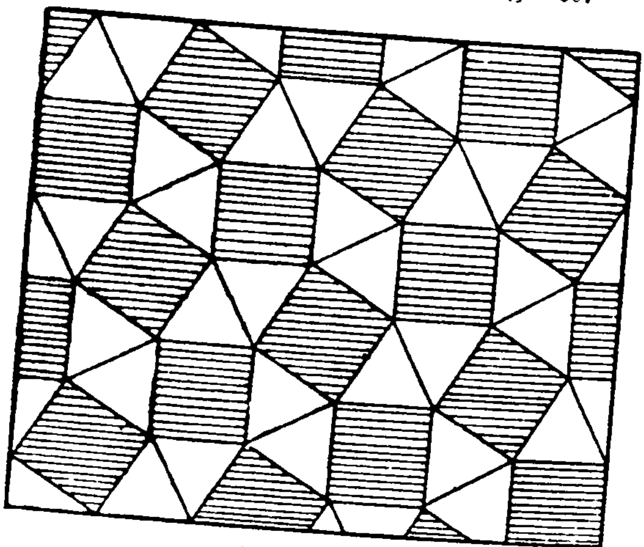


Fig. 606.

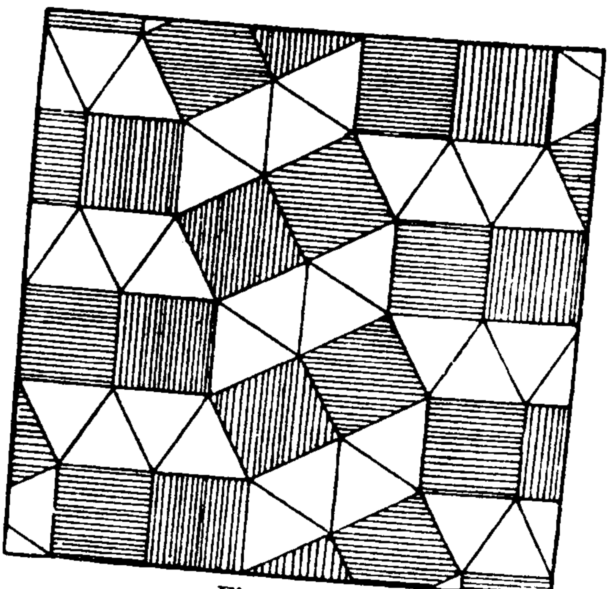


Fig. 607.

— Con sei poligoni l'unica soluzione è:

$$a = b = c = d = e = f = 3$$

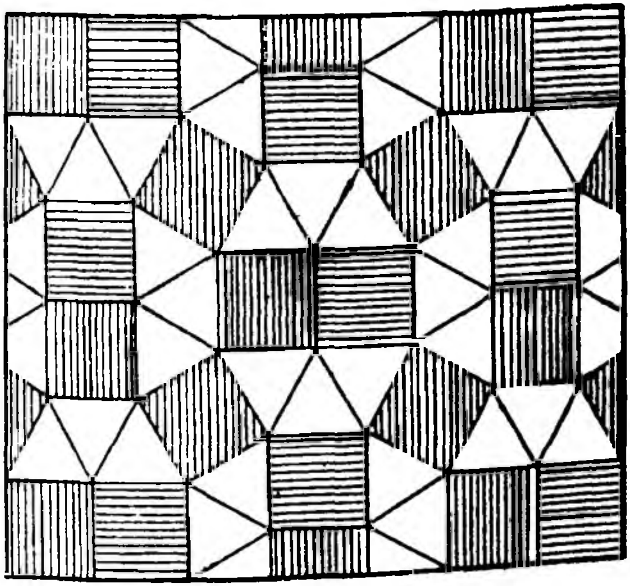


Fig. 608.

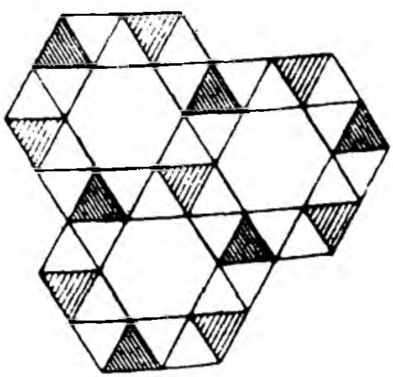


Fig. 609.

Poligoni sferici associati.

Analogamente a quanto abbiamo veduto relativamente alla associazione di poligoni nel *piano*, possiamo studiare il problema relativamente alla sfera, cioè: *Quali sono i poligoni regolari sferici che si possono impiegare per coprire la sfera, non utilizzando che poligoni uguali tra loro, associati in ugual numero attorno ad un vertice qualunque d'uno dei poligoni?*

Per trattare di questo problema occorre ricordare prima questo teorema d'Eulero: *In qualsiasi poliedro concesso il numero delle costole* C *aumentato di 2 è uguale al numero delle facce* F *aumentato del numero degli spigoli* S, *ossia:*

$$C + 2 = S + F$$

Siano dunque:

n il numero dei lati d'un poligono.
K il numero dei poligoni attorno ad uno stesso vertice.
m il numero dei poligoni.
A l'angolo d'un poligono.

La superficie d'un poligono sferico essendo contenuta m volte nella superficie della sfera, avremo:

$$\frac{8}{m} = \frac{n\,A - 2\,(n^d - 2^d}{1^d}$$

da cui:

$$m = \frac{8^d}{n\,(A - 2^d) + 4^d}$$

Ma abbiamo:

$$\frac{A}{1^d} = \frac{4}{k} \qquad \text{dunque} \qquad m = \frac{4\,K}{2\,(n + K) - K\,n} \qquad (*)$$

Per $n = 3$ si ha:

$$m = \frac{4\,K}{6 - K}$$

e dovendo m essere un numero intero, non si possono dare a K che i valori 3, 4 e 5, ai quali corrisponderanno per m i valori:

$$m = 4 \qquad m = 8 \qquad m = 20$$

Per $n = 4$ si ha:

$$m = \frac{2\,K}{4 - K}$$

e non si può assegnare a K che il valore 3, da cui $m = 6$.

Per $n = 5$ si ha:

$$m = \frac{4\,K}{10 - 3\,K}$$

e non si può dare a K che il valore 3, da cui $m = 12$.

Per $n = 6$ si ha:

$$m = \frac{K}{3 - K}$$

e non si può dare a K alcun valore, il che avviene pure, forzatamente, per $n > 6$. Non si hanno dunque che 5 maniere di ricoprire la sfera con poligoni regolari uguali, disposti in ugual numero attorno ad uno stesso vertice.

Osservazioni:

I. — È noto che esistono soli 5 poliedri regolari; consideriamo un poliedro regolare iscritto nella sfera, e congiungiamo due a due i suoi vertici consecutivi con archi di circolo massimo: avremo diviso la sfera in poligoni regolari uguali. Le cinque maniere di dividere la sfera in poligoni regolari uguali corrispondono dunque ai cinque poliedri regolari e non ne esistono altre.

II. — I risultati non cambiano quando nel problema si sopprimano le condizioni che i poligoni siano *regolari* ed *uguali tra loro*, purchè si lasci quella che essi debbano essere associati in ugual numero attorno a ciascun vertice.

Per dare alla formola (*) tutta la sua generalità basta osservare che il teorema d'Eulero si applica alla sfera considerata come un poliedro a facce curve le cui facce sono i poligoni sferici che la ricoprono, di modo che se S è il numero degli spigoli di tale poliedro, C quello delle costole, abbiamo la relazione:

$$S + m = C + 2 \qquad (**)$$

essendo m il numero delle fecce. Ma abbiamo:

$$S = \frac{n \cdot m}{K} \qquad A = \frac{n\,m}{2}$$

e sostituendo nella (**) ricadremo nella (*).

I poligoni massimo e minimo.

Dati 7 punti a , b , c d , e , f , g *come nella* fig. 610, *quale è la linea poligonale che li unisce racchiudendo la minima o la massima superficie?*

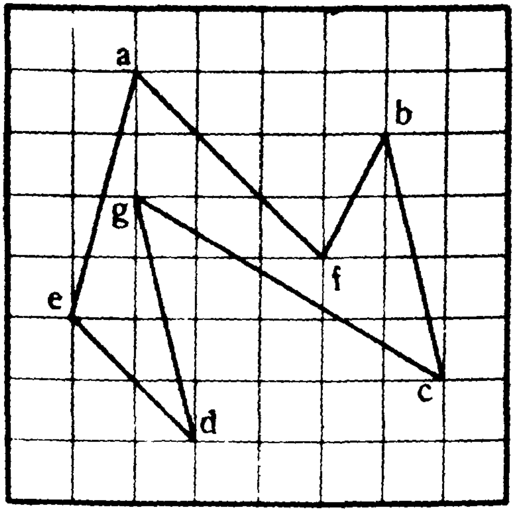


Fig. 610.

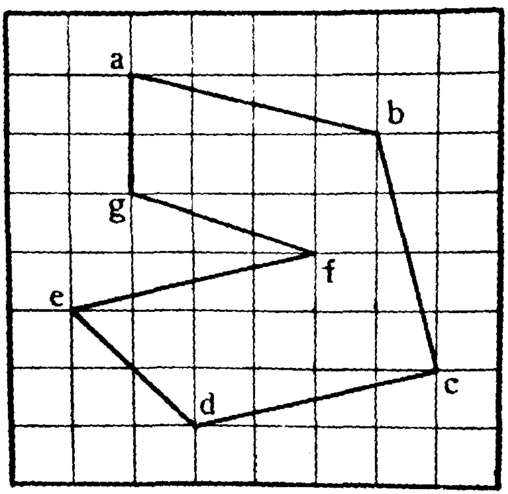


Fig. 611.

Alla a, f, b, c, g, d, e, a corrisponde una superficie minima di 12 quadrelli. Si ha una superficie massima, di quadrelli 20,5, coi tre perimetri:

$$a, b, c, d, e, f, g, a \qquad a, f, b, c, d, e, g, a$$
$$a, b, f, c, d, e, g, a$$

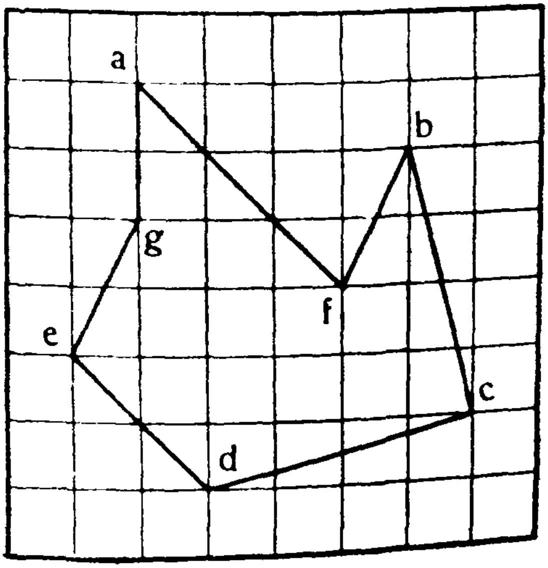


Fig. 612.

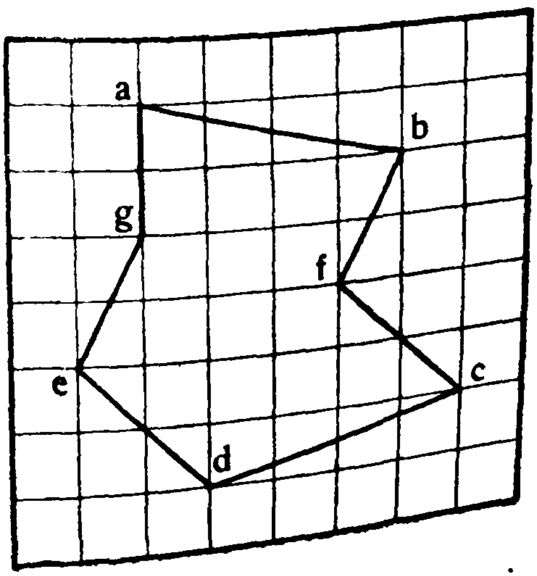


Fig. 613.

VARIE

La geometria della carta piegata.

Indicheremo alcune delle figure che si possono ottenere con la semplice ripiegatura d'un foglio di carta sottile, tralasciando le più semplici quali il rettangolo, il quadrato, il triangolo isoscele (1).

Triangolo equilatero. — Abbiasi un foglio di carta (fig. 614) un solo lato del quale è necessario che sia rettilineo; su questo si segnino due punti A e B estremi del lato dato del triangolo da costruire. Si pieghi il foglio secondo MN, cioè facendo coincidere A con B; si pieghi poi ancora secondo una retta AI che passando per A permetta di far cadere B sulla MN in C. Si completi il triangolo piegando secondo BC.

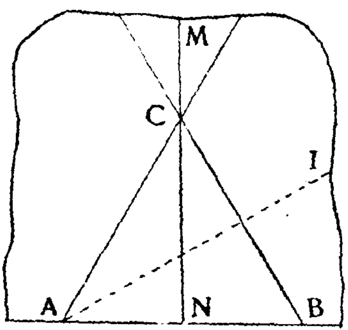


Fig. 614.

Pentagono regolare. — Partiamo da un foglio di carta *quadrata* $ABCD$ (fig. 615) e seguiamo su AB il punto X tale che sia:

$$\overline{BA} \times \overline{AX} = \overline{BX}^2$$

Pér ottenere questo punto X cominciamo col piegare a metà il foglio secondo EF (fig. 616) poi secondo BE e quindi sulla GE, in modo cioè da far coincidere A sulla BE in H. Segnato questo punto sulla BE si piegherà ancora il foglio secondo BT in modo da portare H in X sul lato AB del quadrato.

(1) Resti sottinteso che dopo ciascuna ripiegatura che la costruzione ri chieda il foglio deve essere riaperto, prima di procedere ad altre piegature.

Si segni ora il punto medio P di $A X$ portando A su X, e si prenda $B Q = A P$. Risulterà $P Q$ lato del pentagono che vo-

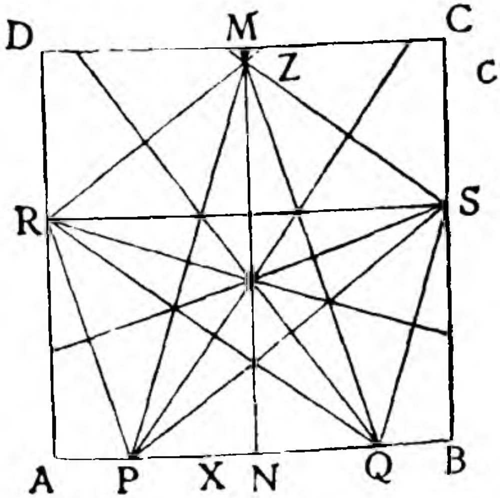


Fig. 615.

gliamo costruire. Basterà piegare il foglio attorno a P fino a che Q cada sul lato AD in R e in modo simile si avrà S su BC.

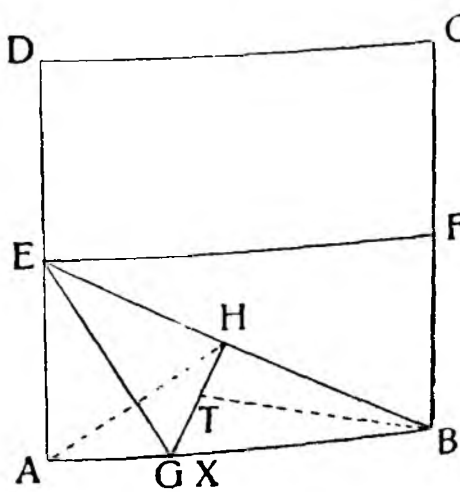


Fig. 616.

Non resterà che a piegare attorno ad R fino a portare P sulla mediana $M N$ in Z e completare il pentagono piegando il foglio secondo i suoi lati *PR*, *RZ*, *ZS*, *SQ*. Naturalmente ottenuto il pentagono convesso si può ricavarne quello stellato *P Z Q R S P*.

Quanto alla dimostrazione della costruzione osserviamo che da questa risulta già che il poligono formato è equilatero; esso è pure equiangolo. Osserviamo che:

$$\overline{RQ}^2 - \overline{QA}^2 = \overline{RP}^2 - \overline{PA}^2 = \overline{PQ}^2 - \overline{PA}^2$$

da cui:

$$\overline{RQ}^2 = \overline{PQ}^2 - \overline{PA}^2 + \overline{QA}^2 = \overline{PQ}^2 - \overline{PA}^2 + (\overline{AB} - \overline{PA})^2 = \overline{AB}^2$$

Cosicchè:

$$RQ = SP = RS = AB$$

I triangoli *RPQ*, *PQS*, *RZS* sono dunque isosceli e quindi gli angoli *RPQ*, *PQS*, *RZS* sono uguali. Inoltre le rette *R Q*, *PS* sono le bisettrici degli angoli *SRP*, *RSQ* e *PR*, *QS* sono le bisettrici di *APS*, *BQR*. Si ha pure che i triangoli isosceli *SRP*, *SRQ* sono uguali, epperò:

$$S\widehat{R}Q = R\widehat{S}P$$

Ne segue che:

$$R\widehat{P}S = P\widehat{R}S = 2\,R\widehat{S}P = \frac{4}{5}\,90^\circ$$

I tre angoli uguali $R\widehat{P}Q$, $P\widehat{Q}S$, $R\widehat{Z}S$ valgono dunque ciascuno:

$$\frac{4}{5}\,90^\circ + \frac{2}{5}\,90^\circ = \frac{9}{5}\,90^\circ$$

Essendo poi uguali i due triangoli *ZRP*, *ZSQ* si ha:

$$Z\widehat{R}P = Z\widehat{S}Q = 6 \times 90^\circ - 3 \times \frac{6}{5}\,90^\circ = \frac{6}{5}\,90^\circ$$

dunque il poligono *Z R P Q S* è equiangolo.

Esagono regolare. — Si piega il foglio (quadrato *A B C D* fig. 617) nel mezzo, successivamente secondo *E F*, *G H*; poi secondo *M L*, facendo coincidere *A D* con *E F*, e secondo *N P*, facendo coincidere $B\,C$ con $E\,F$. Poi si porta G in R sulla $L\,M$ ed H in S sulla $N\,P$ piegando opportunamente cioè secondo OX, OY.

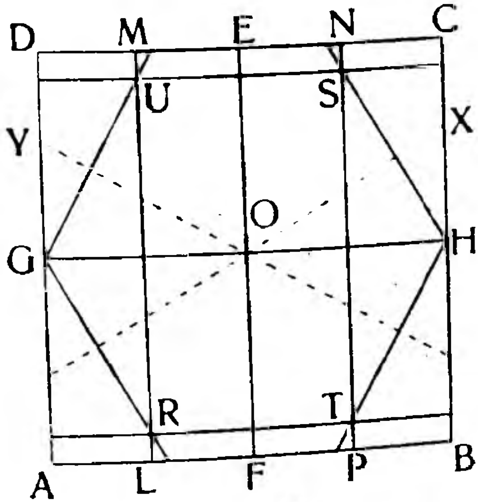


Fig. 617.

Ottagono regolare. — Si piega il foglio (quadrato $A\,B\,C\,D$ fig. 618) nel mezzo, secondo $E\,F$, $G\,H$; poi secondo $E\,H$, $H\,F$, $F\,G$, $G\,E$. Infine si porta $H\,B$ a coincidere con $H\,F$ e si forma

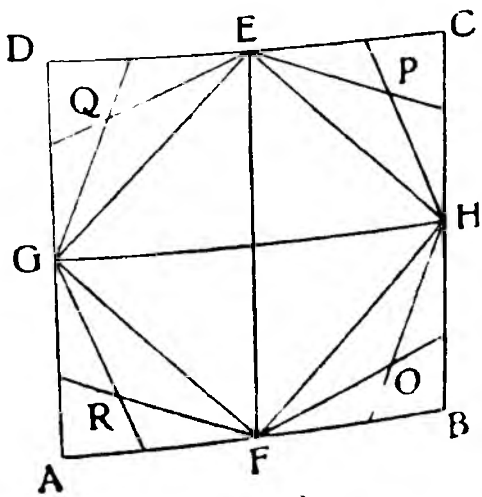


Fig. 618.

la piega $H\,O$; similmente portando $F\,B$ sulla $F\,H$ si forma la $F\,O$ e così via. $F\,O\,P\,E\,Q\,G\,R$ sarà l'ottagono voluto, come è facile dimostrare.

Si può anche ottenere un ottagono regolare $ABCDEFGH$ (fig. 619) piegando il quadrato secondo le diagonali e facendo poi coincidere i lati con le diagonali.

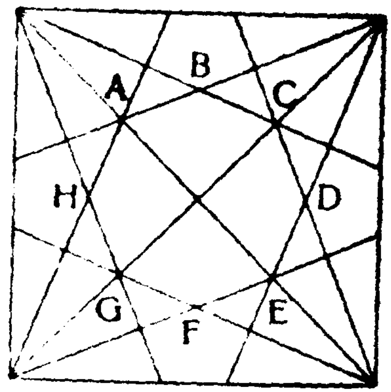


Fig. 619.

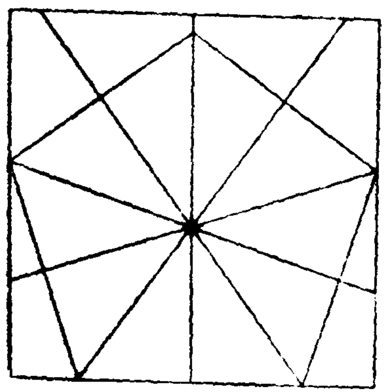


Fig. 620.

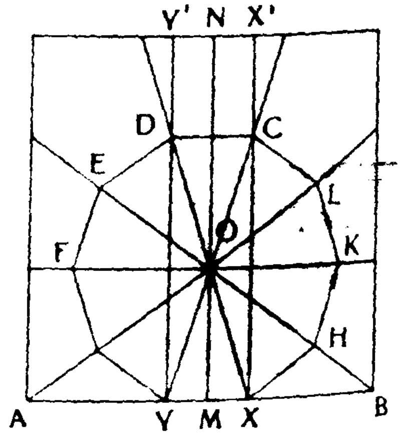


Fig. 621.

Decagono regolare. — Dal pentagono (fig. 615) si passa facilmente al decagono nel modo indicato dalla fig. 620.

Ma si può anche ottenere il decagono direttamente. Piega media MN (fig. 621). Portare $AX = BY$ essendo:

$$\overline{AX}^2 = \overline{AB} \times \overline{BX}$$

Pieghe XX', YY'. Piega attorno ad A in modo da far corrispondere X sulla MN in O, che si segna. Pieghe AO, BO, OX, OY, ecc.

Dodecagono regolare. — Dall'esagono si passa facilmente al dodecagono come vedesi dalla fig. 622.

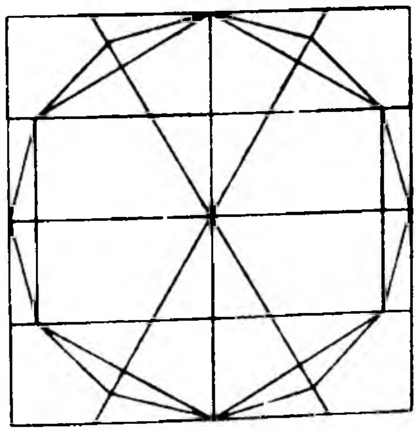


Fig. 622.

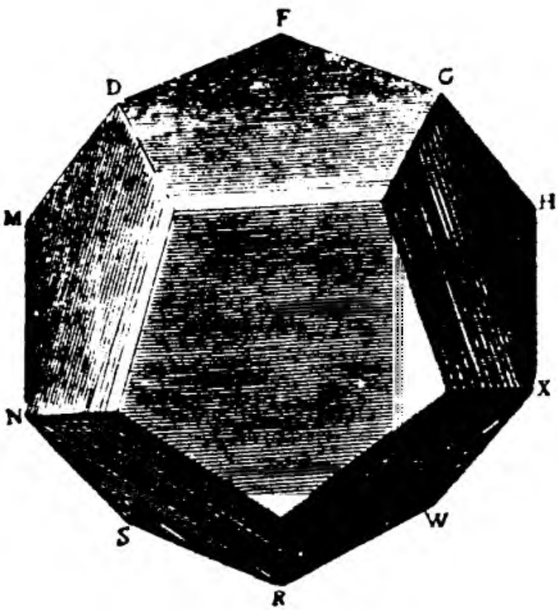


Fig. 623.

I poliedri regolari.

Il dodecaedro regolare pentagonale (fig. 623) è facile a costruire in cartoncino (1). Un po' più complicati sono i dodecaedri stellati che da esso si deducono.

(1) Vedasi il Manuale del Rivelli *Stereometria applicata allo sviluppo dei solidi e alle loro costruzioni in carta.* — Ediz. Hoepli.

Il dodecaedro stellato di terza specie a facce stellate (fig. 624) si ottiene prolungando tutte le costole o, ciò che fa lo stesso, tutte le facce del dodecaedro.

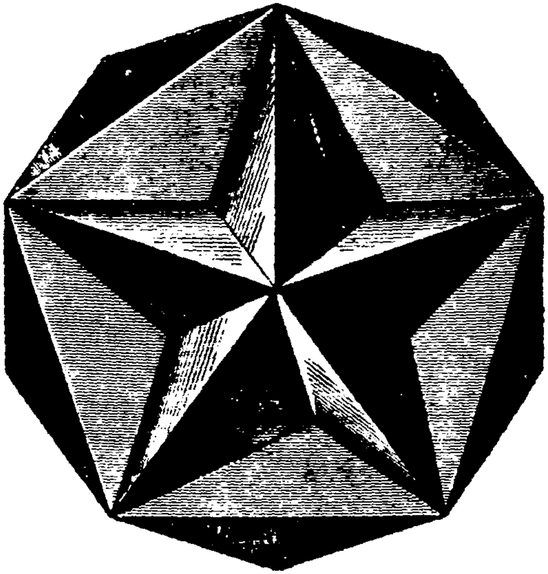


Fig. 624.

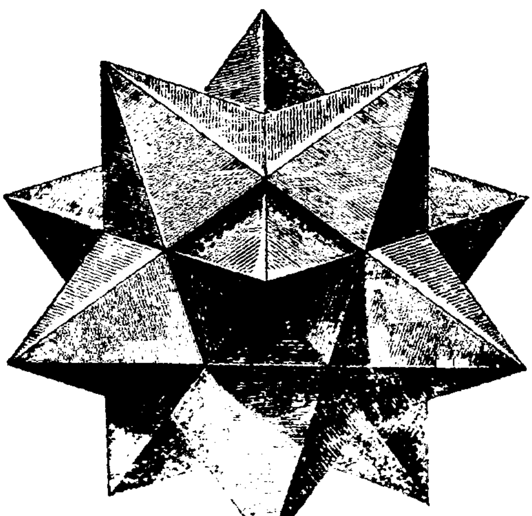


Fig. 625.

Il dodecaedro stellato di terza specie a fasce convesse (fig. 616) si ottiene prolungando il piano di ciascuna faccia sino al semplice incontro dei piani delle cinque facce che contornano la faccia opposta.

Il dodecaedro di settima specie (fig. 626) è quello risultante dal prolungamento delle costole che in quello di terza specie formano i lati dei dodici pentagoni.

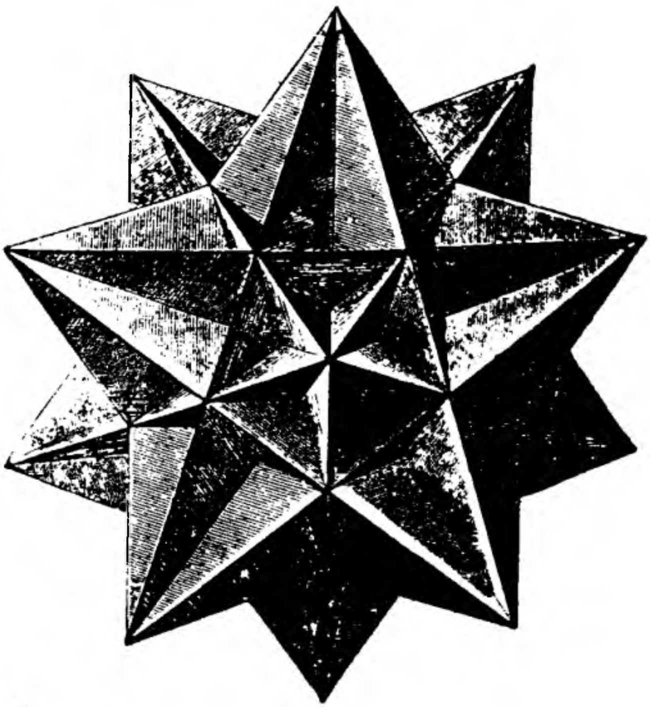


Fig. 626.

L'icosaedro (fig. 627) si può ottenere congiungendo i centri di tutte le facce del dodecaedro ai centri delle cinque facce adiacenti; la sua superficie consta di venti triangoli equilateri riuniti per cinque in ciascuno dei 12 vertici; le costole sono 30 come nel dodecaedro. Abbiamo dunque un solido con lo stesso numero di spigoli e di facce, delle facce e spigoli del dodecaedro, e con lo stesso numero di costole. Dall'icosaedro si può ricavare un nuovo dodecaedro congiungendo i centri delle sue facce ai centri delle tre facce adiacenti, ecc.

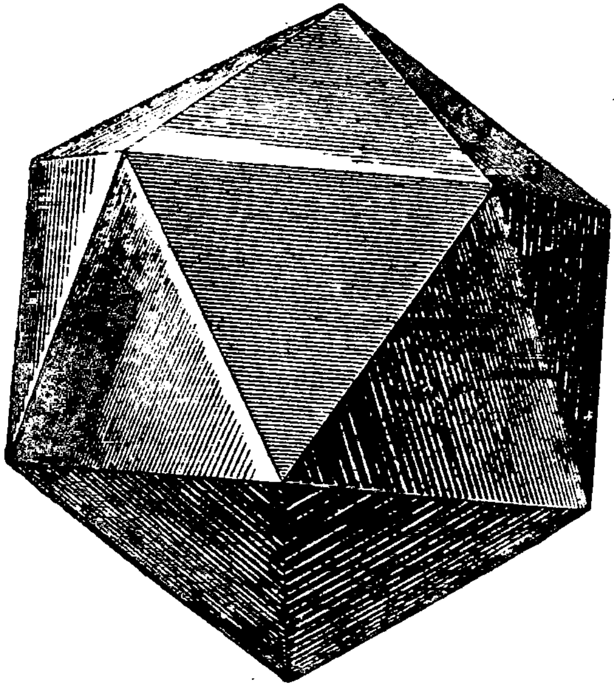


Fig. 627.

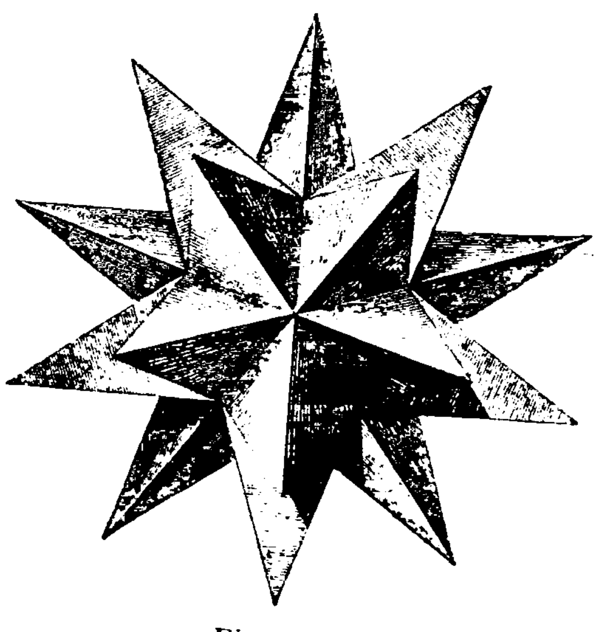


Fig. 628.

Si ottiene l'icosaedro stellato, o di settima specie (fig. 628) prolungando ciascuna faccia dell'icosaedro fino ad incontrare i piani dei tre triangoli che stanno attorno alla faccia opposta a quella che si considera.

Il volume della sfera secondo gli Indù.

Ecco il procedimento esposto da Edoardo Lagout nelle sue Lezioni di tachimetria (1876) per determinare il volume della sfera, ispirato a quello del geometra indiano Bhâskara.

«Un frutto di platano è formato da un gran numero di piramidi agglomerate attorno al nucleo centrale. Passando *dalla realtà alla scienza*, si deve supporre questo nucleo come piccolissimo, riducentesi ad un punto invisibile nel quale concorrebbero tutti i vertici delle piramidi.

«L'inviluppo della sfera essendo uguale a quattro cerchi descritti sul raggio, sarà uguagliato da un ripiano formato dalla connessione di quattro assi, uguali ciascuno all'area d'uno dei circoli. Non resterà più che a uguagliare tutte le piramidi a *riccio* e per questo le impianto sul ripiano. Esse saranno unite per le basi e non lasceranno alcun vuoto.

«Così impiantate esse presentano l'aspetto d'una mascella di coccodrillo sulla quale occorre mettere arditamente la mano (della mente) per appiattirle uniformemente al *terzo dell'altezza*. Allora la mascella, vale a dire la sfera, mutata in un *ripiano* avente per altezza il terzo del raggio. Si avrà dunque, mediante le operazioni dell'*algebra tachimetrica*:

$$\text{Sfera, volume} \left\{ \begin{aligned} &= \text{ripiano} \times \frac{1}{3} \text{ del raggio} \\ &= 4 \text{ aree di circolo} \times \frac{1}{3} \text{ del raggio} \\ &= \frac{1}{3} \times (4 \text{ aree di circolo} \times \text{raggio}) \end{aligned} \right.$$

«Non dimenticate le quattro assi formanti ciascuna l'area di un circolo; la mascella di coccodrillo vi farà ricordare delle punte che si agguagliano appiattendole al terzo».

Poligono spirale.

Abbiasi un poligono regolare (fig. 629) iscritto in un circolo di centro O, per esempio, un esagono $ABCDEF$. Si conducano le bisettrici dei suoi angoli al centro. Dal punto di mezzo M d'uno dei lati dell'esagono si abbassi la perpendicolare sulla diagonale vicina BO; dal piede G di essa la perpendicolare sulla bisettrice ON e così di seguito fino a ricadere col piede Y dell'ultima perpendicolare sul raggio OA.

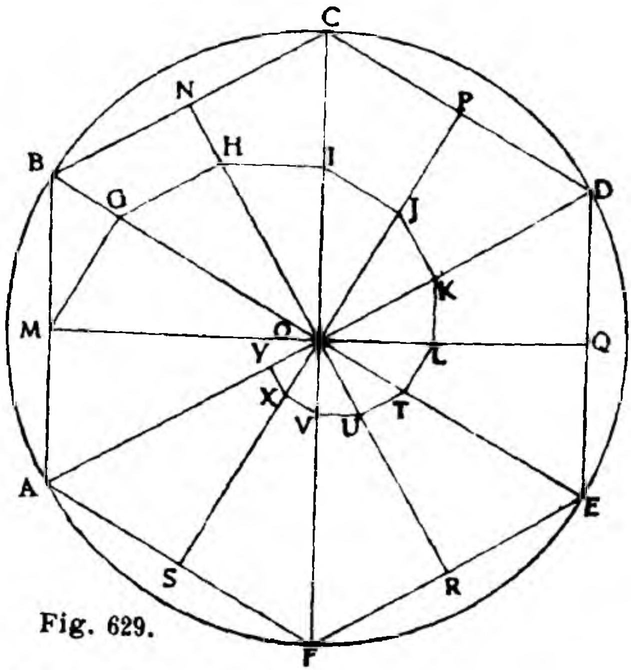


Fig. 629.

Il poligono $AMGH \ldots\ldots Y$ così ottenuto venne denominato *poligono spirale* da Du Fay (1). — Le aree dei triangoli AMO, $MGO \ldots\ldots$ formano una progressione geometrica di ragione:

$$k^2 = \frac{\alpha^2}{\alpha_1^2} \qquad \text{essendo} \qquad \alpha = OA \qquad \alpha_1 = OM \ldots\ldots$$

Riesce quindi facile determinare l'area d'un poligono spirale qualunque, quando si sia valutato il rapporto costante k e l'area del primo triangolo.

(1) Histoire de l'Académie des sciences de Paris 1727.

Poligono spirale-uncino. — Si ottiene un poligono spirale $AMG \cdots\cdots YY_1 \cdots\cdots G_1M_1A_1$ detto *uncino* dal Du Fay portando sul raggio OA il segmento $OA_1 = OM$ e conducendo successivamente le parallele A_1M_1 ad AM, M_1G_1 ad $MG \cdots\cdots$

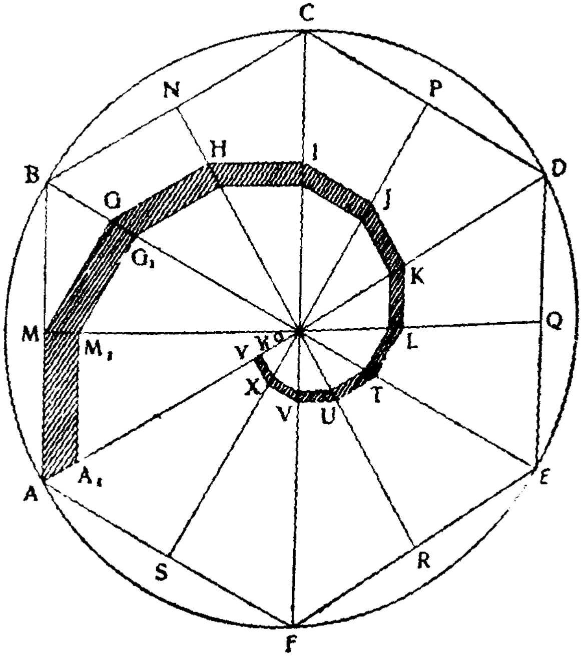


Fig. 630.

Il rapporto fra le aree dei due poligoni spirali $AMG \cdots\cdots Y$ ed $A_1M_1G_1 \cdots\cdots Y_1$ è quello stesso delle aree dei due esagoni ai quali corrispondono, cioè $ABCDEF$, $MNPQRS$. E l'area Ω compresa fra i perimetri dei due poligoni spirali sovrapposti, ossia l'area del *poligono spirale-uncino* è data da:

$$\Omega = \frac{W - W'}{W'} \times \Sigma'$$

essendo:

W = area poligono $ABCDEF$

W' = area poligono $MNPQRS$

Σ = area poligono $A_1M_1G_1 \cdots\cdots Y_1$

Cosicchè si hanno per l'area dell'*uncino* i seguenti valori per i vari poligoni regolari:

Triangolo . . . . $\Omega = 3\ \Sigma'$

Quadrato . . . . $\Omega = \Sigma'$

Pentagono . . . . $\Omega = \dfrac{5 - 2\sqrt{5}}{3 + 2\sqrt{5}}\ \Sigma'$

Esagono . . . . $\Omega = \dfrac{1}{3}\ \Sigma'$ ecc.

Misurare un angolo L M N senza rapportatore.

Dal vertice M dell'angolo come centro, con raggio grande più che sia possibile, si descrive una circonferenza che sega i lati LM, NM dell'angolo in O e P. Si divide poi la circonferenza

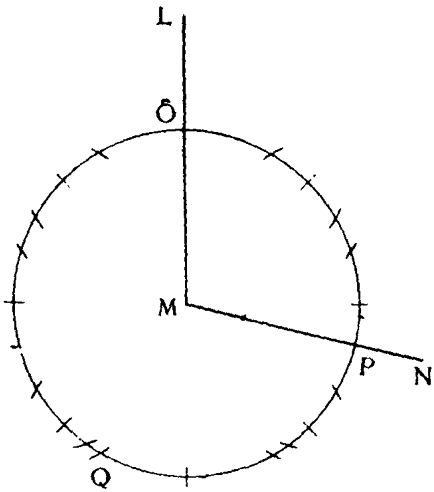


Fig. 631.

in 5, 8, 12 e 15 parti uguali prendendo come origine il punto O. Si porta poi l'arco OP sulla circonferenza tante volte quanto è necessario per cadere su uno dei punti di divisione ottenuti.

Supponiamo, per esempio, di aver portato da O *nove* volte l'arco OP sulla circonferenza e di essere così pervenuti, dopo aver percorso *due* volte la circonferenza, nel punto Q corrispondente ad un vertice dell'esagono iscritto, avremo:

$$L\widehat{M}N = \frac{2 \times 360^\circ + 210^\circ}{9} = \frac{930^\circ}{9} = 103^\circ\ \frac{1}{3}$$

Il tracciamento del tunnel.

Due punti A, B sono separati da una catena di montagne, che supporremo inaccessibili per metterci nella peggiore ipotesi; tali punti son sono visibili *ad un tempo* per uno stesso osservatore. Si tratta di determinare:

1.° Ai punti A, B la direzione AB.

2.° La lunghezza di AB.

Si tratta dunque di determinare a ciascun imbocco della galleria la sua direzione e nello stesso tempo la lunghezza

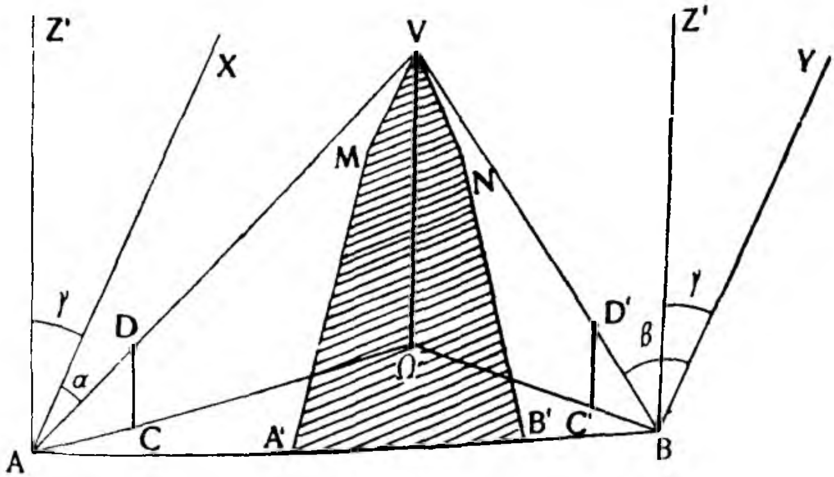


Fig. 632.

della galleria medesima. I due osservatori in A e B rilevano ciascuno per proprio conto l'altezza apparente della vetta V e della stella polare. Essi conoscono dunque gli angoli:

$$VAX = \alpha \qquad VBY = \beta$$

come pure l'altezza zenitale:

$$Z A X = Z' B Y = \gamma$$

della stella polare. Inoltre, due grandi mire verticali CD, $C'D'$ permettono di fissare la direzione della rette AC, BC' che si intersecano in un punto invisibile Ω proiezione del vertice V sul piano dell'orizzonte, piano che supponiamo comune ai due osservatori A, B. Immaginiamo ora per il punto V una parallela alla direzione comune delle rette AX, BY; sia F il punto nel quale essa incontra l'orizzonte comune dei punti A, B. Consideriamo il triedro $V \,.\, A, \Omega, F$; ne conosciamo le tre facce ossia:

$$FV\Omega = \gamma \qquad AVF = \alpha \qquad AV\Omega = 90^0 - VAC$$

L'angolo incognito $A\Omega F$ è dunque l'angolo α, ridotto all'orizzonte. Si può calcolare $A\Omega F$ con le formole della trigonometria sferica; ammettiamo dunque come determinato $A\Omega F$. L'angolo $B\Omega F$ verrà del pari calcolato dall'osservatore B e i due risultati riuniti faranno conoscere l'angolo $A\Omega B$. Quanto alle lunghezze $A\Omega$, $B\Omega$ sono facili a calcolare, poichè essendo nota l'altezza della montagna, si ha:

$$A\Omega = V\Omega \frac{AC}{CD} \qquad B\Omega = V\Omega \frac{BC'}{C'D'}$$

Dunque nel triangolo $A\Omega B$ si conoscono due lati e l'angolo compreso e si potranno quindi determinare gli angoli ΩAB, ΩBA e la lunghezza del lato AB.

Naturalmente, per comodità di osservazione, si saranno stabiliti A e B ad una certa distanza dalla base della montagna, e si dedurranno in ultimo da AB le distanze AA', BB' per avere $A'B'$ lunghezza del tunnel.

Il tracciamento del tunnel sotto un fiume non offre difficoltà essendo, in generale visibili le estremità A e B del tunnel medesimo. I procedimenti indicati non servirebbero invece nel caso d'un fiume o di un braccio di mare di tale larghezza che da A non si potesse vedere B. Si ricorrerebbe allora a triangolazioni geodetiche.

Applicazioni della geometria al calcolo della probabilità.

Se si considera un'urna contenente 2 biglie bianche e 3 nere e se se ne estrae una a caso, nessuno esiterà a dire che vi sono 2 probabilità su 5 perchè la biglia sia bianca, ossia che su 5 casi che si possono presentare, e che sono *ugualmente possibili*, ve ne sono due *favorevoli* alla sortita d'una biglia bianco; la probabilità di questo avvenimento potrà dunque essere rappresentata con $\frac{2}{5}$. Ossia, in generale, la probabilità d'un avvenimento è *il rapporto del numero dei casi favorevoli al prodursi di tale avvenimento, al numero totale dei casi che possono realizzarsi*, tutti i casi essendo supposti ugualmente possibili.

I. — *Prendendo a caso un punto* O *nell'interno di un triangolo equilatero* A B C, *quale è la probabilità che si possa formare un triangolo con le tre perpendicolari* OA_1, OB_1, OC_1 *abbassate da* O *sui lati del triangolo?* (E. Lemoine).

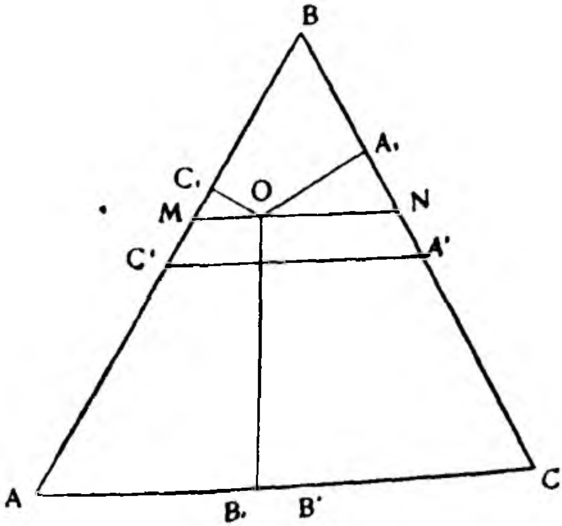


Fig. 633.

Sia $A'B'C'$ il triangolo formato unendo i punti di mezzo dei lati di ABC, e MN una parallela ad AC passante per O, punto supposto iuterno ad $A'B'C'$. Per una nota proprietà la somma $OA_1 + OB_1 + OC_1$ è uguale all'altezza del triangolo equilatero $A\,B\,C$, altezza che è necessariamente maggiore di OB_1.

Si ha dunque:

$$OB_1 < OA_1 + OC_1 \qquad OA_1 < OB_1 + OC_1$$

$$OC_1 < OA_1 + OB_1$$

Inoltre, se O è esterno ad $A' B' C'$, per esempio, in $B C' A'$:

$$OB_1 > OA_1 + OC_1$$

Cosicchè la condizione necessaria e sufficiente perchè OA_1, OB_1, OC_1 possano formare un triangolo è che O sia interno ad $A' B' C'$. L'insieme dei casi favorevoli può dunque essere rappresentato dall'area del triangolo $A' B' C'$; l'insieme dei casi possibili dall'area del triangolo $A B C$, e la probabilità cercata, dal rapporto:

$$\frac{\text{Area } A' B' C'}{\text{Area } A B C} = \frac{1}{4}$$

Si può estendere questa soluzione da un triangolo qualunque come ha fatto il Lemoine.

II. — *Si dà una sbarra che si rompe in tre frammenti. Quale è la probabilità perchè si possa formare un triangolo con questi tre frammenti?* (E. Lemoine).

Osservando che i tre frammenti possono essere rappresentati dalle tre perpendicolari abbassate da un punto O situato nell'interno d'un triangolo equilatero sui lati di esso (somma costante ed uguale all'altezza del triangolo stesso) si è ricondotti al problema precedente, e la probabilità è $\frac{1}{4}$.

Modelli.

Quante invenzioni riuscite egregiamente con piccoli modelli non hanno poi corrisposto riproducendo i meccanismi nella dovuta grandezza! Errore in cui facilmente cadono i non pratici di costruzioni meccaniche e coloro cui non sono famigliari le cognizioni matematiche.

La ragione degli insuccessi del genere accennato sta in questo. Se s'ingrandiscono nella medesima proporzione tutte le parti d'un modello facendole, ad esempio, x volte maggiori, le *superfici* risulteranno ingrandite nella proporzione x^2 ad 1 e i volumi della proporzione x^3 ad 1. Del resto anche un profano della geometria può convincersi che facendo un cubo di *lato* doppio d'un altro si avrà nel nuovo cubo superficie quadrupla (2^2) e volume ottuplo (2^3).

In dipendenza dell'accrescimento lineare nel rapporto $x : 1$ di tutte le parti del modello, certe forze, come il peso che dipende dal volume, saranno divenute x^3 volte più grandi, mentre certe altre, con gli attriti che sono proporzionali alle superfici saranno divenute x^2 volte maggiori. È quindi facile comprendere come il complesso di queste variazioni, non uniformi, possa far si che la macchina non riesca capace di produrre quegli effetti che dalle esperienze fatte col modello si erano sperati.

Considerazioni analoghe possono farsi riguardo agli animali; si osservano infatti fenomeni di debolezza in individui che presentano uno sviluppo fisico eccessivo. Helmoltz ha notato che se le dimensioni lineari d'un uccello venissero aumentate nella proporzione da 1 ad n, sarebbe necessario un lavoro meccanico come n^7 per renderne possibile il volo.

Supponiamo di aumentare di $\frac{1}{7}$ tutte le dimensioni lineari d'un uomo alto m. 1,75; la sua statura diverrebbe di m. 2 ma il suo peso risulterebbe aumentato nella proporzione di 343 a 512; e questo peso dovrebbe essere sopportato da gambe la cui sezione non sarebbe che i $\frac{64}{49}$ di quelle di prima. Giova però notare come in casi di questo genere non sia possibile fare deduzioni, non diciamo rigorose, ma neanche sufficientemente approssimative, poichè l'aumento di forza dovuto all'aumentato volume dei muscoli costituisce un'incognita, per così esprimerci, favorevole, mentre la minor sezione proporzionale delle ossa comparativamente alla loro maggiore lunghezza ne rappresenta una sfavorevole.

Questioni diverse.

L'area del dodecagono regolare.

Scomponiamo, con parallele tra loro perpendicolari, la superficie del dodecagono regolare, nel modo indicato nella fig. 634. Come è facile vedere i triangoli rettangoli sono semitriangoli equilateri, ossia:

$$A\,B = b = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

essendo a il lato del dodecaedro, ed $AC = C = \frac{a}{2}$.

Si potrà dunque esprimere la superficie del dodecaedro nel modo seguente:

$$A = a^2 + 4\,ac + 4\,b^2 + 4\,ab + 8\,\frac{b\,c}{2}$$

quindi, semplificando:

$$A = a^2\left(1 + 2 + 3 + 2\sqrt{3} + \sqrt{3}\right)$$

$$A = a^2\left(6 + 3\sqrt{3}\right) = 3\,a^2\left(2 + \sqrt{3}\right)$$

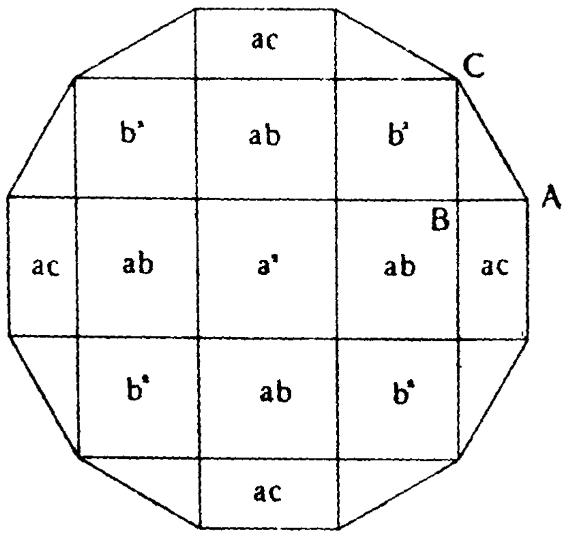


Fig. 634.

Un problema da pontieri. — *Costruire una passerella attraverso il fossato d'uniforme larghezza che cinge una fortezza quadrata, valendosi di due travi lunghe precisamente quanto è largo il fossato.*

La fig. 635 fa vedere quale deve essere la disposizione delle due travi. Disposta una di esse in modo da avere $A\,C = C\,B$ risulterà:

$$C\,D = \frac{A\,B}{2} = \frac{a}{2}$$

essendo a la larghezza del fossato.

La diagonale CO sarà:

$$a\sqrt{2} \qquad \text{per cui} \qquad DO = a\sqrt{2} - \frac{a}{2} = a\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)$$

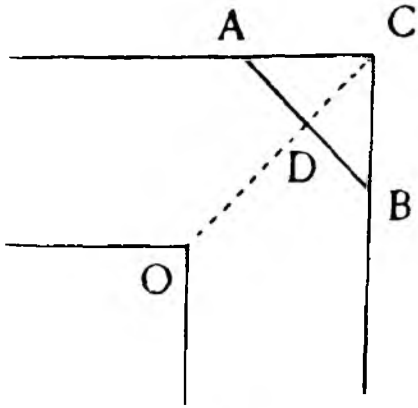


Fig. 635,

Ora si ha:

$$\sqrt{2} - \frac{1}{2} < 1$$

d'onde emerge la possibilità di collocare l'altra trave appoggiandone le estremità in O e in D.

La gazza e la vasca. — *Un giorno d'estate, una gazza scorge dell'acqua in una pozzetta tronco-conica di tre pollici di diametro sul fondo; essa accorre e trova che l'acqua ha*

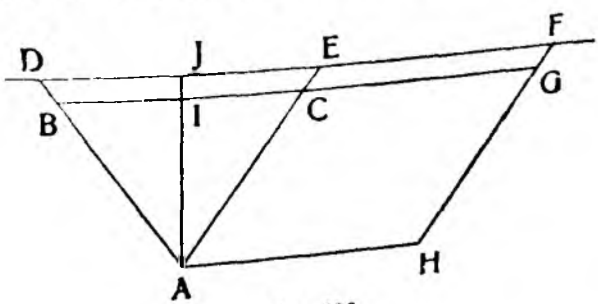


Fig. 636.

una superficie di 6 pollici di diametro ed è profonda 2 pollici. La gazza non potrebbe raggiunger l'acqua che quando la sua superficie avesse 6 pollici ed 1 linea di *diametro. Essa vola verso il tesoro che ha scoperto; quante monete di una linea di spessore e di 16 linee di diametro dovrà essa prendere dal tesoro e portarle nell'acqua perchè possa bere a suo comodo?*

Sia BG il livello primitivo dell'acqua e DF il livello corrispondente al diametro di 6 pollici ed una linea. Abbassiamo la perpendicolare AIJ da A su BG e EF. Conduciamo ACE parallela ad HGF. Siccome un pollice equivale a 12 linee, si ha successivamente:

$$AH = 36\,l \qquad BG = 72\,l$$
$$DF = 73\,l \qquad AI = 24\,l$$

$$BC = BG - AH = 36\,l$$
$$DE = DF - AH = 37\,l$$

Si può scrivere:

$$\frac{AJ}{AI} = \frac{DE}{BC}$$

da cui:

$$AJ = \frac{74\,l}{3} \qquad IJ = AJ - AI = \frac{2}{4}\,l$$

Basterà ora esprimere l'equivalenza tra il volume delle n monete cilindriche e quello del tronco di cono $BDFG$:

$$n \,.\, \pi\, 8^2 = \frac{\frac{2}{3}\,\pi}{3}\left(\frac{72^2 + 73^2 + 72 \times 73}{4}\right)$$

da cui $n = 13{,}7$. Occorreranno dunque 14 monete.

Il turacciolo geometrico. — *Quale forma dovrà darsi ad un unico turacciolo affinchè possa otturare esattamente tre fori praticati in un cartone aventi rispettivamente forma di triangolo equilatero di lato* a, *di quadrato di lato* a *e di circolo di diametro* a?

La fig. 637 spiega in qual modo si possa risolvere il problema.

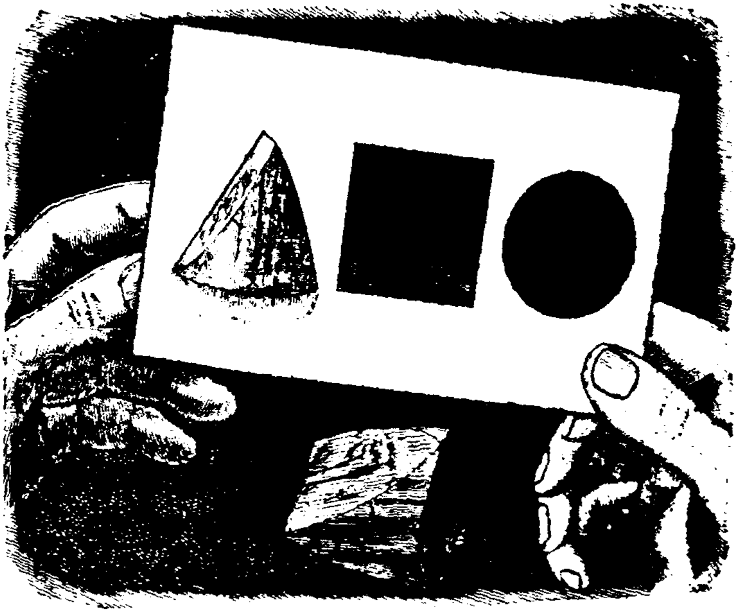


Fig. 637.

Con una medesima apertura di compasso descrivere circoli di raggio diverso. — Le fig. 638 e 639 (che rinvengono poi alla

Fig. 638.

Fig. 639.

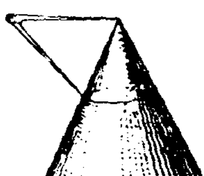


Fig. 640.

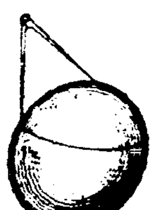


Fig. 641.

medesima cosa) e le fig. 640 e 641 mostrano senz'altro come si possa ottenere facilmente l'intento.

Un compasso prettamente cine e. — Forse se ne potrebbe introdurre (fig. 633) l'uso nelle nostre scuole femminili....

Fig. 642.

Modelli geometrici.

Di certe superfici geometriche non è facile, a chi non abbia la mente esercitata agli studi di questo genere, il formarsi un'idea chiara, netta. Da ciò le collezioni di *modelli* che vanno dalle forme più semplici (prismi, cono, sfera. ...) alle più complesse, delle quali un libro del Blythe (1) offre un saggio fra i tanti. — Ho qui riprodotto (2) alcuni dei meno complicati tipi del genere, la cui costruzione è facile a comprendere.

Nella fig. 643 abbiamo l'iperboloide di rivoluzione generato dalla rotazione d'un'iperbola attorno al suo asse non trasverso, oppure dalla rotazione d'una retta attorno ad un asse che non le è parallelo.

---

(1) Blythe W. H. *On models of cubic surfaces.*

(2) Dal «*Cosmos*».

La tensione dei fili si ottiene con piccoli pesi attaccati a ciascuno di essi. Servendosi di fili rigidi, metallici, o di fili di caucciù si consegue meglio e più semplicemente lo scopo.

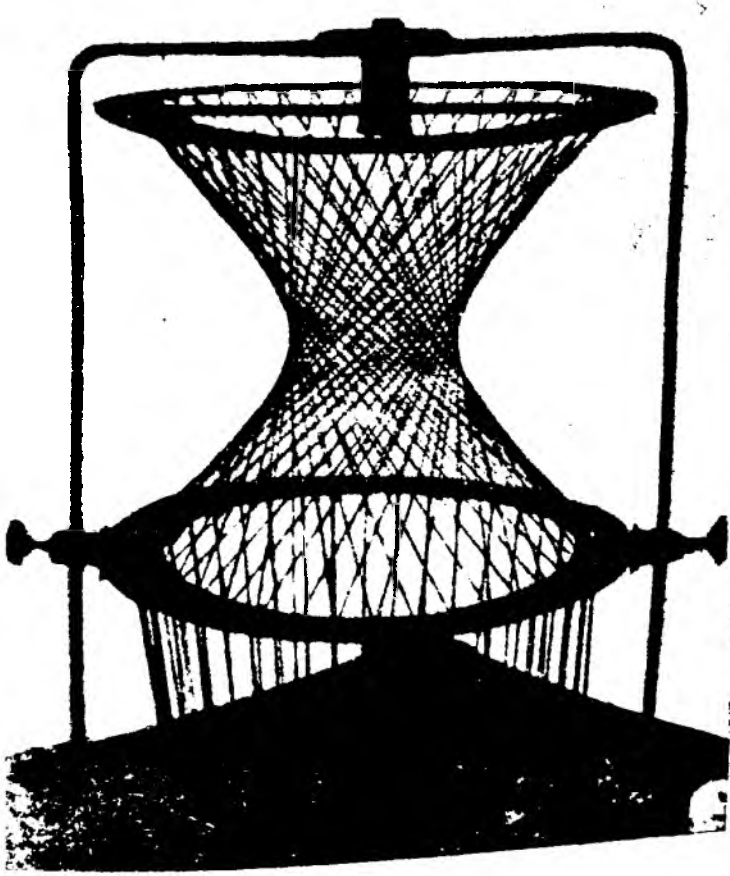


Fig. 643.

Se i fili vengono semplicemente passati attraverso i fori della corona circolare inferiore, spostando questa lungo le colonnette verticali si può modificare a piacere il contorno apparente della superficie.

Nella disposizione della figura si hanno generatrici doppie, per cui si possono avere due iperboloidi coassiali come si vede nella fig. 644.

Si può generare il paraboloide iperbolico mediante due parabole i cui assi sono paralleli, diretti in sensi contrarii e i cui piani fanno tra loro angolo costante; si fa muovere una di esse parallelamente a sè stessa, in modo che il suo vertice

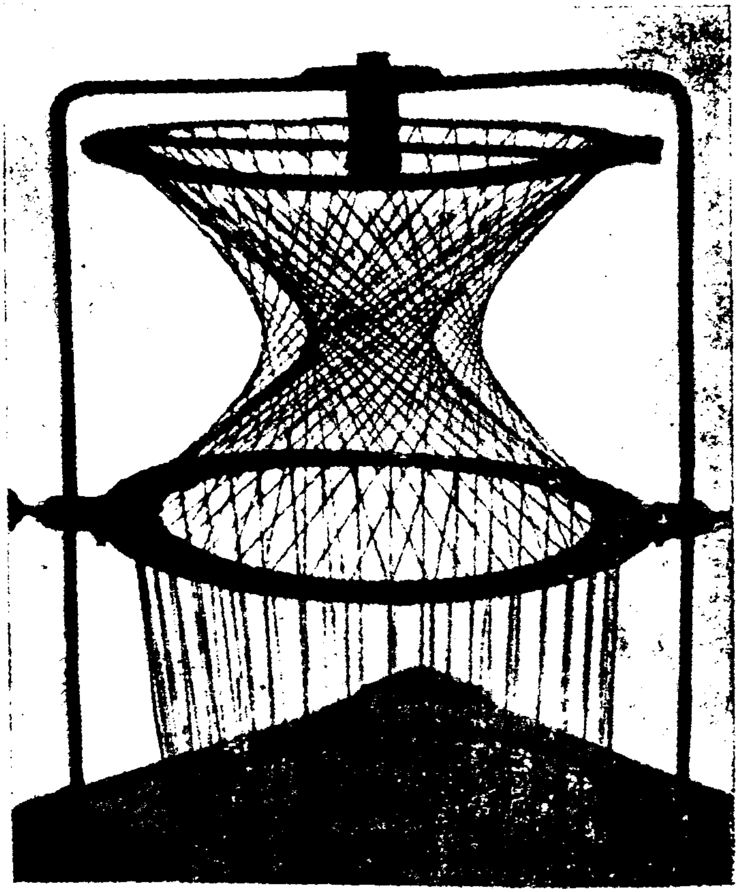


Fig. 644.

descriva l'altra. Ma siccome la superficie ammette un doppio sistema di generatrici rettilinee, è preferibile considerarla come generata da queste rette.

Nella figura 645 l'armatura è composta di un quadrilatero sghembo a lati uguali, con fori equidistanti; i lati sono sno-

dati nei vertici, per modo da permettere di far subire al quadrilatero tutte le possibili deformazioni, cui corrispondono variazioni nella superficie, dalla losanga fino all'area parabo-

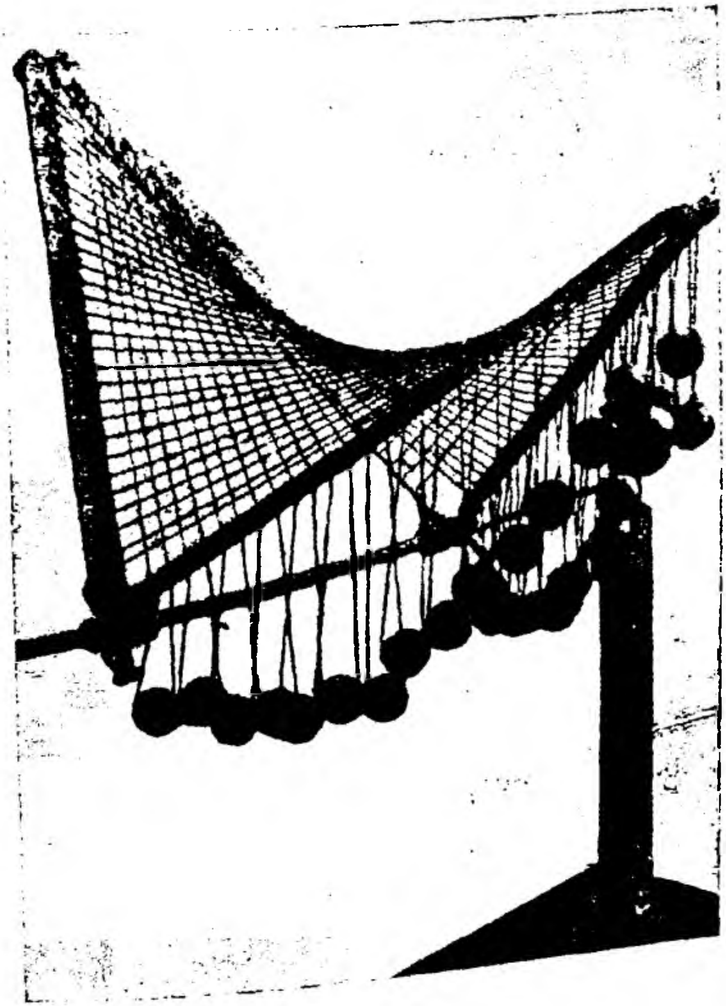


Fig. 645.

lica, passando per il paraboloide equilatero. La rigidità dei fili nelle deformazioni è assicurata mediante i pesi.

La fig. 646 rappresenta un altro paraboloide iperbolico nel quale uno dei piani direttori è orizzontale.

Questo modello permette di rendersi conto delle posizioni particolari nelle quali il contorno apparente (che generalmente è una parabola) in proiezione su di un piano, convenientemente scelto, si riduce ad un punto.

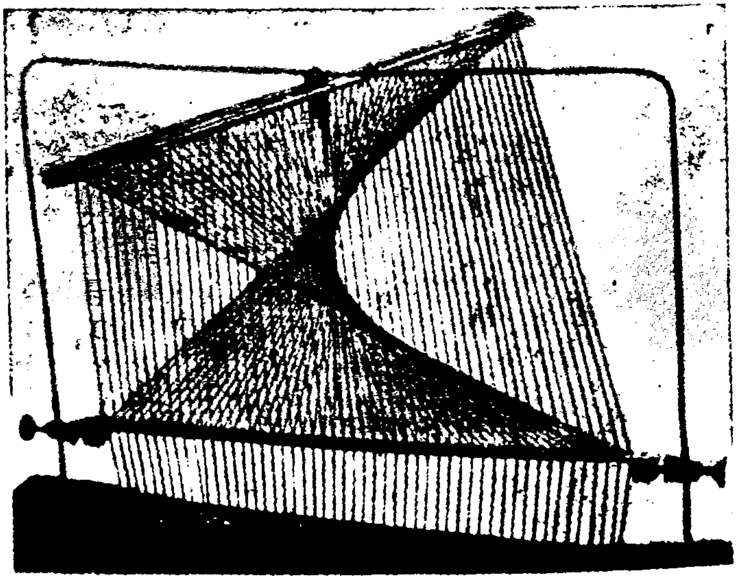


Fig. 646.

Nella fig. 647 abbiamo l'elicoide sviluppabile, superficie luogo delle tangenti ad un'elica traccia su di un cilindro di rivoluzione. Si è ottenuto il modello di questa superficie basandosi su questa sua proprietà: La sezione prodotta da un piano normale al cilindro di base è una evolvente della sezione retta di detto cilindro (evolvente di circolo nel nostro caso). I punti d'attacco delle generatrici debbono essere previamente determinati con un disegno, in modo che i punti di contatto delle tangenti coll'elica siano equidistanti. Questa curva permette di rendersi conto della posizione del piano osculatore d'una curva gobba e rende evidente l'identità delle caratteristiche di questi piani osculatori con le tangenti alla curva. Essendo questa superficie sviluppabile, si può riprodurla in cartoncino.

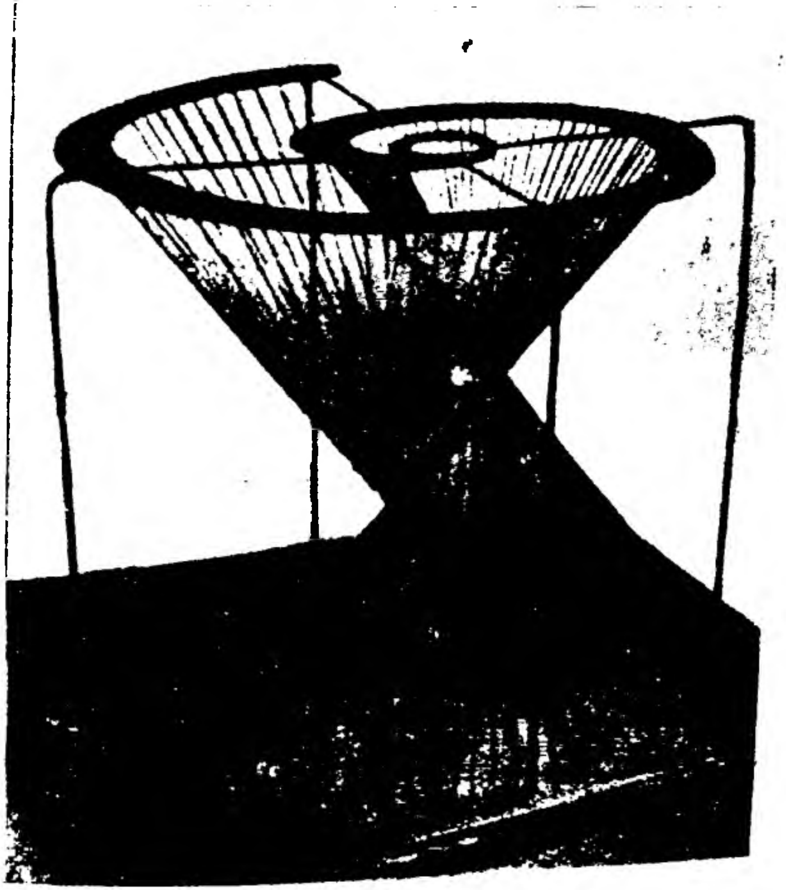


Fig. 647.

I nastri paradromici.

Abbiansi tre anelli di carta 1, 2, 3 di diametro assai maggiore di quello rappresentato nella fig. 648. Per prepararli si taglino delle strisciole di carta di circa 5 cm. di larghezza per 1 metro ad 1,50 di lunghezza. Se ne incollino le estremità direttamente, come nel N. 1 della figura e si avrà il primo anello. Se invece s'incollano dopo di aver fatta girare una delle estremità del nastro su sè stessa si avrà l'anello N. 2. Dando infine due torsioni successive prima d'incollare, si avrà l'anello N. 3.

La teoria di questo problema è dovuta a Listing. Supponiamo di far eseguire all'estremità *A* del nastro, *m* semi-rotazioni prima d'incollarlo sull'estremità *B*, ossia di far eseguire al nastro una torsione *m*.

Se m è pari si ottiene una superficie con *diritto* e *rovescio* e due margini, detta *paradromica*; tagliandola secondo la linea mediana della striscia si ottengono due anelli con m semi-rotazioni ciascuno, intrecciati $\frac{m}{2}$ volte (N. 1' e 3').

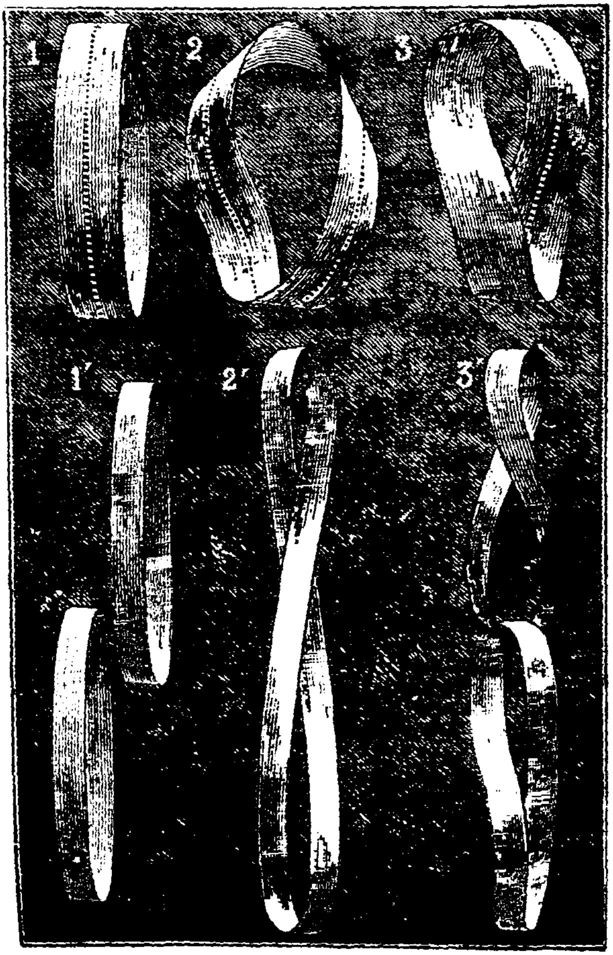


Fig. 648.

Se m è dispari si ha una superficie con una sola faccia, ossia senza diritto nè rovescio e ad un solo margine; tagliata secondo la mediana non dà che un solo anello con $2m$ semirotazioni e se $m > 1$ esso forma un nodo (N. 2').

IPERSPAZIO

Che cosa è l'Iperspazio?

L'applicazione dell'algebra alla geometria (geometria analitica) fatta da Descartes e da Fermat, ha condotto alla considerazione d'una Geometria degli spazii ad *n* dimensioni o iperspazii.

Il sussidio dell'algebra alla geometria sembrerebbe limitato necessariamente, poichè soltanto i fatti analitici collegati alle teorie delle funzioni a una, due o tre variabili (ossia quelle delle forme binarie, ternarie o quaternarie) sono suscettibili di una immediata rappresentazione concreta. Ma i geometri moderni nella loro tendenza a generalizzare varcarono i limiti che la Natura sembrava aver posti alle loro facoltà immaginative e si diedero quindi alla trattazione di spazi comunque estesi, cioè di spazii analoghi alla retta, al piano e allo spazio in cui viviamo, ma di cui ogni elemento fosse determinato da un gruppo di numeri composti di quanti si vogliano elementi. E nel far ciò non si proposero neanche la questione se tali spazi esistessero realmente, sia perchè la considerassero piuttosto di pertinenza della filosofia e della fisica, che della matematica, sia perchè persuasi che la sua soluzione non valesse ad appianare le difficoltà analitiche oggetto dei loro studi. Infatti essi poterono ugualmente conseguire il loro intento, di aver cioè a propria disposizione delle rappresentazioni di molte argomentazioni algebriche e dei risultati a cui queste conducono, poco importando loro se tali rappresentazioni dovessero considerarsi come *sensibili* o *extra-sensibili.* — Certo molte cose si possono spiegare ammettendo uno spazio a quattro dimensioni.

Möbius nella sua opera « *Der barycentrische Calcul* » edita nel 1827 osservava quanto segue: Supposta l'esistenza di una quarta dimensione scompare una differenza inesplicabile fra il piano e lo spazio ordinario, consistente in ciò che, mentre nel piano due figure simmetriche rispetto ad una retta possono essere portate a coincidere, altrettanto non si può fare per due figure solide simmetriche rispetto ad un piano; tale disuguaglianza di comportamento non esiste più quando si ammetta che lo spazio nostro possa ruotare attorno ad un suo piano invadendo uno spazio a quattro dimensioni per poi ritornare alla posizione primitiva, come nello spazio ordinario, cioè a tre dimensioni, si ammette la rotazione di un piano attorno ad una sua retta.

Ma a questo riguardo ben osserva il Prof. Loria come non si sia in obbligo di stabilire tra piano e spazio a tre dimensioni una perfetta analogia dal momento che si devono constatare fra essi, insieme ad alcune analogie, anche notevolissime differenze (vedi a pag. 679).

Klein fece pure osservare che, passando per lo spazio a quattro dimensioni, una curva intrecciata puo trasformarsi in altra che non lo sia, osservazione che venne poi svolta in varie opere di Hoppe, Durège e Schlegel (1880-83).

S. Newcombe, partendo dall'osservazione dello Zöllner che una quarta dimensione renderebbe possibili certi movimenti che altrimenti sarebbero inconcepibili, ha mostrato nella « *Note on a Class of Transformations which Surfaces may undergo in Space of more than Three Dimensions* (1878) » che, ove esistesse una quarta dimensione, si potrebbe trasformare una superficie materiale in modo che la faccia interna divenisse esterna e viceversa.

Veronese fece rilevare (1882) la possibilità di estrarre un corpo da un ambiente chiuso passando per lo spazio a quattro dimensioni.

Altri scienziati tentarono di spiegare certi altri fenomeni coll'ipotesi di uno spazio a quattro dimensioni nel quale il nostro fosse contenuto. Così Clifford, ammettendo che questo fosse di curvatura variabile, potè spiegare alcuni fenomeni di luce e magnetismo dei quali prima non si riusciva a rendersi ragione; lo Zöllner si sforzò di giustificare la conservazione dell'energia e nel 1891 R. de Saussure compose una nuova « *Théorie des phénomènes physiques et chimiques* ».

Lo Schleger poi descrisse nell'ultima parte della sua memoria « *Ueber Entwickelung und Stand der* n-*dimensionalen Geometrie mit besonderer Berücksichtigung der vierdimensionalen* (1886) » i rapporti che, secondo lui, dovrebbero esistere fra lo spiritismo e la teoria dello spazio ad n-dimensioni.

Ho parlato di *dimostrazioni* ma a dir vero questo termine non deve in questo caso essere preso nel senso usuale di ragionamento matematico, rigoroso.

E qui credo non poter far meglio che riportare buona parte d'un opuscolo del Prof. Gino Loria (1) nel quale l'argomento è trattato, concisamente, come meglio non si potrebbe.

« La considerazione degli spazi a più dimensioni ha ormai ottenuto un posto stabile nella geometria e nell'analisi. Tale concetto, per la sua apparenza metafisica, a prima giunta sembrò di natura disforme da quelli che costituiscono la base della scienza più scienza di tutte le altre; tuttavia, ad esso si pervenne per tante vie indipendenti e sicure, che non tardò a palesarsi, anche ai più recalcitranti, il suo carattere di necessità. Il suo corso

. . . . fu di tal volo
Che nol seguiteria lingua nè penna;

risultati che pel suo mezzo si raggiunsero, sono di così alta indiscutibile importanza che è da ritenersi definitivamente hiuso il periodo in cui la geometria a più dimensioni doveva ostenere diuturne ed accanite lotte per dimostrare e sostenere il proprio diritto alla vita. Onde non è mio intendimento itraprendere una difesa che riuscirebbe superflua ai matematici e di scarso interesse e di nessuna utilità pei cultori di ltre discipline.

« Ma ciò che parmi necessario di porre in chiaro si è l'ufficio ıe realmente presta e che si può richiedere alla geometria quattro e più dimensioni nella spiegazione ed eventualmente əlla scoperta di fenomeni naturali.

« Mi induce a ritornare su questo tema — che altri da varii ınti di vista ha già toccato — la lettura di recente fatta di cune *note sulla quarta dimensione*, presentate al II° Con'esso annuale della Federazione fra le Società Teosofiche, nutosi a Londra due anni or sono......

« Benchè lo scopo di tale lavoro non sia dichiarato dal titolo,

———

1) Gino Loria « *Esiste lo spazio a quattro dimensioni?* » Genova 1907.

pure da un passo del testo risulta essere quello di addurre degli argomenti nuovi e di indole geometrica a sostegno della reale esistenza di uno spazio a quattro dimensioni (1).

« Tale intento basta anzitutto a dimostrare come l'autore non si schieri nel drappello degli spiritisti capitanati dallo Zöllner, i quali ammettono come postulato, o meglio come dogma, la esistenza dello spazio a quattro dimensioni, mondo superiore in cui agiscono gli spiriti, ai quali si devono i sorprendenti fenomeni a tutti noti. Tale attitudine, non di cieco credente, ma di scienziato libero da pregiudizii, consente una discussione, alla quale io mi permetto di arrecare qualche modesto contributo.

« Reputo, prima d'ogni altra cosa, opportuno dichiarare essere io fermamente convinto che la geometria non è oggi, e probabilmente non sarà mai, in grado di prestare i servigi che il nostro autore inclina a chiederle, dal momento che essa dal mondo sensibile trae indubbie ispirazioni e suggerimenti preziosi, ma, a differenza delle scienze naturali, non ne attinge il midollo spinale delle proprie argomentazioni. I concetti formanti il canevaccio su cui lavora il geometra sono tutti puramente ideali; ideale è il modesto triangolo che lo scolaretto

---

(1) Nota del Prof. Gino Loria. — « Siffatta questione venne ai dì nostri assiduamente studiata, da un punto di vista speciale, da un matematico, C. H. Hinton, che ad essa dedicò parecchie elaborate pubblicazioni, di due delle quali (*A new era of throught*, London 1900; *The fourth dimension*, idem 1904) mi fu dato di prendere conoscenza diretta. L'Hinton, convinto dell'esistenza dello spazio a quattro dimensioni, si prefisse di organizzare un sistema di esperienze che ponessero in grado tutti di constatarla in modo indiscutibile. Equiparandoci ad esseri affetti da cecità rispetto alla quarta dimensione, egli volle istituire un sistema educativo del genere di quello in uso pei disgraziati che dalla nascita sono privi della vista. Ma evidentemente, l'analogia tra i due casi è limitata; giacchè i maestri dei ciechi sono persone che vedono, mentre non credo esistano individui che abbiano cognizione della quarta dimensione, e, d'altronde, la nozione dello spazio a tre dimensioni viene acquistata per altre vie, oltre quella dei nostri occhi. Il mezzo o l'artifizio usato dall'Hinton per conseguire il proprio scopo sta nello sviluppo della ben nota considerazione di enti (fittizii) a due dimensioni, capaci di ragionare al pari di noi; egli, cioè, si sforza di costruire, per poi estenderlo, il processo logico mediante cui un tal essere potrebbe giungere ad acquistare la nozione del nostro spazio. A tale scopo usa di una collezione di cubi policromi, che, opportunamente disposti, costituiscono una figura da assimilarsi alla proiezione d'una figura iperspaziale, ma per quanto siano ammirabili gli sforzi fatti dal Sig. Hinton per giungere così ad immaginare e far concepire una quarta dimensione, è lecito dubitare che egli abbia compiuto il gran passo; onde, a lettura finita, molti, al par di me, riconosceranno, che egli non è riuscito a trasfondere in altri la fede che lo anima ».

studia sotto la guida di Euclide, quanto lo sono le più complicate configurazioni investigate dalla geometria moderna; ideali sono i numeri immaginarii, quanto gli spazii a più dimensioni e tutti gli altri enti introdotti nella scienza dal matematico mediante semplici definizioni. Tale essendo la natura degli enti matematici, è chiaro che la scienza che io qui indegnamente rappresento non aspira (e, secondo me, non ne è capace) a porgere al fisico quelle prove che egli invano ha cercato per altre vie.

« Scendendo a qualche più minuto particolare, osserverò che il capitolo di ipergeometria del quale si giova l'autore delle argomentazioni che io intendo esaminare, concerne le figure che corrispondono nello spazio a quattro dimensioni agli ordinari poliedri regolari, figure che in quest'ultimo mezzo secolo vennero studiate a fondo da uno stuolo di geometri, un exiguo numero dei quali è noto al nostro autore. Rappresentando tali figure sopra lo spazio nostro, mediante un procedimento modellato su quello che, a partire da Vitruvio, usano gli architetti per rappresentare un edificio (iconografia ed ortografia, oppune pianta ed alzato), si ottengono dei poliedri variamente intrecciati, la cui possibilità è accertata nel modo meno discutibile da bellisimi modelli in filo di ferro posti in commercio dalla Casa Schilling di Halle a. S. Ma dall'esistenza di tali poliedri nulla può inferirsi riguardo a quella di dette figure a più dimensioni e quindi in genere dello spazio quadruplicemente esteso.

« Infatti esse vennero ottenute partendo dall'*ipotesi* che esistesse uno spazio conforme pienamente al nostro spazio, ma a cui fossero concessi dei movimenti con quattro gradi di libertà, e svolgendo logicamente le conseguenze di tale supposizione. Ora il fatto che questi abbiano un'*indiscutibile* esistenza serve bensì a dimostrare che l'ipotesi di una quarta dimensione, non conducendo ad alcun assurdo, è immune da qualunque contraddizione in sè stessa, ma non può in alcuna guisa servire ad elevare quest'ipotesi al grado di verità acquisita dalla scienza.

« Giova qui notare che nemmeno altri capitoli di geometria o alcune discipline fisiche possono condurre ad una inoppugnabile dimostrazione dell'esistenza di uno spazio a quattro dimensioni, contenente lo spazio che noi percepiamo. È vero che, ammessane l'esistenza, si è riusciti a dar ragione di parecchi fenomeni ottici ed elettrici (che il nostro autore ricorda) ed anche a spiegar la strutture molecolare di alcuni composti organici. Ma ciò prova soltanto essere la nozione di spazio a quattro dimensioni *sufficiente* ma non *necessaria* per la spiegazione di quei fatti, distinzione questa che si vedrà essere di capitale importanza quando, ad esempio, si rifletta che un gran numero di fatti connessi alla teoria della luce si possono spiegare egualmente bene coll'ipotesi dell'emissione quanto con quella dell'ondulazione. Similmente dicasi dei sorprendenti fenomeni che gli spiritisti chiamano *apporti* e che riescono di facile intelligenza ai credenti della quarta dimensione; ma chi potrebbe affermare che (accertatane la realtà) essi non possono riuscire egualmente giustificabili in base ad altre considerazioni meno metafisiche?

« Nè può, secondo me, invocarsi come prova dell'esistenza di uno spazio a quattro dimensioni il fatto che col suo mezzo si riesce a fare sparire una diversità di comportamento del piano e dell'ordinario spazio, riferentesi alle figure simmetriche, diversità che consiste nell'impossibilità di far coincidere due figure a tre dimensioni simmetriche rispetto ad un piano (per esempio due guanti di uno stesso paio). Ora è ben vero che ammettendo l'esistenza dello spazio a quattro dimensioni si riesce a stabilire la perfetta analogia, anche in questo riguardo, tra il piano e lo spazio ordinario; ma chi obbliga ad ottenere tale risultato? Piano e spazio hanno delle analogie molteplici, ma presentano anche delle differenze sostanziali incancellabili; così, nel piano esistono infiniti poligoni regolari, mentre lo spazio non contiene che un numero finito di poliedri regolari; nel piano si hanno infinite trasformazioni conformi, mentre nello spazio la sola trasformazione per raggi vettori reciproci conserva gli angoli; così la teoria dell'equivalenza per figure piane limitate da rette si può stabilire senza ricorrere a considerazioni infinitesimali, mentre le corrispondenti questioni dello spazio non possono venir sciolte che con l'aiuto di siffatte considerazioni; inoltre la nota rappresentazione degli odierni numeri complessi non può venire estesa allo spazio senza mutare totalmente natura e carattere, ecc. Ma, ammessa anche per un momento l'imprescindibile necessità di eliminare quella diversità di contegno, chi ha sinora dimostrato che non sia possibile farlo se non ricorrendo alla ipotesi che stiamo attualmente discutendo?

« Riassumendo, dunque, io ritengo che la geometria e la fisica, sinchè si limitano ad adunare dei fatti che si possono spiegare ammettendo che il nostro spazio sia immerso in uno a quattro dimensioni, del quale esso sarebbe una semplice traccia, non possono fornire il baconiano *argumentum crucis* atto a provare l'esistenza di questo. Aumenterebbero certamente la probabilità di tale esistenza ove, ammessala provvisoriamente stabilita, si riuscisse a preconizzare fenomeni verificati poi dall'esperienza. Ma anche ciò non sarebbe ancora una prova definitiva; perchè è pur noto che la teoria vibratoria della luce ha oggi molti oppositori, quantunque, dopo le memorabili ricerche di Fresnel, abbia guidato Hamilton alla scoperta di un notevole fenomeno (la refrazione conica) che dianzi era sfuggito ai fisici ».

MECCANICA

DI ALCUNI PARADOSSI

Moto.

La definizione usuale: « Dicesi *forza* qualsiasi causa atta a produrre o modificare il movimento d'un corpo » si presta ad appunti, quali ad esempio, quello che si potrebbe confondere la *forza* con una *locomotiva*.

Non è sempre facile rendersi ragione esatta dell'effetto prodotto da una forza. Ecco, ad esempio, un problema assai semplice, al quale probabilmente molte persone si troverebbero imbarazzate a rispondere in modo esatto: « Una fune di peso trascurabile passa nella gola d'una carrucola; ad una estremità di essa corda si fissa un peso di 70 kg. e all'altra si applica un uomo di ugual peso; il tutto è sospeso in aria, in posizione di equilibrio; se l'uomo sale arrampicandosi lungo la corda, il peso sarà messo in movimento? E se sì, in quale senso si sposterà?

L'*inerzia* dei corpi ci dà spiegazione di molti fatti ai quali assistiamo quotidianamente e di altri che si possono escogitare; parecchi ne abbiamo esposto in una pubblicazione alla quale rimandiamo il Lettore, tanto più che la materia non è strettamente attinente al soggetto di questo libro (1).

Paradosso di Zenone. — Diceva il filosofo greco Zenone: Una freccia non può muoversi dove non è, e poichè non può spostarsi là dove si trova, nello spazio che essa occupa esattamente, ne segue che non può essere messa in movimento. E non valeva per lui l'osservazione che l'idea stessa del mo-

(1) 700 Giuochi di fisica, chimica, ecc. di I. Ghersi, 3ª edizione. Hoepli.

vimento della freccia implicava il suo passaggio dallo spazio occupato ad un altro punto dello spazio; egli mostrava di credere che l'apparenza del movimento d'un corpo fosse un fenomeno prodotto dalle apparenze successive d'un corpo in riposo, ma in differenti posizioni.

Quel filosofo considerava l'idea stessa del movimento come inconcepibile essendochè ciò che si sposta deve raggiungere il mezzo della sua corsa prima di averne raggiunta l'estremità. Ma supposizione del movimento presuppone dunque un altro movimento; questo ne presuppone a sua volta un altro e così di seguito, indefinitamente.

Achille e la tartaruga, altro paradosso di Zenone. — Zenone, pretendeva che l'agile Achille non avrebbe *mai* raggiunto la Tartaruga sebbene camminasse con velocità dieci volte maggiore, ammesso che essa avesse su di lui un vantaggio, p. es., di 1000 unità lineari. Egli ragionava così: Mentre Achille percorre le mille unità d'anticipo, la Tartaruga percorre 100 di tali unità; mentre Achille percorre queste 100 unità la Tartaruga ne percorre 10 e così di seguito; cosicchè, se è vero che Achille va sempre più avvicinandosi alla Tartaruga, è pur vero che ne rimarrà sempre distante d'un certo spazio.

Siccome, secondo Zenone, l'idea comune di movimento è contradditoria (vedi paradosso precedente) ne deduceva che il suo ragionamento fosse una conferma del suo modo di vedere.

L'errore di Zenone si può mettere in evidenza osservando che il tempo impiegato da Achille per raggiungere la Tartaruga può essere diviso in una infinità di parti che divengono di più in più piccole e costituiscono i termini di una progressione geometrica decrescente; la somma di tutti questi termini dà il tempo finito dopo il quale Achille raggiungerà la Tartaruga. Ma Zenone negava appunto che lo spazio ed il tempo siano indefinitamente divisibili (V. § seguente).

Paradosso di Zenone, sul tempo. — Non solo Zenone sostenne l'inammissibilità della divisibilità infinita del tempo, ma anche quella d'una *misura minima* del tempo.

E intendeva dimostrarlo con questo sottile ragionamento.

Sia t il più piccolo intervallo di tempo che sia possibile concepire. Consideriamo tre rette orizzontali divise ciascuna in tre parti uguali p e coi punti di divisione disposti sulle stesse verticali, in modo che riescano esattamente sovrapposti i segmenti:

$$a\ ,\ a'\ ,\ a'' \qquad b\ ,\ b'\ ,\ b'' \qquad c\ ,\ c'\ ,\ c''$$

Immaginiamo ora che la seconda retta si sposti nel tempo t verso destra d'una lunghezza p, mentre simultaneamente la terza retta si sposta verso sinistra di altrettanto. Si troveranno così a corrispondere verticalmente i tre segmenti b, a', c'' dopo il tempo t. Cosicchè durante questo tempo t (per ipotesi *indivisibile*) la lunghezza a' è passata verticalmente al disotto delle due lunghezze b'' e c''. Dunque il tempo t è divisibile, contrariamente all'ipotesi fatta.

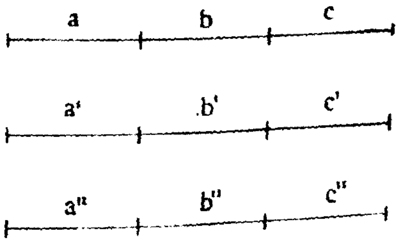


Fig. 649.

Movimento angolare. — Questo esempio dovuto a J. Richard riguarda il movimento su di una spirale logaritmica. In esso si vede come un corpo che si sposti con velocità uniforme e lentamente quanto si voglia, può in un tempo *finito*, girare attorno ad un punto un numero *infinito* di volte. Il risultato è esatto, con le convenzioni ordinarie della matematica.

Una retta OM ruota attorno ad un suo punto O e in pari tempo un mobile M percorre la retta in modo che se l'angolo che fa OM con una direzione fissa OX cresce in progressione *aritmetica*, la lunghezza OM cresca in progressione *geometrica*, la curva descritta dal punto M è una spirale logaritmica. Ad ogni rotazione di 360° del vettore OM corrisponde una spira. Se si fa rotare OM in senso opposto, la lunghezza OM decresce in luogo di crescere e M descrive delle spire man mano più ravvicinate ad O. Tutte le spire sono simili e la lunghezza di ciascuna è una frazione costante della lunghezza della spira precedente, per esempio $\frac{1}{n}$, e nell'interno d'una spira qualsiasi vi è un numero infinito di spire le cui lunghezze diminuiscono di più in più coll'avvicinarsi al polo O.

Consideriamo ora un mobile P che si sposti in modo uniforme sulla spirale procedendo verso il polo. Se esso percorre la prima spira in s secondi, impiegherà $\frac{s}{n}$ secondi a percorrere le seconda spira, $\frac{s}{n^2}$ secondi a percorrere la terza, e così di seguito. Esso raggiungerà dunque il polo dopo:

$$\left(s + \frac{s}{n} + \frac{s}{n^2} + \frac{s}{n^3} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot\right)$$

secondi, cioè in $\frac{s\,n}{n-1}$ secondi. La velocità è uniforme e si vedrà così che in un tempo finito il mobile P avrà percorso un numero infiniio di spire, cioè avrà rotato un numero infinito di volte attorno al polo O.

Il paradosso del doppio cono. — Uno strano e semplicissimo esperimento di ficica che viene eseguito frequentemente nelle squole, consiste nel veder risalire un doppio cono su due

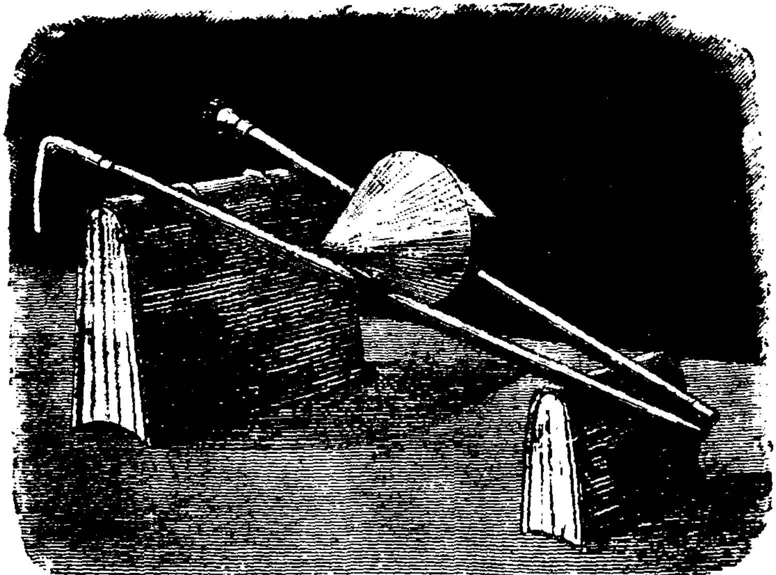


Fig. 650.

guide inclinate in modo che il movimento sembra contrastare col fenomeno tanto comune della caduta dei corpi; infatti il doppio cono sale, ai nostri occhi, lungo le guide, senza aver ricevuto alcuna spinta (fig. 650).

Quanto al doppio cono sarà facile farlo con carta da disegno; si fanno i due coni tagliando nella carta due settori circolari di angolo eguale; si fissano con gomma lungo le generatrici tagliate e quindi per le basi. Le guide poi possono essere due bastoni lisci sostemuti da due libri (1).

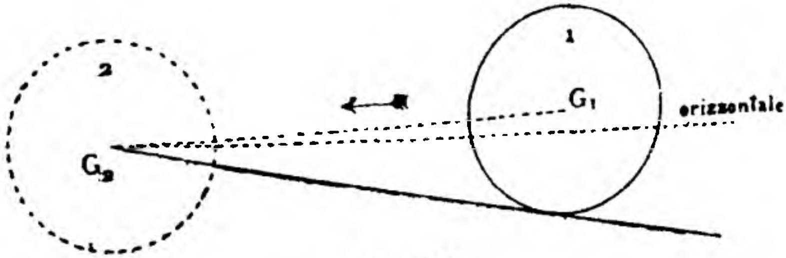


Fig. 651.

La fig. 651, di profilo, spiega in qual modo avvenga il movimento. Effettivamente il centro di gravità *G* del doppio cono si sarà abbassato passando dalla posizione 1 alla posizione 2, sicchè si tratta di una vera *caduta* lungo le guide inclinate; nessun punto del doppio cono si trova *più alto* in fine di corsa che al principio, ma invece sono tutti *più bassi*. Naturalmente occorre che tra l'inclinazione della generatrice dei coni, quella delle quide e l'angolo da esse formato esista una certa relazione affinchè il moto possa prodursi.

In una memoria inserita nei C. R. delle sedute dell'Accademia delle Scienze di Francia (2) A. Mannheim dimostrò che lo spostamento del doppio cono si ottiene vincolandolo ad un cilindro le cui generatrici sono orizzontali e la cui sezione retta è una spirale logaritmica, cilindro che ruzzola sul piano delle direttrici di appoggio dei due coni-guide.

H. Rejal, che studiò analiticamente questo problema in modo esauriente (3), lo studiò pure nel caso in cui al doppio cono mobile si sostituisse una sfera, e trovò che il suo centro descrive un' ellisse. Mannheim a sua volta (4) dimostrò che il moto di tale sfera si ottiene vincolandola ad un cilindro le cui generatrici sono orizzontali e la cui sezione retta è una epicicloide ordinaria, cilindro che ruzzola sul piano delle direttrici. L'intersezione di qusto cilindro e della sfera è il luogo dei punti di contatto della sfera e delle direttrici.

---

(1) Dal mio libro « 700 giochi di fisica, chimica, ecc. » Hoepli 3ª ed. 1920.
(2) *Comptes rendus* 1900 secondo semestre pag. 364 e 817.
(3) » » 1900 secondo semestre pag. 547.
1900 secondo semestre pag. 636.

Il boomerang (1). — È questo il nome (che si pronuncia in italiano *bumerang* con la *g* quasi muta) d'un'arme usata dai selvaggi dell'Australia per colpire la selvaggina, i frutti o qualsiasi altro bersaglio. La sua forma varia alquanto, ma quella indicata nelle figg. 652 e 653 è la più usata. In ogni modo la sua

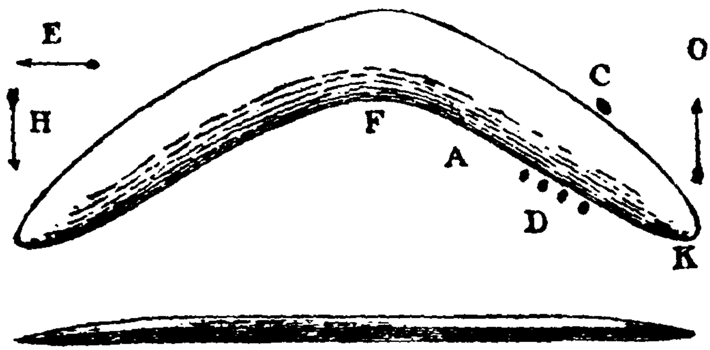
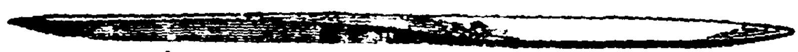


Fig. 652.

caratteristica, che lo rende tanto interessante, consiste nel fatto di ritornare presso il lanciatore dopo aver descritto traiettorie fantastiche, varie a seconda del modo con cui venne lanciato (delle quali le fig. 654 e 655 possono dare un'idea), e dopo aver o no colpito il bersaglio.



A Fig. 653. B

Questo strumento, tanto più sorprendente per essere stato inventato (o forse scoperto per caso) da selvaggi che occupano uno degli infimi posti nella scala etnologica, ha dato luogo a indagini matematiche le quali però non valsero a mettere completamente in chiaro il suo funzionamento.

Esso consiste in un pezzo di legno duro e sottile, appiattito, con gli orli taglienti ed estremità appuntite. La fig. 652 lo rappresenta visto di fianco, cioè con la sua forma arcuata, e visto per orlo, cioè nel suo piano.

(1) Dal mio libro già citato « *700 giochi ed esperienze dilettevoli e facili di fisica, chimica, ecc.* » 3ª edizione - Editore Hoepli - Ivi il Lettore potrà trovare indicati varii modi di riprodurre in modo facile il boomerang degli Australiani.

I cinque punti neri rappresentano la posizione delle dita della mano che deve lanciarlo. È però da notare come non sempre i due tagli del boomerang si trovino in uno stesso

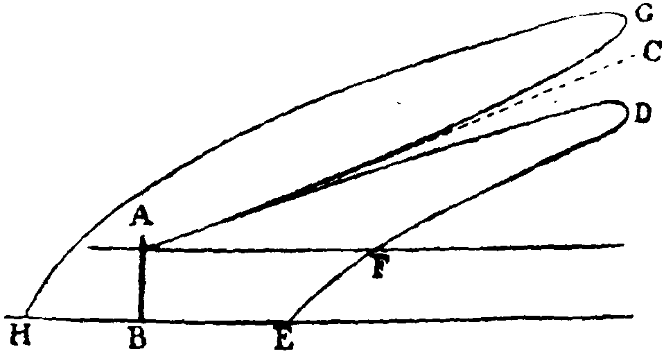


Fig. 654.

piano, uno per esempio, (per una metà dell'arma) rivolto verso un estremo in alto, e l'altro (per l'altra metà) verso l'altro

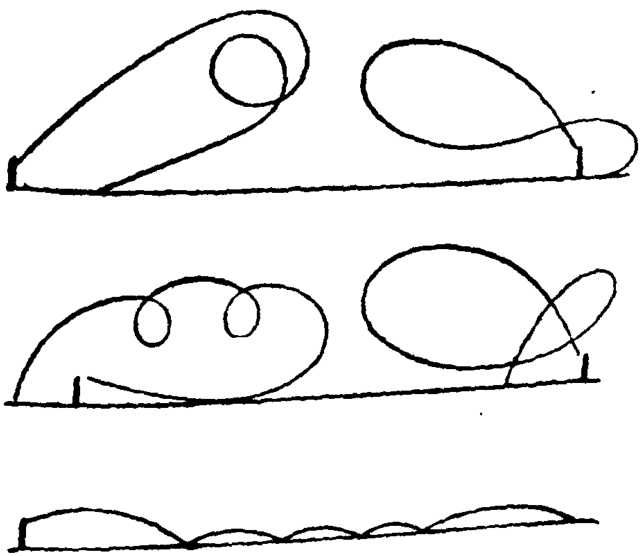


Fig. 655.

estremo in basso. Qualche volta le foglie morte cadendo dalla pianta descrivono curve che ricordano alquanto le traiettorie del boomerang.

Questo viene dai selvaggi lanciato in varii modi, ma sempre imprimendogli un movimento di rotazione orizzontale ossia attorno ad un asse press'a poco verticale. La trottola, e meglio, il giroscopio, dimostrano come un corpo animato da rapido movimento di rotazione possa resistere a tutti i tentativi diretti a spostare il suo piano di rotazione, contro i quali s'incontra una resistenza la cui azione è affatto diversa da quella della gravità. L'impulso impresso dal lanciatore al boomerang gli comunica una tendenza a muoversi in una data direzione, ma la sua forma e quella dei suoi margini gli farebbero assumere fin dall'inizio movimenti irregolari che finirebbero col divenire simili a quelli d'una foglia cadente o d'una carta da gioco lanciata in aria. Ma il movimento rotatorio impresso all'arma nello stesso momento del lancio, vale a regolarne il moto, e tale movimento rotatorio è favorito dalla forma falciata del boomerang.

La fig. 645 rappresenta le traiettorie direi *normali* del boomerang, essendo in AB il lanciatore. La spiegazione delle traiettorie più complesse (fig. 655) va ricercata nell'inclinazione ineguale delle due parti dell'arma verso l'orlo come vedesi nella fig. 653, che determina variazioni alterne di velocità dovute alla maggiore o minore facilità di fendere l'aria, relativa ai due corni del boomerang.

La legge di Hauksbee. — La pressione esercitata sulle pareti di scorrimento da un fluido animato da moto rapido è minore di quella da esso esercitata allo stato di riposo e tale pressione varia in ragione inversa della velocità.

Questa legge è facile a verificare nel movimento d'una corrente d'aria entro un tubo.

L'esperienza designata qualche volta col titolo di *mistero pneumatico* (1) trova la sua spiegazione in questa legge di Hauksbee. Si tratta di un tubetto di latta munito ad una delle estremità d'una piccola coppa, in modo da offrire nel complesso la forma d'una piccola trombetta; disposto coll'asse verticale e la svasatura in alto e collocata una sferetta sull'orifizio del tubo, nella coppa, soffiando con forza nel tubo stesso si ha questo strano risultato, che la pallina non viene lanciata lontano, ma rimane sollevata a piccola distanza dall'orifizio. Ciò dipende dall'essere la pressione dell'aria esterna superiore a quella uscente dal tubo.

---

(1) Vedasi nel già citato « 700 giochi, ecc. ».

Si può disporre quest'esperienza in altri modi, per esempio, così: All'estremità d'un tubo diritto si dispone, a breve distanza dall'orificio, un disco di carta, infilato in modo da potere scorrere, in tre fili di ferro fissati al tubo, nella direzione del suo asse. Soffiando con forza e in modo continuo nel tubo si osserverà che il disco di carta anzichè essere spinto all'infuori tenderà a scorrere *verso l'orifizio* del tubo.

Moto perpetuo.

Il moto degli astri, la vita che anima l'universo rappresentano per noi, che non possiamo concepire nell'Universo stesso principio nè fine, un movimento perpetuo, esterno. Se passiamo però a considerare le cose del punto di vista più ristretto del nostro globo o, sia pure, del nostro sistema solare, comprendiamo benissimo come il movimento della massa oceanica, causa delle maree, non possa considerarsi come un moto perpetuo, ma ristretto alla durata di un periodo dell'esistenza della nostra Terra; lo stesso dicasi del moto delle acque continuamente sullevantesi sotto forma di vapore e ricadenti in pioggie e nevi, delle correnti aeree e marine, ecc., ecc.

Ma per *moto perpetuo* non s'intente questo, in meccanica.

I cercatori di questo *moto*........ introvabile, si propogono di costruire una macchina ancor più perfetta del *sole* e della terra, che possiamo già antivedere spenti, morti, sia pure con un *anti* molto lato. Essi vogliono la macchina capace di conservare *indefinitamente* il moto acquisito per effetto d'un impulso *iniziale*, non solo, ma di produrre un *lavoro utile* cioè di *generare* dell'energia durante il suo moto. Problema che sarebbe già impossibile pur accontentandoci che la macchina avesse semplicemente a mantenersi in moto senza far la generosa favorendoci del lavoro per soprappiù.

Carnot definiva il *motore perpetuo* come *quello capace di creare una potenza motrice in quantità illimitata e di attingere in se stesso le forze necessarie per accelerare il suo movimento.*

Il principio della conservazione dell'energia ha dimostrato, spiegandola, l'impossibilità del moto perpetuo. L'energia *non si crea*; essa non fa che trasformarsi. In un sistema isolato la somma totale delle energie — azione e reazioni — è costante; quindi, essendo *impossibile* ridurre a *zero* l'attrito e le altre *resistenze passive*, non è possibile costrurre una macchina o un apparecchio di qualsiasi genere nel quale il moto iniziale si conservi in perpetuo, senza intervento di nuove forze esteriori.

Noi possiamo seguire con rigore matematico la *prima legge della termodinamica* o dell'equivalenza delle varie forme di energie, per dimostrare anche l'impossibilità pratica del *moto perpetuo* (*Perpetuum mobile*). Se seguiamo il ciclo delle variazioni che si producono in un qualsiasi sistema materiale, per spostamenti di energia (somministrazione o sottrazione di calore), in modo da ritornare in fine al punto di partenza, troveremo che il lavoro (A) prodotto dal sistema durante quel ciclo, sarà proporzionale alla quantità di calore (W) somministrata, cioè $A = J . W$, dove J rappresenta il fattore di proporzionalità o l'equivalente meccanico del calore, che è indipendente dalla natura del sistema preso in esame. A qualunque cambiamento nel sistema si connettono i seguenti cambiamenti d'energia: assorbimento o sviluppo di una certa quantità di calore, produzione di lavoro positivo o negativo, aumento o diminuzione della quantità complessiva dell'energia del sistema. Se $d\,Q$ è la quantità di calore somministrato, se $d\,U$ è la parte di quel calore che serve al lavoro interno e all'innalzamento di temperatura, e se $J . d\,L$ è la parte di quel calore che si trasforma nel lavoro esterno $d\,L$ per aumento di volume vincendo la pressione, allora per l'equivalenza del calore e del lavoro, l'espressione matematica della prima legge di termodinamica sarà:

$$d\,Q = d\,U + J . d\,L$$

Se U è la quantità totale d'energia contenuta nel sistema primitivo, lo stato del sistema sarà modificato se verrà sottratta, p. es., una data quantità di energia $U - U_1$; e noi potremo ritornare al sistema primitivo restituendo al secondo sistema esattamente la quantità di energia che aveva perduta ($U - U_1$); se bastasse per questo ritorno una quantità minore di energia, allora continuando a far avvenire il processo in un senso e nell'altro si arriverebbe a una creazione di energia, cioè al *perpetuum mobile*.

La quantità dell'energia ceduta nel passaggio da uno stato all'altro, è rigorosamente determinata dalla differenza fra i contenuti d'energia dei due stati; quindi non si può mai creare dell'energia senza che la corrispondente quantità di un'altra energia sparisca; la trasformazione di una specie di energia in un'altra avviene in ogni caso secondo un rapporto numerico ben determinato; e più specialmente in tutti i casi in cui è prodotto un dato lavoro mediante calore, deve scomparire una corrispondente quantità di questo, e inversamente se del lavoro si trasformasse in calore.

Nella pila di Volta si ebbe la prima dimostrazione della trasformazione di energia chimica in energia elettrica. Volta realmente credeva di avere scoperto con la sua pila una nuova sorgente infinita di energia gratuita con la quale sarebbe stato possibile ad un *perpetuum mobile* produrre dell'energia all'infinito, senza consumo qualsiasi. Non si conosceva ancora la legge della conservazione dell'energia, e solo più tardi si dovette ammettere che l'energia elettrica della pila di Volta proveniva da una energia risultante da una reazione chimica.

Nondimeno, infinite sono le teorie e gli apparecchi escogitati per realizzare il moto perpetuo che, secondo gli inventori, sarebbe, per merito loro, finalmente scoperto o inventato. Fortunatamente molti inventori si sono limitati a svolgere le loro idee teoricamente soltanto, senza sciupare i proprii denari, o peggio, quelli del prossimo in pratiche applicazioni.

Ma quanti non hanno invece sciupato ingegno (chè alcuni non ne mancavano) tempo e quattrini nella costruzione di congegni che finivano sempre col fermarsi, non già perchè non fosse scoperto il *vero* principio del moto perpetuo ma...... per *imperfezioni* nella costruzione.....! E guai a contraddirli.

A dir vero ho parlato di questi inventori in *tempo passato*, come se ne fosse ormai spenta la specie, il che non è, purtroppo. Certamente il progredire dell'istruzione ha diminuito considerevolmente il loro numero, ma ve ne sono ancora e ve ne saranno sempre. Si può affermarlo con tutta certezza. Sono i degni fratelli dei *quadratori del circolo* e compagnia. (1)..

Non varrebbe la pena di occuparsi dei tentativi inani di maniaci, ma trattandosi qui di *curiosità matematiche* accennerò a qualcuno di essi.

---

(1) Ricordo io stesso di avere assistito in Genova, intorno al 1884 ad una conferenza di certi Ghisi e Ing. (!) Biondi su una mirabolante invenzione del genere con presentazione di modelli del congegno, che non avevano nè capo nè coda, come le formole spiegative dell'Ing. che ne esponeva la teoria. Ma il pubblico *bevve*, e dopo qualche tempo il Ghisi spariva dopo avere *sperperate* (?) un centomila lire dei creduli e troppo ingenui azionisti.

I. — Abbiasi un cilindro liscio e *mobilissimo* attorno a due pernî P, P'. Sia AB una parete piana verticale, tangente al cilindro stesso ma senza impedirne la rotazione. Altre due pareti verticali poggino alle due estremità sulle *basi* del cilindro, lasciando passaggio ai pernii, sempre senza impedire la rotazione del cilindro. Riempendo di mercurio lo spazio compreso fra la parete AB e il cilindro, il peso del mercurio dovrà (!) far girare il cilindro nel senso della freccia, ancorchè il mercurio non cada dalla cavità in cui si trova, vale a dire *in perpetuo.*

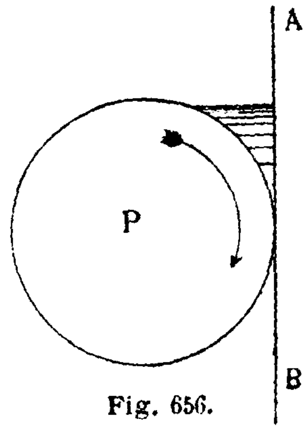


Fig. 656.

II. — Si scalda del mercurio in una caldaia di ferro munita d'un tubo come un alambicco, per il quale i vapori di mercurio vengono addotti in alto, ad una camera refrigerante dove si condensano e dalla quale cadendo generano un movimento che trasformato in calore servirà a mantenere costantemente il *ciclo del movimento* cioè la circolazione del mercurio, producendo *inoltre* durante la caduta un lavoro utile (1).

III. — La forza attrattiva della calamita non si estingue; anzi si rafforza mantenendola, per così dire, in esercizio mediante il contatto con le armature.

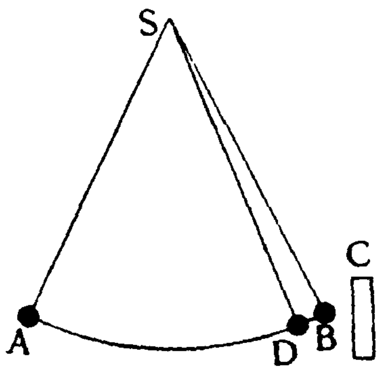


Fig. 657.

Abbiasi dunque un pendolo semplice, ad asta rigida, la cui massa pesante sia di ferro; per quanto perfetta se ne possa fare la sospensione, la resistenza da essa apposta al moto del pendolo, e la resistenza dell'aria finirebbero col fermarlo, distruggendo l'effetto dell'impulso iniziale. Ma, collocando una calamita C presso l' estremo B dell'arco d' oscillazione la sua forza attrattiva farebbe percorrere al pendolo l'arco DB che le resistenze passive gli avrebbero impedito di percorrere.

---

(1) Anche per l'applicazione di questo apparecchio che ho potuto ammirare in una bellissima incisione in rame, venne costituita in Genova nel 1842 una regolare Società, e l'apparecchio stesso era *brevettato* negli Stati Sardi!

Senonchè il pendolo pervenuto a contatto della calamita non ricadrebbe più. Si tratta quindi di eliminare l'azione della calamita appena ottenutone il *soccorso*. Non potendo far questo col ritirare la calamita perchè orrorrerebbe vincere, tra altro, la resistenza apposta dalla massa del pendolo a staccarsene, si potrebbe interporre fra il pendolo e la calamita un *arresto* in modo che il pendolo non potesse venire con essa a *contatto* e nello spazio intercorrente intercalare poi un diaframma *antimagnetico* per bilanciare l'azione della calamita e restituire quindi il pendolo in balia della gravità. Questo movimerto automatico d'interposizione del diaframma (semplice scorrimento) si otterrebbe dalla forza generata dalla caduta del pendolo, vale a dire verrebbe considerato come altra delle forze passive causa della differenza tra *A C* e *A D*. Senza discutere i particolari del ragionamento resterebbe sempre da scoprire la sostanza *antimagnetica*.

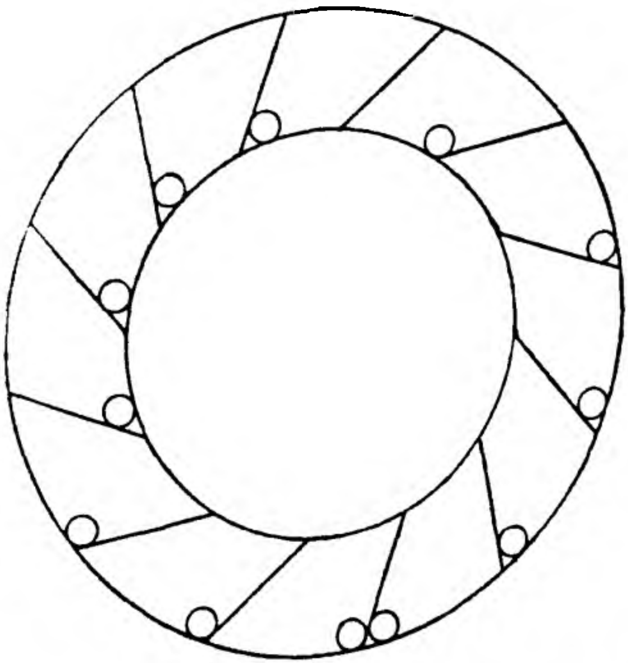


Fig. 658.

IV. — La fig. 658 rappresenta una delle disposizioni più comuni di apparecchi a moto perpetuo..... Si tratta d'una ruota a scompartimenti o cassette in ciascuna delle quali può muoversi una palla pesante. La ruota può muoversi molto liberamente attorno all'asse.

Senza le sfere l'apparecchio sarebbe in istato d'equilibrio indifferente; ma con le sfere, che prendono le posizioni segnate in figura, il sistema *dovrebbe*, secondo gli inventori, mettersi in movimento, pel fatto che essendo le palle nella

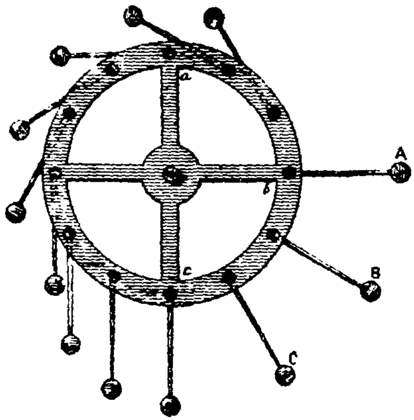


Fig. 659. — Ruota a palle di Geremia Mitz.

parte destra della ruota più distanti dall'asse, la somma dei loro momenti rispetto all'asse stesso dovrebbe risultare mag-

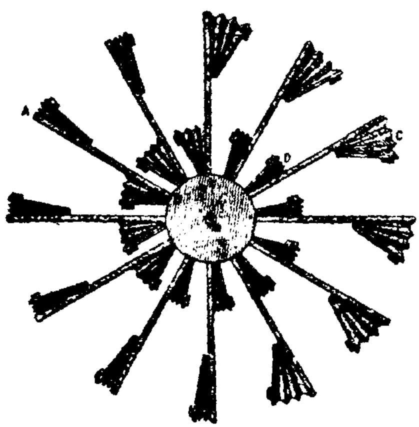


Fig. 660. — Ruota a soffietti di R Lamy.

giore della somma dei momenti delle sfere della metà sinistra della ruota. Il fatto è che le due somme si equivalgono sempre ed essendo una positiva e l'altra negativa il sistema non ha alcuna tendenza al moto, nè a conservare quello che gli fosse stato impresso.

Lo stesso dicasi per apparecchi simili nei quali alle sfere sono sostituite palette snodate (fig. 659).

Analoga alle ruote rappresentate nelle fig. 657 e 658 è l'altra che vedesi nella fig. 660. Ogni suo raggio ha un canale che mette in comunicazione le due camere a soffietto *C* e *D*, uno all'estremo del raggio e l'altro al mozzo. Il coperchio dei soffietti è caricato d'un peso. Il meccanismo *dovrebbe* mettersi in moto e....... non fermarsi più, quando si fosse introdotto un liquido in uno dei due soffietti di ciascun raggio......

Di Bernouilli. — Siano due liquidi miscibili tra loro e i cui pesi specifici siano come le linee *AB* , *CD* (fig. 661).

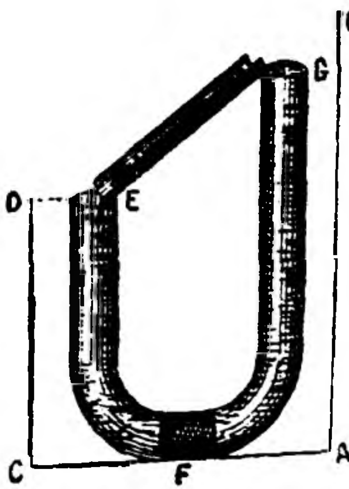


Fig. 661.

Si sa che, se due tubi comunicanti hanno le altezze al disopra del ramo di comunicazione, in questo stesso rapporto, si potrà riempire il ramo meno alto col fluido più pesante, e il più alto col fluido più leggero, e i due fluidi resteranno in equilibrio. Il che significa che se il ramo più alto fosse tagliato qualche poco al disotto della lunghezza che deve avere, il fluido contenuto in questo ramo potrebbe colare nel più basso.

Supponiamo ora che il ramo meno alto *EF* sia riempito di fluido composto di due liquidi di diverso peso specifico, e che nel punto *F* sia stabilito un filtro che non lasci passare che il più leggero; che il tubo *FG* sia pieno di questo e che sia un po' meno alto, per stabilire l'equilibrio fra il liquido della branca *EF* e quello dell'ultima *FC*.

Così stando le cose, e il filtro non lasciando passare che il liquido più leggero, questo, in virtù dell'equilibrio rotto, sarà spinto fuori per l'orifizio G e conseguentemente potrò, per un piccolo tubo di derivazione, essere ricondotto nell' orifizio E, ove si mescolerà di nuovo al liquido contenuto in $E\,F$. E ciò continuerà sempre poichè il liquido $G\,F$ sarà sempre troppo leggero per controbilanciare la colonna di liquido composto $E\,F$. Così, ecco un movimento perpetuo, concludeva Bernouilli.

Senonchè, anche riuscendo a realizzare la disposizione ideata dal Bernouilli, la cosa non riuscirebbe sebbene sembri convincente il ragionamento su esposto

---

— Quando però il sistema considerato non sia isolato, si può avere che la somma totale d' energia non sia costante introducendo *continuamente* in esso una certa quantità di energia da una fonte esteriore inesauribile; in tal caso il moto perpetuo è materialmente realizzato...... finchè la forza esteriore non cessi di agire e il consumo degli organi dell' apparecchio gli permetta di funzionare.

Si hanno in tal modo quei congegni nei quali la forza motrice è derivata dal calore del sole, dalle maree, dalle cadute d'acqua, dalla dilatazione e contrazione dei corpi dovuta al variare della temperatura atmosferica, dall' igroscopicità di sostanze chimiche, dalla variazione della pressione atmosferica, ecc., ecc. — Darò anche di questi apparecchi un breve cenno senza parlare dei più comuni (motori idraulici, ecc.).

I. — Nella seconda metà del secolo XVIII esisteva a Parigi un orologio nel quale il movimento del pendolo era ottenuto per effetto della dilatazione d' una sbarra d' argento pel variare della temperatura ambiente. Questi congegni potrebbero essere muniti di *accumulatori* di energia (pesi sollevabili).

II. — *Ball* indica pure un orologio da tasca contenente un piccolo peso d'acciaio che si innalza ad ogni passo della persona che porta l'orologio, indi ricade caricando così a poco a poco la molla. Un percorso di 3 km. è sufficiente per caricare l'orologio per 24 ore.

III. — **Ruota di Barlow.** Questa esperienza venne immaginata per mettere in evidenza l' azione esercitata da una calamita su di una porzione di corrente mobile.

Una ruota di rame, dentata, alleggerita con trafori nella parte centrale, può ruotare attorno ad un asse FG. Quando essa gira, i suoi denti vengono a lambire la superficie d'un bagno di mercurio in una vaschetta ED.

Una corrente elettrica arriva al mercurio pel bottone C e, per i denti della ruota perviene al suo asse d'onde ritorna al polo negativo. Una calamita AMB, fissata al supporto ha i suoi poli rivolti alle due facce della ruota.

Abbiasi un osservatore situato verticalmente nella corrente mobile, con la testa verso l'asse FG. Se guarda verso il polo boreale B, sarà sollecitato da una forza diretta verso la sua

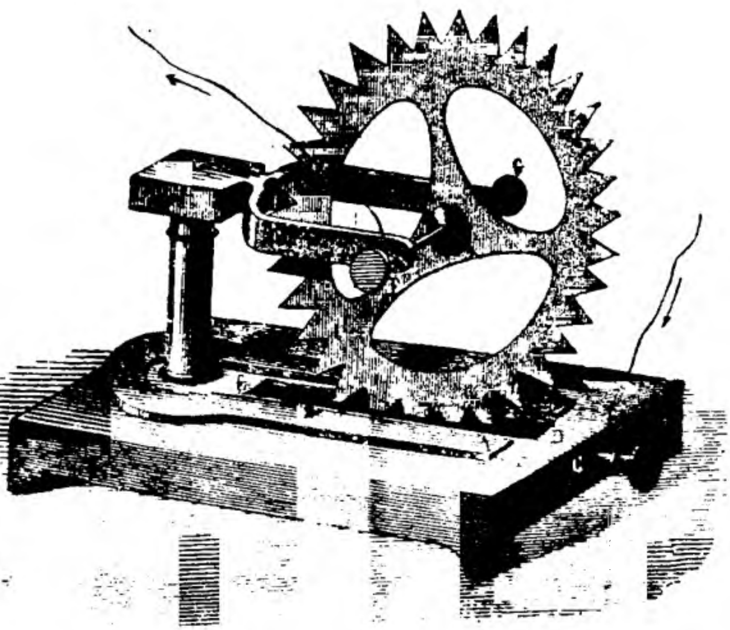


Fig. 662.

sinistra da D in E. Se si volta in modo da guardare il polo A, sarà spinto verso la sua destra, cioè ancora da D verso E poichè la sua destra avrà mutato posizione nel suo voltarsi. Per conseguenza la ruota che conduce la corrente dovrà rotare da D verso E, come infatti è confermato dall'esperienza. Se ne conclude che l'azione dei poli d'una calamita sopra un elemento di corrente ha realmente la direzione indicata.

Cosicchè la ruota di Barlow ci offre un notevole esempio di rotazione continua prodotta da azioni elettromagnetiche. La forza che la calamita esercita sulla ruota è costante poichè nessuna deformazione si produce nell'apparecchio per la rotazione della ruota; ne segue che *la velocità acquistata dall'apparecchio aumenta ad ogni giro, e aumenterebbe senza limite,* se...... da un lato gli attriti da vincere non agissero in senso contrario a quello del movimento per limitarne la velocità, e se d'altra parte i fenomeni d'induzione non diminuissero l'intensità della corrente tanto più energicamente quanto più grande è la velocità e più considerevole il lavoro compiuto dalla corrente.

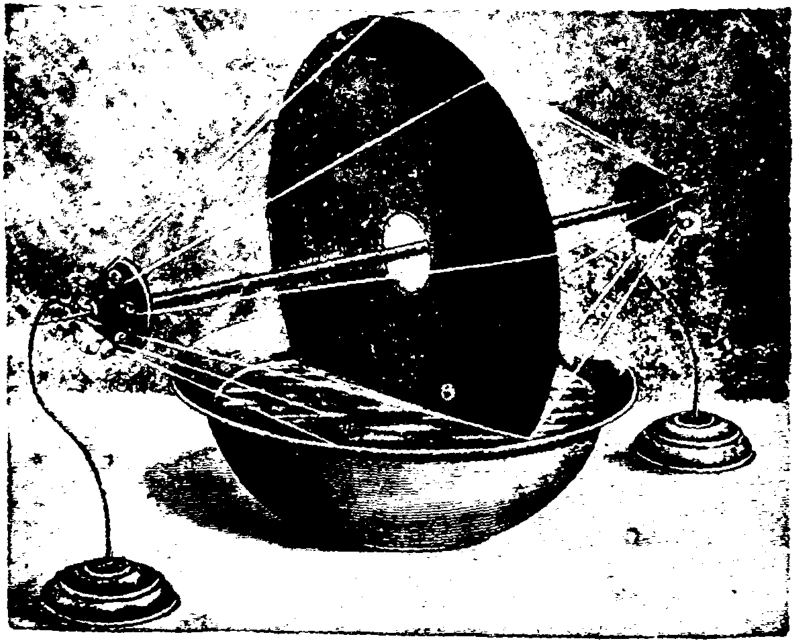


Fig. 663.

IV. — La ruota automotrice. Questo singolare apparecchio formava una delle attrattive della prima esposizione-concorso di giocattoli indetta a Parigi dal prefetto di polizia Lépine. È dovuto al Sig. Raimondo Guillot. Consiste in un disco d'una materia qualunque: ebanite, zinco, vetro, ecc., omogenea più che sia possibile, con un largo foro nel centro, attraverso al quale passa, senza sfiorarlo, un asse di legno o di ferro. Il disco è mantenuto in posizione perpendicolare all'asse mediante cordicelle di canapa (12 a 15) che passano sulla sua periferia e vanno a fissarsi alle due estremità dell'asse. Questo ruota su dei cuscinetti a biglie. La parte inferiore del disco è immersa in una bacinella d'acqua. Questo apparecchio ruota indefinitamente cioè........ fino a che vi è acqua nella vaschetta.

Anche qui dunque, niente *moto perpetuo*. Passiamo a spiegare il moto dell'apparecchio.

Si consideri la fig. 664. Abbiasi un asse XY montato su due cuscinetti a punta. Nel centro un largo manicotto o mozzo

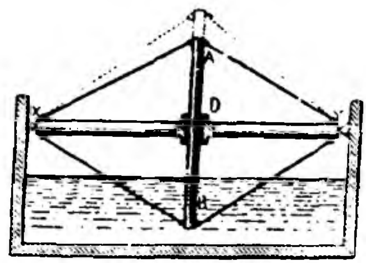


Fig. 664.

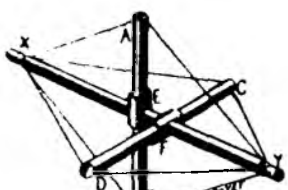


Fig. 665.

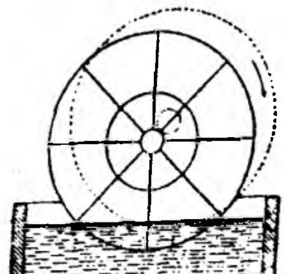


Fig. 666.

lascia passare, senza toccarla, una sbarra pesante AB sostenuta da cordicelle di canapa. Se si fa immergere la parte B nell'acqua, la cordicella contrarrà e farà assumere alla sbarra la posizione segnata punteggiata in figura. L'equilibrio sarà dunque rotto e la sbarra oscillerà e allora sarà l'estremità A che verrà a pescare nell'acqua; mentre la cordicella XBY disseccherà e si allungherà, l'altra sarà bagnata e si accorcerà facendo risalire la sbarra in senso inverso. L'equilibrio sarà nuovamente rotto, e così di seguito. Ma questa disposizione non funzionerebbe che come un bilanciere.

Se si immaginano due sbarre, anzichè una, disposte ad angolo retto (fig. 665) si avrà un movimento di rotazione assicurato, che si potrà rendere più facile con un numero maggiore di sbarre, che nel loro assieme potranno essere sostituite con maggior semplicità da un disco come nella fig. 663.

Si ha uno spostamento del centro, una eccentricità costante, come lo indica, esagerandolo, la fig. 666 e il disco gira sempre nello stesso senso.

La velocità è funzione della rapidità d'evaporazione del liquido sulle cordicelle che escono dalla bacinella. Si può sostituire l'acqua con alcool o con etere, come pure trovare altre sostanze che bagnate si contraggano maggiormente della canapa ritorta, o più rapidamente. Ecco tutto.

CURVE DI DEFORMAZIONE

Nella trazione e *compressione dei corpi omogenei e isotropi* le tracce delle deformazioni sul contorno esterno consistono, prima come *dopo il limite di elasticità, in linee avvolte da si-*

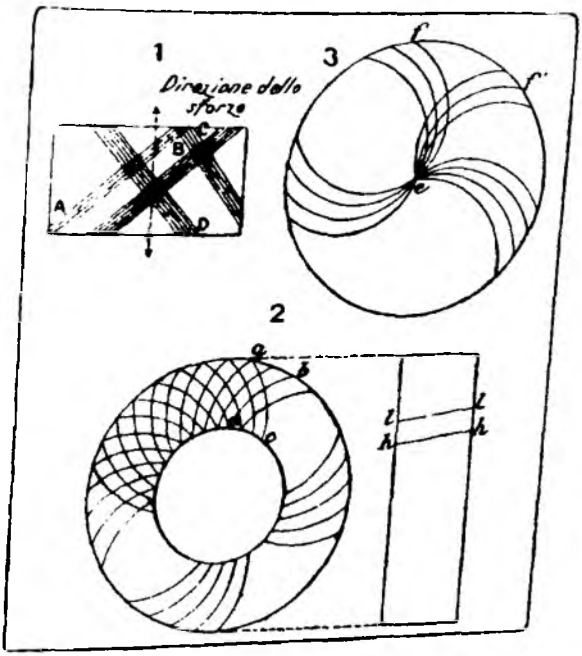


Fig. 667.

nistra a destra o da *destra a* sinistra, che si sviluppano tutte su di un piano qualunque passante per una delle generatrici del pezzo di saggio, *secondo* rette quali *AB* e *CD*, inclinate di uno stesso angolo sulla direzione dello sforzo.

Nel caso d'un cilindro cavo sottoposto a pressione sia interna che esterna le deformazioni tagliano le sezioni piane secondo *spirali logaritmiche* coniugate, quali *a b* e *a c* fig. 667 aventi il polo sull'asse del cilindro, e le superfici cilindriche secondo le porzioni di eliche *hh* ed *ll* (fig. 2).

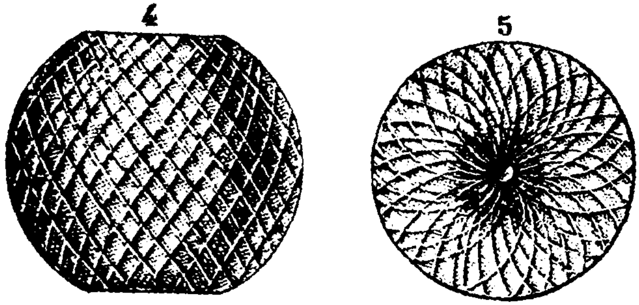


Fig. 668.

Le lastre appoggiate sul loro contorno e sottoposte alla punzonatura nel centro, danno parimente delle spirali logaritmiche *ef* ed *ef'* (fig. 3) aventi per polo il centro del punzone.

Tali deformazioni si manifestano in incavo nella trazione e in rilievo nella compressione.

La fig 668 offre altri esempi della regolarità di tali linee di deformazione nei metalli (esperienze del Maggiore di artiglieria Hartmann, francese).

GIOCHI

DOMINO

Disposizioni rettilinee.

In quanti modi si possono disporre i pezzi del domino in linea retta, seguendo le regole del gioco?

L'elemento iniziale, p. es., un cinque, dovrà essere uguale a quello finale. — Consideriamo una combinazione rettilinea qualunque. Possiamo immaginarla ridotta a *circolare* facendo combinare il primo numero coll'ultimo.

In una di tali combinazioni che non contenga doppi, si può intercalarvene uno in tre punti distinti. Quindi se C indica il numero delle combinazioni circolari senza doppi l'aggiunta del doppio sei, per esempio, darà luogo a $3\ C$ combinazioni; del pari l'aggiunta d'un altro doppio triplicherà il numero di combinazioni precedente, cosicchè in definitiva il numero totale delle combinazioni circolari con doppi sarà di:

$$3^7\ C = 2187\ C$$

Se ora consideriamo una qualsiasi di tali combinazioni di 28 pezzi, scegliendo successivamente ciascuno dei 28 pezzi come iniziale, ne risulteranno 28 combinazioni rettilinee distinte, da cui si deduce che il numero totale di queste è $28 \cdot 3^7 \cdot C$. Tutto si riduce dunque a trovare il numero delle disposizioni circolari che non contengono alcun doppio.

Il numero C delle combinazioni circolari trovato da Reiss è di 129976320 e quello delle combinazioni rettilinee 7959229931520. Questi numeri dovrebbero essere divisi per due qualora non si tenesse conto del senso.

Problema generale dei «tre in fila».

Nel gioco ben noto della *Tela* si tratta di disporre tre pedoni su di una medesima fila o retta. Venne proposta una forma più generale per questo gioco enunciabile così: *Disporre* n *pedoni*

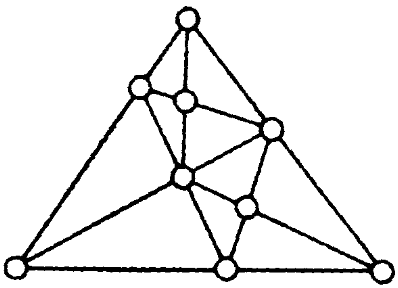


Fig. 669.

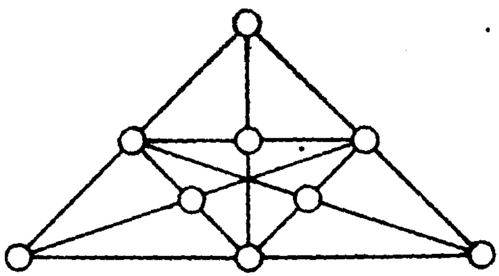


Fig. 670.

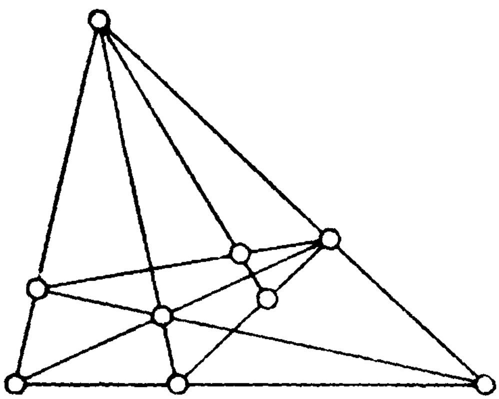


Fig. 671.

su di un piano in modo da formare il maggior numero possibile di rette, ciascuna delle quali non contenga che tre soli *gettoni*. Riesce facile disporre i pezzi secondo un numero di righe uguale alla parte intera dell'espressione:

$$\frac{1}{8}\left(n-1\right)^2$$

Abbiasi un punto M d'una cubica. Sia N il punto nel quale la tangente in M sega la cubica; sia A il punto nel quale la tangente in N sega la curva; la retta MA sega la curva in B; NB sega la curva in C; MC in D; ND in E e così di seguito. I pedoni possono venire disposti nei punti $M, N, A, B, C, \ldots\ldots$ Cosicchè 9 pezzi possono essere disposti su 8 righe; 10 pezzi su 10 righe; 15 su 12; 81 su 800; 101 su 1250, ecc.

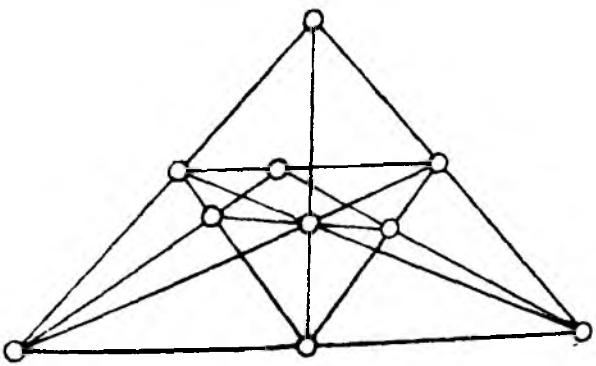


Fig. 672.

Sylvester ha però dimostrato che la costruzione precedente fornisce un numero di terne rettilinee uguale alla parte intera dell'espressione:

$$\frac{1}{6}\left(n-1\right)\left(n-2\right)$$

quando M è un punto dell'n^o ordine sulla cubica. Cosicchè si possono disporre 9 pedoni in 9 righe (fig. 669-670-671-672-673-674) 10 pedoni in 12 righe; 15 in 30, ecc., ecc.

Non si ha finora una teoria generale che permetta di stabilire il numero massimo delle righe di tre pedoni che si possono ottenere con n pedoni disposti su un piano.

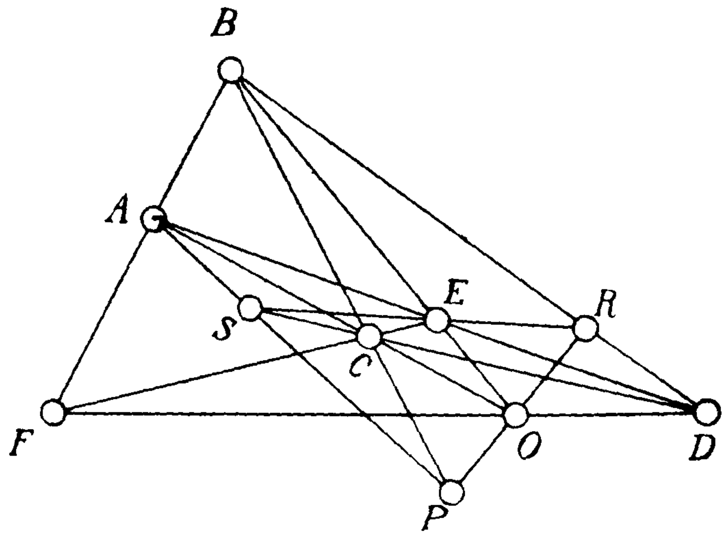


Fig. 673.

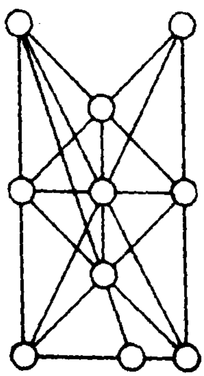


Fig 674.

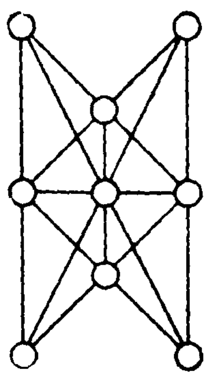


Fig. 675.

Sylvester stesso ha osservato che i numeri dati dalla formola precedente non sono i limiti estremi che si possono raggiungere, come si può vedere nella fig. 675 che dà 10 righe con 9 pedoni.

Un esagono regolare (fig. 676) fornirebbe una soluzione di tal genere nella quale le terne sarebbero:

$$ABM_\infty \quad FCM_\infty \quad EDM_\infty \quad BCN_\infty \quad ADN_\infty$$
$$FEN_\infty \quad CDP_\infty \quad BEP_\infty \quad AFP_\infty \quad M_\infty\ N_\infty\ P_\infty$$

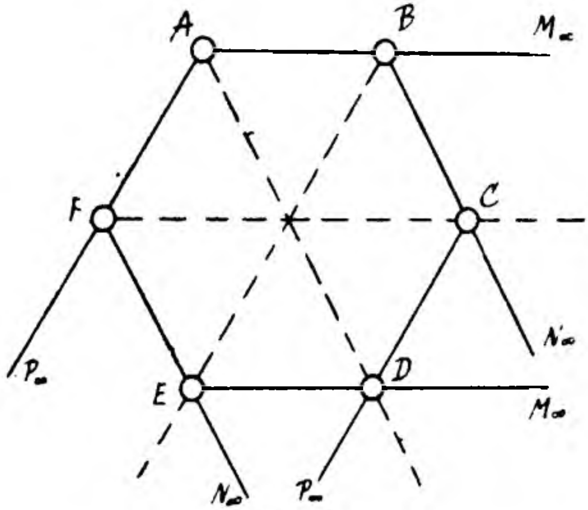


Fig. 676.

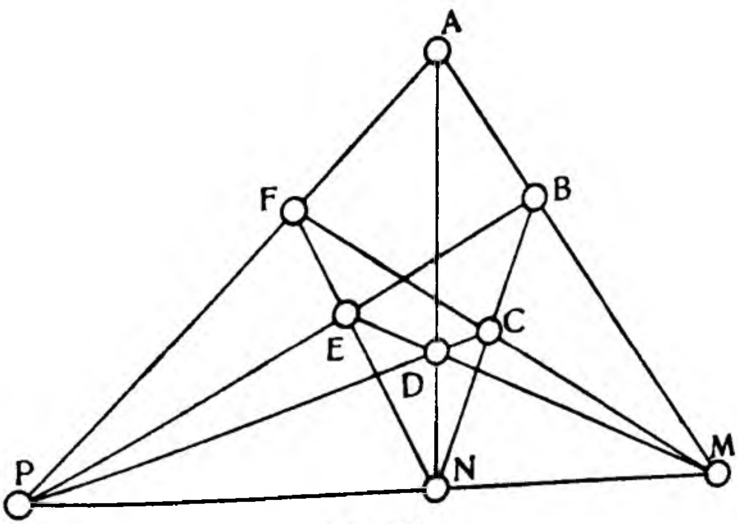


Fig. 677.

Una proiezione qualunque di esso (fig. 677) costituisce quindi una soluzione. Questo modo di ottenere soluzioni del problema si può applicare ad altri casi; per esempio dalla fig. 678 si può

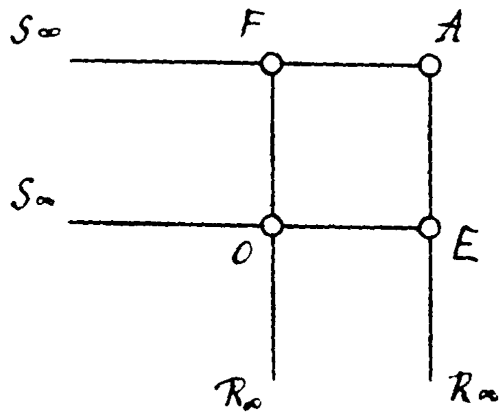


Fig. 678.

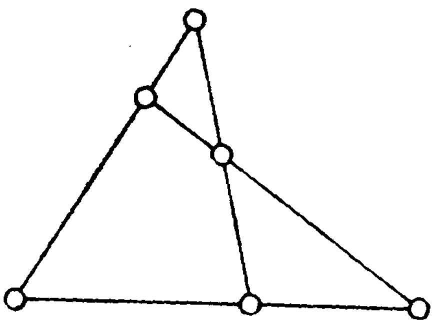


Fig. 679.

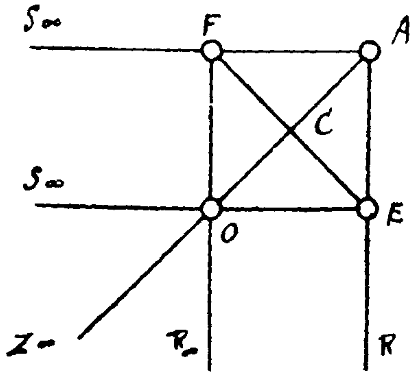


Fig. 680.

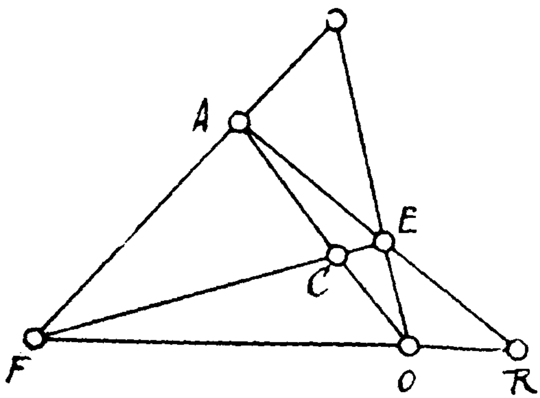


Fig. 681.

considerare come dedotta, la fig. 679 che comprende i 6 punti A, E, O, F, R_∞, S_∞. Dalla fig. 680 si possono ugualmente immaginare dedotte le fig. 681 e 682 secondo che si considera proiettato il punto C al finito o il punto Z all'infinito.

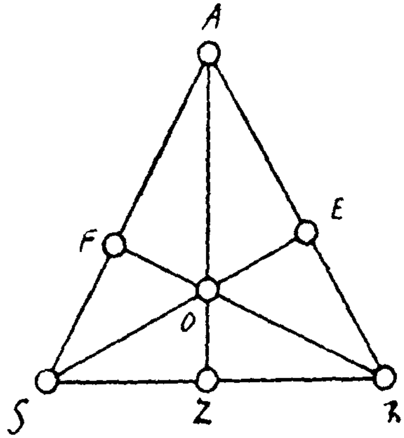


Fig. 682.

Il seguente prospetto indica il numero delle terne in fila che si ottengono in ciascuna delle figure che diamo sull'argomento.

Figura	Pedoni	Terne
678-679	6	4
683	7	5
680-681-682	7	6
684	8	7
669-670-671-689-690	9	9
675-676-677	9	10
685	10	10
672-673-674-691	10	12
687	10	13
686	11	14
688	11	15

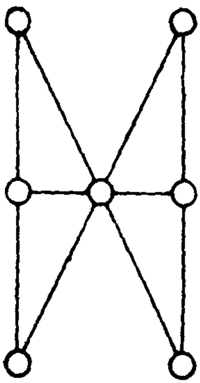


Fig. 683.

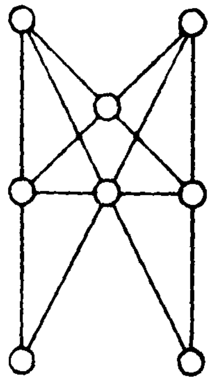


Fig. 684.

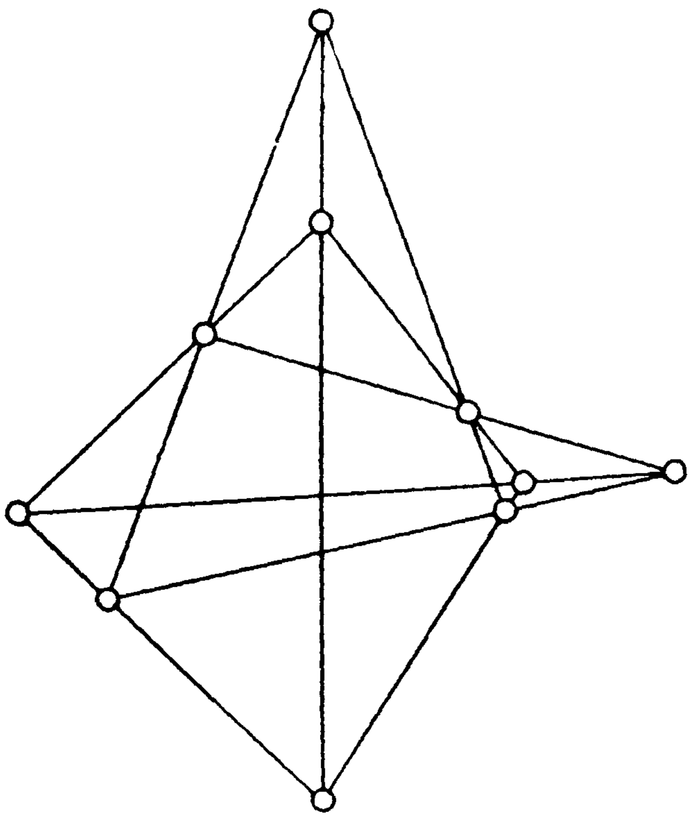


Fig. 685.

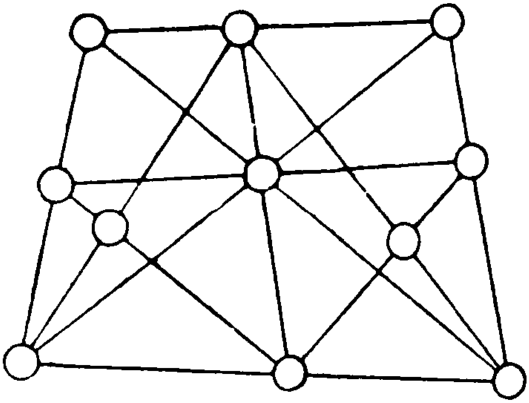


Fig. 686.

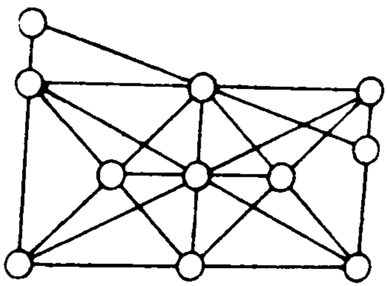


Fig. 687.

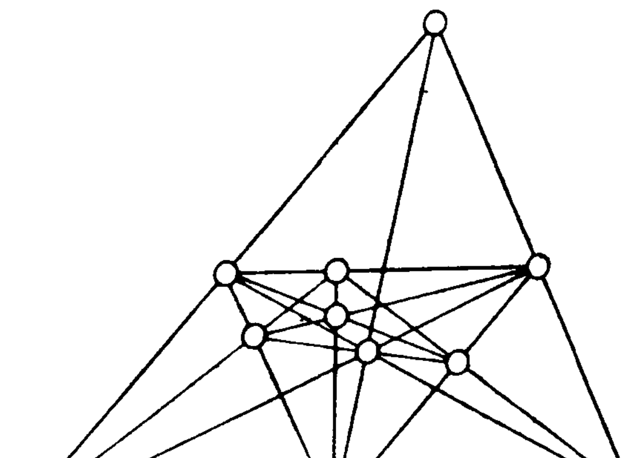


Fig. 688.

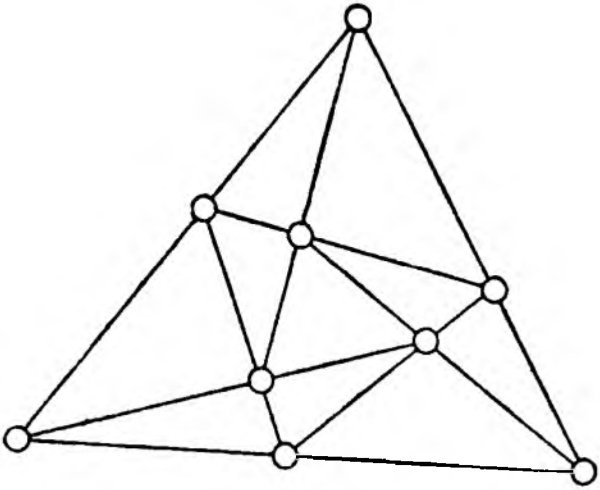


Fig. 689.

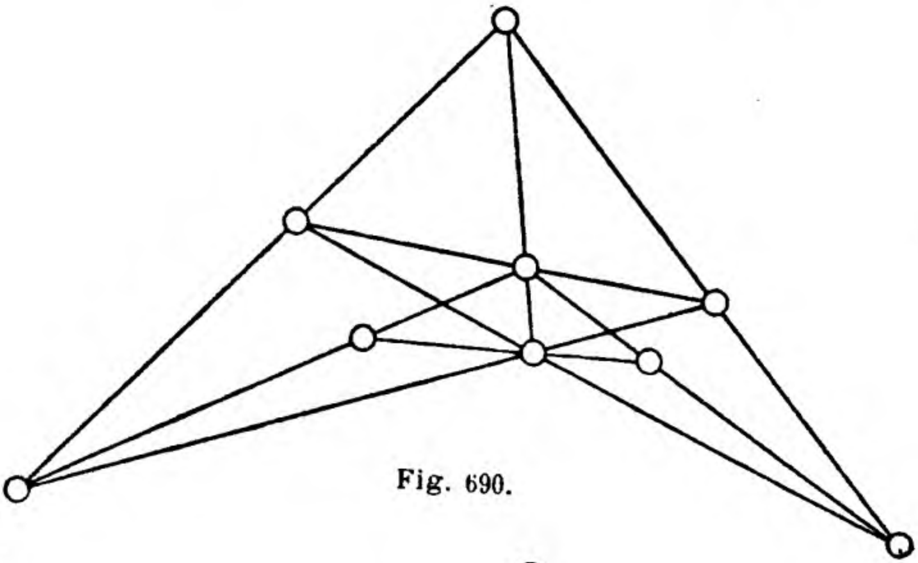


Fig. 690.

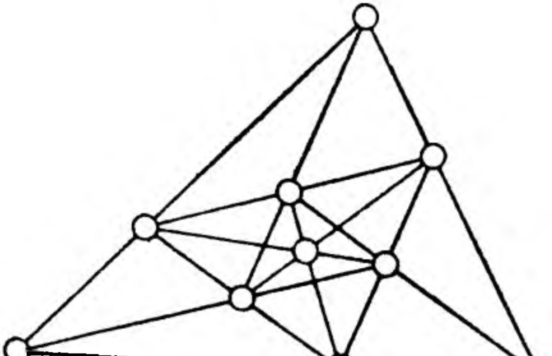


Fig. 691.

Generalizzazione del problema: p *in fila.* — Dal problema dei tre pedoni in linea retta si passa a quello generale: *Disporre* n *pedoni sopra un piano, in modo da avere il massimo numero di volte* p *di essi in linea retta.*

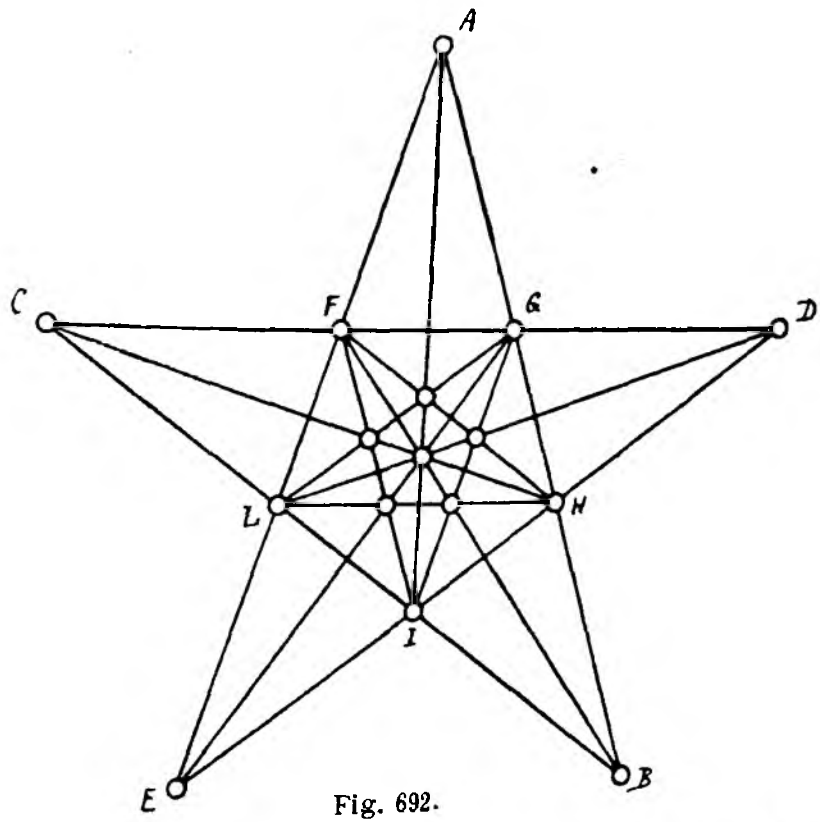


Fig. 692.

Eccone alcuni esempi: Nella fig. 692 il pentagono stellato *A, B, C, D, E, F, G, H, I, L,* fornisce con 10 pedoni 5 righe di 4. Nella stessa figura abbiamo con 16 pedoni 15 righe di 4. Nella fig. 693 con 19 pedoni abbiamo 10 righe di 5. Questa figura non è che una prospettiva di quella che si otterrebbe con 10 rette determinate dalle equazioni:

$$x = \pm a \qquad x = \pm b$$

$$y = \pm a \qquad y = \pm b \qquad y = \pm x$$

In questa figura due dei punti sono all'infinito.

Sul pentagono stellato si possono ottenere con 7 pedine 4 allineamenti di tre, in 4 modi che corrispondono ai varii gruppi di 3 vertici possibili senza pedine; di vertici se ne hanno 5 in-

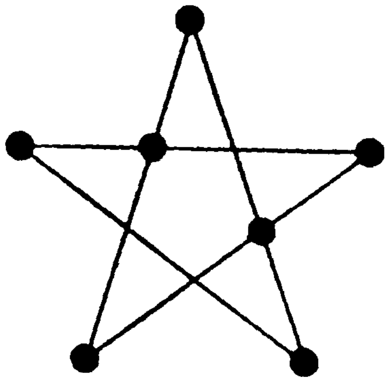


Fig. 693.

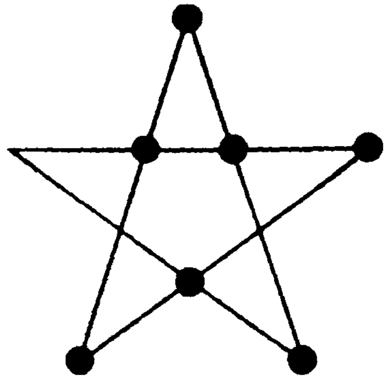


Fig. 694.

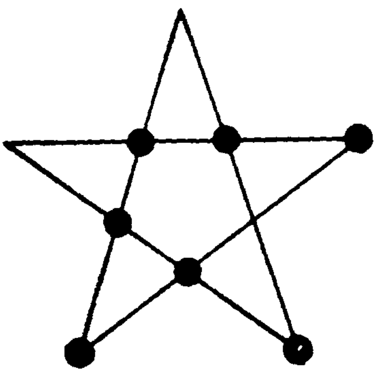


Fig. 695.

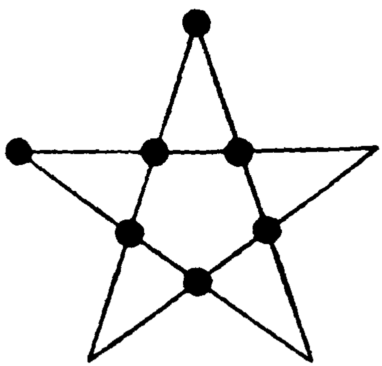


Fig. 696.

terni e 5 esterni; ma bisogna escludere i gruppi che formano due *coppie* su due lati, il che obbligherebbe ad avere 4 dei 7 pedoni su di un solo lato.

Non restano perciò che questi gruppi:

Esterni	Interni		
—	3	Figura	693
1	2	»	694
2	1	»	695
3	—	»	696

Alle fig. 694, 695 ne corrispondono però altre due simmetriche.

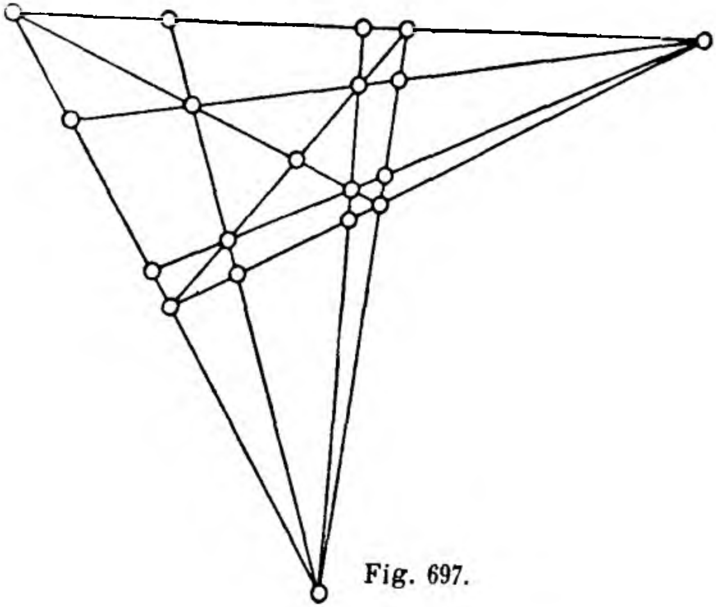


Fig. 697.

Allineamenti diversi.

Sui lati d'un pentagono si possono disporre 5 pedoni bianchi e altrettanti neri, in modo che su ciascun lato se ne trovino due bianchi e due neri (fig. 698-699).

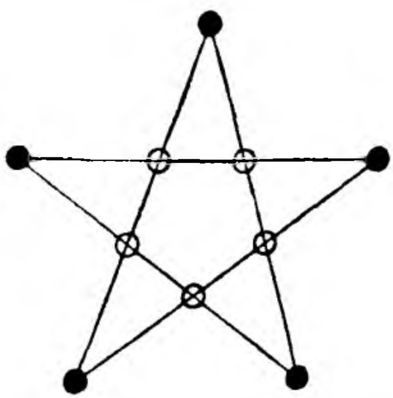


Fig. 698.

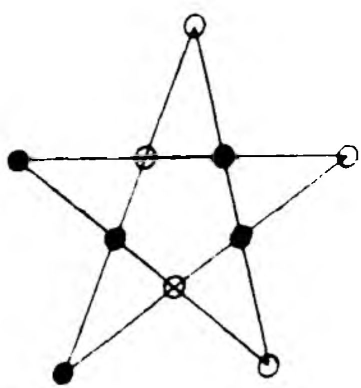


Fig. 699.

— Abbiansi 4 pedoni rossi, 4 gialli, 4 verdi e 4 neri; si potranno disporre per gruppi di quattro, tutti di diverso colore, sulle sei rette che si ottengono unendo i vertici d'un esagono in modo da formare due triangoli che si intersecano (esagono a stella fig. 700).

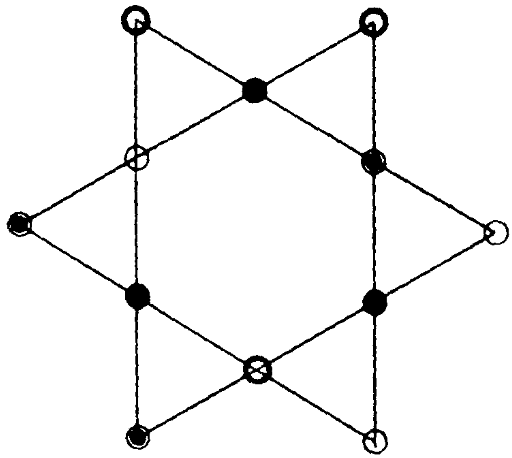


Fig. 700.

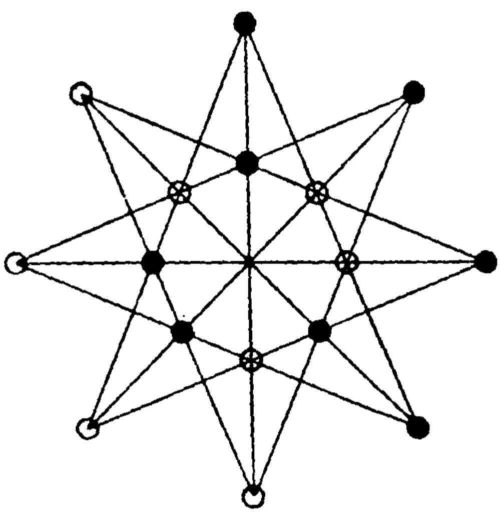


Fig. 701.

— In un ottagono stellato, con le diagonali, si possono disporre otto pedoni neri e altrettanti bianchi in 12 righe contenenti ciascuna due pedoni bianchi e due neri; nella fig. 701 si vede una delle disposizioni possibili.

— Nella fig. 702 costituita dagli ettagoni stellati di prima e seconda specie si possono disporre 10 pedoni bianchi e 11 neri su 14 righe contenenti ciascuna due pedoni neri e due bianchi.

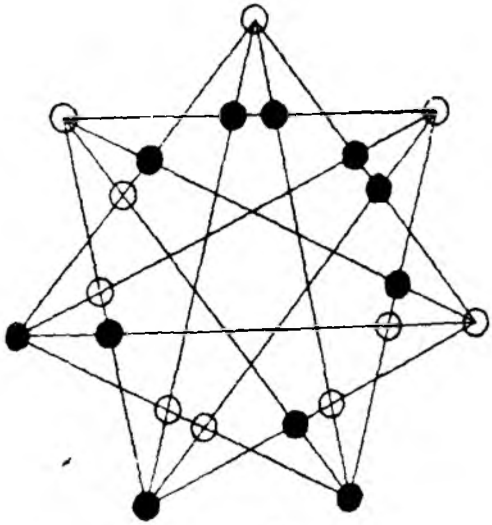


Fig. 702.

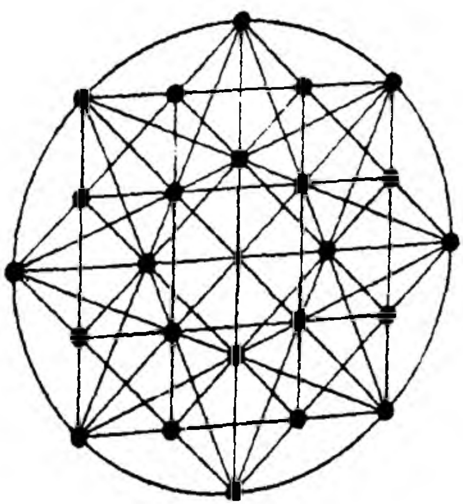


Fig. 703.

— Come si possono disporre 24 alberi in 28 allineamenti di 4 alberi ciascuno? La fig. 703 ci dà la soluzione del problema.

— Nello stessa poligono, con la disposizione indicata nella fig. 704, si possono ottenere con 28 pedoni 14 righe di 5 pedoni.

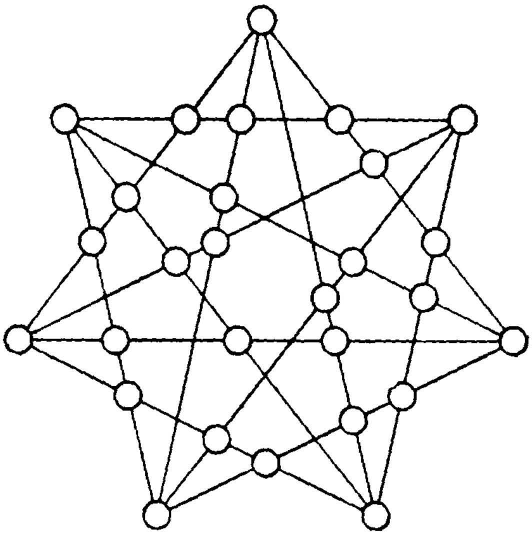


Fig. 704.

La torre di Hanoi.

Si tratta d'un gioco o rompicapo consistente in un'assicella con tre pioli in uno dei quali sono inflati otto dischi di diametro decrescente. Si tratta di ricostruire la torre formata di tali dischi inflandoli in uno degli altri due pioli, a condizione di non spostarne che uno alla volta e di non collocarne mai uno su di un'altro più piccolo.

Aumentando di uno il numero dei dischi il gioco richiede più che doppio numero di spostamenti; infatti se lo si sa risolvere per otto dischi, per esempio, trasportando la torre dal primo piolo al secondo si saprà risolverlo per nove. Si trasportano dapprima gli otto dischi superiori sul terzo piolo, poi il nono sul secondo e poi su questo gli altri otto. Dunque aumentando la torre d'un piano il numero dei tratti diventa doppio, più uno. Occorrono perciò:

Per	una	torre	di 2	piani	N.	3	tratti
»	»	»	» 3	»	»	7	»
»	»	»	» 4	»	»	15	»
»	»	»	» 5	»	»	31	»
»	»	»	» 6	»	»	63	»
»	»	»	» 7	»	»	127	»
»	»	»	» 8	»	»	255	»
»	»	»	» 9	»	»	511	»

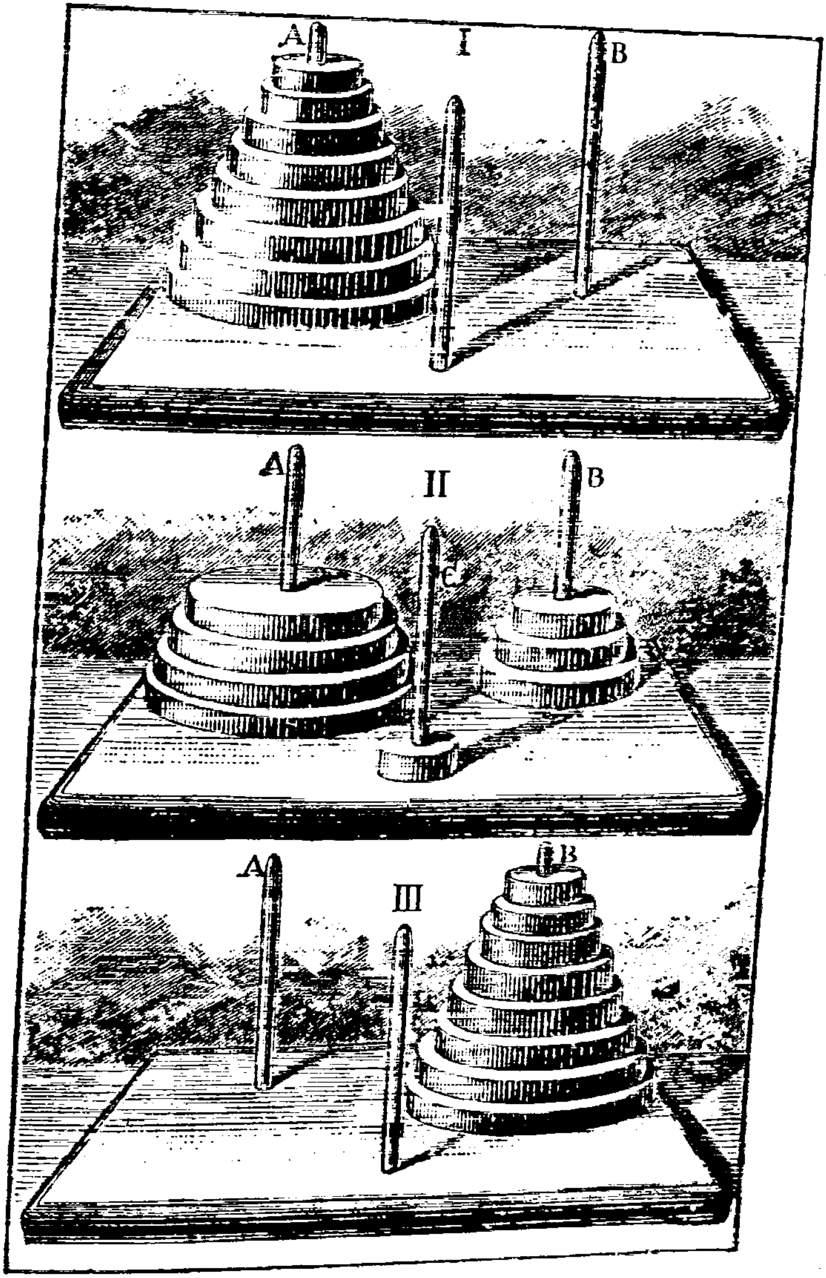


Fig. 705.

Supponendo di fare un movimento per secondo occorrono più di 4 minuti per ispostare la torre di otto piani.

Quando la torre fosse composta di 64 dischi occorrerebbe un numero di spostamenti dato da:

$$2^{64} - 1 = 18446744073709551615$$

numero che corrisponde a quello dei grani di frumento richiesto al monarca indiano Sheran da Sissa, l'inventore del gioco degli scacchi (vedi a pag. 98).

Nel caso del gioco della Torre di Hanoi occorrerebbero, operando nel modo sopra indicato, più di *cinque miliardi di secoli* per terminare il gioco...... e sarebbe davvero il caso di impiegarli meglio.

Problema degli otto gettoni.

Ecco otto gettoni disposti in linea retta:

1	1	1	1	1	1	1	1

In qual modo occorre spostarne quattro, facendoli saltare sopra due degli altri per posarli sopra un terzo, in modo da ottenere in definitiva quattro pile di due gettoni?

Ecco il quadro degli spostamenti successivi da operare, indicando con 0, 1, 2, il numero dei gettoni che si trovano in una data posizione:

1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	1	1	0	1	1	1
1	2	0	1	0	1	2	1
2	2	0	0	0	1	2	1
2	2	0	0	0	0	2	2

Osservazione. — Si può fare lo stesso problema con numero maggiore di gettoni, purchè pari. Infatti collocando il gettone N. 4 sul primo si può considerare la serie come diminuita di uno. Con 6 gettoni però il problema è impossibile.

Così pure, in luogo di saltare due gettoni si può saltarne tre, partendo da una riga di 12 gettoni e proponendosi di trasformarla in quattro pile di tre pezzi ciascuna.

Lo svolgimento delle operazioni è indicato nel seguente prospetto:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	2	1	1	1	0	0	1	1	1	2	1
1	3	1	1	1	0	0	0	1	1	2	1
1	3	1	0	1	0	0	0	1	1	3	1
2	3	0	0	1	0	0	0	1	1	3	1
3	3	0	0	0	0	0	0	1	1	3	1
3	3	0	0	0	0	0	0	1	0	3	2
3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3

Quando la linea iniziale contenesse 15, 18, 21, · · · · · gettoni, si comincerebbe col diminuirla successivamente di tre, formando una pila ad una delle estremità fino a ridurla a non contenere più che 12 gettoni.

Il metodo indicato è generale, cioè fornisce la soluzione del problema generale: *Dati* m n *gettoni in linea retta,* m *non essendo minore di 4, formare* m *pile di* n *gettoni saltando ad ogni spostamento* n *gettoni.*

La dama di 16 caselle.

In una *dama* di 16 caselle siano due pedoni bianchi e due neri situati come nella fig. 706. Immaginiamo la partita così

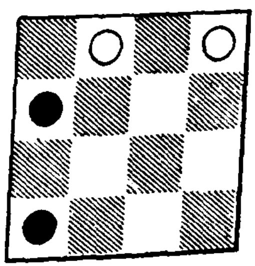


Fig. 706.

intavolata condotta col tratto al nero, per esempio. La partita, per due abili giocatori sarà *patta* come vedesi da questo prospetto:

	Nero	Bianco	
A)	*a* 1 — *b* 2	*b* 4 — *a* 3	e vince
B)	*c* 1 — *d* 2	*d* 4 — *c* 3	e vince
C)	*c* 1 — *b* 2	*b* 4 — *c* 3	patta

Se nel caso C il bianco commettesse l'errore di giocare $b\,4 - a\,3$ perderebbe la partita. Le stesse considerazioni potrà fare il Lettore sulla dama di 36 caselle attribuendo a ciascun giocatore 6 pedoni.

Sul gioco degli scacchi.

La difficoltà somma di uno studio matematico di questo gioco, per non dire addirittura l'*impossibilità*, si potrà bene comprendere quando si sappia che le prime *quattro* mosse possono effettuarsi in 197299 maniere diverse e che i pezzi possono occupare sulla scacchiera circa 72000 disposizioni differenti dopo la quarta mossa (due per ciascun giocatore) delle quali ben 16556 sono date dai soli movimenti di pedoni.

L'opera del Jaenisch (1), oltrechè incompleta, come è facile comprendere, riesce assai oscura ed ha certamente contribuito ben poco alla conoscenza delle intricate combinazioni del gioco.

Così, ad esempio, un *problema* di scacchi si dovrebbe poter risolvere una volta messo, poniamo, sotto questa forma: *Dati i tali pezzi del Bianco e del Nero nelle tali e tali altre posizioni trovare in quale* minimo *numero di mosse possa il Bianco, col tratto, vincere, oppure quale* o *quali pezzi e come collocati occorra aggiungere al Bianco* o *togliere al Nero, affinchè il Bianco col tratto possa dar matto in un determinato numero di mosse; od altrimenti far risaltare l'impossibilità di risolvere il problema.*

Non è difficile comprendere la *determinatezza* che possono presentare problemi di tal forma, ma le regole per risolverli non si presentano davvero facili a trovare.

I percorsi sulla scacchiera. — Consideriamo una scacchiera formata di $m \times n$ caselle. Quale è il numero totale di percorsi che è possibile seguire per passare dall'angolo superiore di sinistra a quello inferiore di destra, lo spostamento effettuandosi secondo le linee di divisione nel senso verticale dall'alto in basso e nel senso orizzontale da sinistra a destra?

---

(1) *Applications de l'Analyse Mathémat. au jeu des échecs.* S. Pétersbourg, 1862-3.

La formola che dà la risposta a tale domanda è questa:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot m + n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot m \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot n}$$

Se $m = n$ essa diviene:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 2\,m}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot m)^2}$$

Nel caso di $m = 8$, cioè nella scacchiera usuale, si ha:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 16}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 8)^2} = 12870$$

Salto del Cavallo. — *Quanti salti di cavallo sono possibili su di una scacchiera, prendendo successivamente tutte le caselle come punto di partenza?*

Consideriamo il caso generale di una scacchiera rettagolare di a per b caselle. Si può passare da una delle $(b - 1)$ prime colonne alla colonna seguente con $(a - 2)$ salti discendenti e con altrettanti salti ascendenti ossia con:

$$2\,(a - 2)\,(b - 1)$$

salti e altrettanti saltando da destra a sinistra. Parimente, passando alla linea precedente o alla susseguente si ha un numero di salti uguale al doppio di:

$$2\,(a - 1)\,(b - 2)$$

Dunque *il numero dei salti del cavaliere è uguale al doppio di*:

$$(2\,a - 3)\,(2\,b - 3) - 1$$

Nel caso della scacchiera comune quadrata, di 8 caselle di lato, si ha $a = b = 8$ e la formola diventa:

$$N = (2 \times 8 - 3) - 1 = 168$$

sicchè i salti sono in totale 336.

Mosse di Re. — Si può considerare il Re come l'insieme di due cavalieri uno dei passi dei quali è 1 e l'altro zero oppure 1. Si ha così il doppio di:

$$4\,ab - 3\,a - 3\,b + 2$$

Sulla scacchiera normale tale numero diventa:

$$4 \times 64 - 6 \times 8 + 2 = 210$$

Mosse di torre. — Possiamo considerare la Torre come l'insieme di due cavalieri pei quali uno dei passi è nullo e l'altro è uno qualunque degli intieri minori di a. Si trova così che il numero degli spostamenti della Torre sulla scacchiera di a^2 caselle è il doppio di:

$$a^2 (a-1) \qquad \text{e per} \qquad a = 8 \quad 64 \times 7 = 448$$

Mosse d'Alfiere. — Si può considerare il sistema di due Alfieri come l'insieme di due cavalieri i cui passi, uguali, sono tutti i numeri intieri minori di a (sulla scacchiera di a^2 caselle).

Gli spostamenti possibili sono dunque il doppio di:

$$\frac{1}{2}\, a\,(a-1)\,(2\,a-1) \qquad \text{e per} \qquad a = 8 \quad 4 \times 7 \times 15 = 420$$

Mosse di Regina. — Si può considerare la Regina come il complesso d'una Torre e di due Alfieri epperò potrà fare un numero di spostamenti doppio di:

$$\frac{1}{2}\, a\,(a-1)\,(5\,a-1) \qquad \text{e per} \qquad a = 8 \quad 4 \times 7 \times 39 = 1092$$

Un gioco aritmetico.

Siano X ed Y i due giocatori. Uno di essi X sceglie un certo numero che non oltrepassi un certo limite, 7 ad esempio; Y a sua volta indica un nuovo numero che non oltrepassi il 7, il quale viene aggiunto al numero già scelto da X; questi aggiunge alla somma un terzo numero, sempre rispondente alla condizione indicata, e così via alternativamente, fino a che il giocatore che riesce a raggiungere un certo numero, 57 ad es. fissato in precedenza, vince la partita.

È evidente che se il giocatore X, per esempio, arriva primo alla somma 49 vincerà poichè qualunque sia il numero aggiunto dall'avversario, non potrà ottenere, al più, che la somma 56 e X vincerà aggiungendo 1. Così pure se X arriva primo al 44, Y non può impedirgli d'arrivare per primo al 52. Sicchè la chiave del gioco consiste nel raggiungere per primo uno dei termini della progressione aritmetica:

$$\div\ 49\ .\ 41\ .\ 33\ .\ 25\ .\ 17\ .\ 9\ .\ 1$$

Ne segue che chi apre il gioco può sempre vincere.

In generale se il numero limite è m, e M il numero che si deve raggiungere per vincere, i *numeri–chiave* costituiscono una progressione aritmetica di ragione $m+1$ e il cui termine minimo si ottiene dividendo M per $m+1$.

Questo gioco si può giocare anche così. Si dispongono su un tavolo M oggetti qualunque. I due giocatori ne tolgono, per turno, un certo numero senza oltrepassare m, e chi prende l'ultimo oggetto vince. È chiaro che deve vincere il giocatore che per primo ha la possibilità di lasciare sul tavolo un numero di oggetti multiplo di $m+1$, cioè corrispondente ad uno dei termini della progressione.

Un'altra modificazione del gioco consiste nel disporre M oggetti in cerchio e invitare i due giocatori a ritirarne, ciascuno a sua volta, un certo numero m fissato prima, maggiore di 1. con la condizione che gli oggetti vengano ritirati di seguito, senza lasciare vuoti. In tali condizioni il secondo dei giocatori può vincere sempre.

L'analisi dei giochi suesposti, assai semplici quando le condizioni sono quelle accennate, riesce meno facile quando si aggiunga, ad esempio, la restrizione che ciascuno dei giocatori non possa aggiungere più di tre volte lo stesso numero, e riesce difficile dire se si abbia o meno vantaggio a cominciare il gioco.

Il *Ball* presenta in questo modo la sua generalizzazione:

« Supponiamo che ciascun giocatore abbia 18 carte, che per gruppi di tre portino i numeri 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Il giocatore X comincia a posare una delle sue carte, Y una delle sue e così via. Il primo che posa una carta tale che la somma dei punti di tutte le carte posate sia uguale a 50 vince la partita; ma questa è perduta quando posando una carta, la somma totale di tutti i punti oltrepassa il numero limite 50.

« Si può fare il gioco contando mentalmente o notando i numeri, per cui le carte non sono indispensabili.

« Supponiamo che X ed Y giochino così:

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad 8 \quad 17 \quad 25 \quad 34 \quad 43 \\ X - 4 - 1 - 3 - 4 - 4 - 5 \\ \\ Y - 3 - 6 - 4 - 5 - 4 \\ \qquad 7 \quad 14 \quad 21 \quad 30 \quad 38 \end{array}$$

« Il gioco è pervenuto a 43; *Y* ora può vincere poichè può giocare un *tre*, mentre *X* non ha poi un altro *quattro* da giocare, mentre d'altra parte se *X* gioca un numero inferiore al 4, *Y* vince al tratto successivo.

« Ecco un'altra partita:

		10	19	25	31	38	45
X	6	1	3	2	1	2	2
Y	3	6	4	5	5	5	3
	9	16	23	30	36	43	48

X è allora obbligato a giocare 1 ed *Y* vince giocando lo stesso numero 1 ».

Invece di tre si possono dare a ciascun giocatore due carte portanti lo stesso numero.

INDICE